

UZJMCS



Tashkent State  
Transport University

***Uzbekistan Journal of  
Mathematics and  
Computer Science***



[ujmcs.tstu.uz](http://ujmcs.tstu.uz)

2025

Volume: 1

Issue: 2

Tashkent 2025

TASHKENT STATE TRANSPORT  
UNIVERSITY



**Uzbekistan Journal of Mathematics  
and Computer Science**

2025

Volume: 1

Issue: 2

[ujmcs.tstu.uz](http://ujmcs.tstu.uz)

# Tashkent State Transport University

## Uzbekistan Journal of Mathematics and Computer Science

Volume 1, Issue 2, November, 2025

**Uzbekistan Journal of Mathematics and Computer Science** is a prestigious publication established by Tashkent State Transport University (TSTU). The journal focuses on mathematics, computer sciences, and physics, and aims to disseminate cutting-edge research and applied studies in the field of transport and related fields. Located at 1 Temiryolchilar street, TSTU Printing House, Tashkent, Uzbekistan, 100167, the journal operates as a dynamic platform for both national and international academic and professional communities. Submissions and inquiries can be sent to the editorial team at [ujmcs.tstu.uz](http://ujmcs.tstu.uz).

**Uzbekistan Journal of Mathematics and Computer Science** publishes pioneering scientific and applied research conducted by universities, higher education institutions, research centers, and institutes in the fields of mathematics and computer science, both within the Republic of Uzbekistan and internationally. This journal serves as a vital platform for sharing primary scientific results from doctoral dissertations, including Doctor of Philosophy (PhD) and Doctor of Science (DSc) in the physics, mathematics, and computer sciences.

The journal is published twice a year and provides a wide range of high-quality research articles in various fields. These fields include, but are not limited to:

- Algebra
- Analysis
- Functional analysis and operator theory
- Geometry
- Topology
- Differential equations
- Mathematical physics
- Integral equations
- Combinatorics
- Probability theory
- Financial Mathematics
- Econometrics
- Numerical analysis
- Applied mathematics
- Mathematical and computer modeling
- Computational and discrete mathematics
- Dynamical systems
- Mathematical statistics
- Artificial intelligence
- Information Security
- Computational linguistics
- Information technologies in education
- Computational sciences and high-performance computing
- Cryptology
- Computer graphics
- Database
- Theory of algorithms
- Computer programming
- Information security
- Programming languages and compilers
- Applied Computer Science
- Computer networks
- Software development and programming

Articles are published in three languages: Russian and English, ensuring wide accessibility and facilitating cross-cultural academic exchange. **Uzbekistan Journal of Mathematics and Computer Science**, a leading publication in its field, continues to be an essential platform for sharing knowledge.

## Editorial Team

| Name                              | Scientific field  | E-mail   | Country    |
|-----------------------------------|---|--|------------|
| <b>Editor in Chief</b>            |   |  |            |
| <b>Eshmamatova<br/>Dilfuza</b>    | Dynamic systems, graph theory,<br>problems of mathematical<br>biology, genetics, epidemiology<br>and ecology  | <a href="mailto:24dil@mail.ru">24dil@mail.ru</a>                       | Uzbekistan |
| <b>Deputy editor in Chief</b>     |   |  |            |
| <b>Artikbayev<br/>Abdullaaziz</b> | Geometry and topology, Non-<br>Euclidean Geometry   | <a href="mailto:aartykbaev@mail.ru">aartykbaev@mail.ru</a>             | Uzbekistan |
| <b>Managing editor</b>            |   |  |            |
| <b>Ismoilov<br/>Sherzodbek</b>    | Geometry and topology,<br>Riemanian manifold,<br>Pseudo-Riemannian manifold.  | <a href="mailto:sh.ismoilov@nuu.uz">sh.ismoilov@nuu.uz</a>             | Uzbekistan |
| <b>Technical editor</b>           |   |  |            |
| <b>Turdiyev<br/>Sirojiddin</b>    | -   | <a href="mailto:s.turdiyev@alumni.nsu.ru">s.turdiyev@alumni.nsu.ru</a> | Uzbekistan |
| <b>Editors</b>                    |   |  |            |
| <b>Zakirov Botir</b>              | Functional analysis, operator<br>theory, theory Banach-<br>Kantorovich space  | <a href="mailto:botirzakirov@list.ru">botirzakirov@list.ru</a>         | Uzbekistan |
| <b>Begmatov<br/>Akrom</b>         | Ill-posed problems of<br>mathematical physics and<br>analysis, weakly and strongly ill-<br>posed problems of integral<br>geometry, integral equations,<br>tomography, d'Alembert maps | <a href="mailto:akrambegmatov@mail.ru">akrambegmatov@mail.ru</a>       | Uzbekistan |
| <b>Azamov<br/>Abdulla</b>         | Dynamical Systems, Game<br>Theory, Differential Equations   | <a href="mailto:abdulla.azamov@gmail.com">abdulla.azamov@gmail.com</a> | Uzbekistan |
| <b>Formanov<br/>Shokir</b>        | Probability Theory and<br>Mathematical Statistics   | <a href="mailto:shakirformanov@yandex.ru">shakirformanov@yandex.ru</a> | Uzbekistan |
| <b>Rozikov Utkir</b>              | Functional analysis,<br>mathematical physics  | <a href="mailto:rozikovu@mail.ru">rozikovu@mail.ru</a>                 | Uzbekistan |

|                              |   |  |            |
|------------------------------|---|--|------------|
| <b>Shadimetov Kholmatvay</b> | Computational mathematics   | <a href="mailto:kholmatshadimetov@mail.ru">kholmatshadimetov@mail.ru</a> | Uzbekistan |
| <b>Hayotov Abdullo</b>       | Computational mathematics   | <a href="mailto:a.hayotov@centralasian.uz">a.hayotov@centralasian.uz</a> | Uzbekistan |
| <b>Aripov Mirsaid</b>        | Database<br>Theory of algorithms<br>Computer programming<br>Information security  | <a href="mailto:mirsaidaripov@mail.ru">mirsaidaripov@mail.ru</a>         | Uzbekistan |
| <b>Ravshanov Normaxmat</b>   | Computational mathematics   | <a href="mailto:ravshanzade-09@mail.ru">ravshanzade-09@mail.ru</a>       | Uzbekistan |
| <b>Chilin Vladimir</b>       | Functional analysis,<br>noncommutative integration,<br>operator theory, theory Banach-<br>Kantorovich space   | <a href="mailto:vladimirchilin@gmail.com">vladimirchilin@gmail.com</a>   | Uzbekistan |
| <b>Rakhmonov Zafar</b>       | Mathematical modeling,<br>numerical methods   | <a href="mailto:zraxmonov@inbox.ru">zraxmonov@inbox.ru</a>               | Uzbekistan |
| <b>Sharipov Olimjon</b>      | Probability theory and<br>mathematical statistics   | <a href="mailto:osharipov@mail.ru">osharipov@mail.ru</a>                 | Uzbekistan |
| <b>Raimova Gulnora</b>       | Probability Theory and<br>Mathematical Statistics,<br>Quantitative Methods in<br>Economics, Econometrics,<br>Financial Mathematics, Systems<br>Analysis, Decision Making in<br>Management | <a href="mailto:raimova27@gmail.com">raimova27@gmail.com</a>             | Uzbekistan |
| <b>Sharipov Anvarjon</b>     | Geometry and topology   | <a href="mailto:asharipov@inbox.ru">asharipov@inbox.ru</a>               | Uzbekistan |
| <b>Ashurov Ravshan</b>       | Mathematical Analysis,<br>Differential Equations,<br>Mathematical Physics   | <a href="mailto:ashurovr@gmail.com">ashurovr@gmail.com</a>               | Uzbekistan |
| <b>Karimov Erkin</b>         | Partial differential equations,<br>Special functions, Direct and<br>inverse problems  | <a href="mailto:erkinjon@gmail.com">erkinjon@gmail.com</a>               | Uzbekistan |
| <b>Azimov Jahongir</b>       | Theory of branching random<br>processes, stochastic models<br>with a<br>discrete set of states, asymptotic<br>analysis of statistical estimates   | <a href="mailto:azimovjb@gmail.com">azimovjb@gmail.com</a>               | Uzbekistan |
| <b>Isanov Rovshanbek</b>     | Inverse problems of equations of<br>mathematical physics  | <a href="mailto:diyora.isanova.97@bk.ru">diyora.isanova.97@bk.ru</a>     | Uzbekistan |

|  |   |  |                    |
|--|---|--|--------------------|
| <b>Kasimov Shuxrat</b>                   | Fuel balance of energy, solid fuels   | <a href="mailto:shuxrat1812@mail.ru">shuxrat1812@mail.ru</a>                     | Uzbekistan         |
| <b>Kendjaev Ravshan</b>                  | Probability theory, mathematical statistics   | <a href="mailto:lovsan63@mail.ru">lovsan63@mail.ru</a>                           | Uzbekistan         |
| <b>Sharipova Lola</b>                    | Probability theory, partial differential equations  | <a href="mailto:lolaxon@gmail.com">lolaxon@gmail.com</a>                         | Uzbekistan         |
| <b>Tuychiyeva Sayyora</b>                | Mathematical modeling of dynamic problems of porous media, Mathematical analysis                    | <a href="mailto:sayyora-tohirzoda@mail.ru">sayyora-tohirzoda@mail.ru</a>         | Uzbekistan         |
| <b>Yusupov Farrux</b>                    | Dynamic systems, graph theory, problems of mathematical biology, genetics, epidemiology and ecology | <a href="mailto:farrukhyusupovchambil@mail.ru">farrukhyusupovchambil@mail.ru</a> | Uzbekistan         |
| <b>Khudoykulov Shohruh Shuhratovich</b>  | Differential Equations, Mathematical Physics  | <a href="mailto:xudoykulov1194@gmail.com">xudoykulov1194@gmail.com</a>           | Uzbekistan         |
| <b>Sipatdinova Biybinaz Kenesbayevna</b> | Differential Equations, Mathematical Physics  | <a href="mailto:sbiybinaz@mail.ru">sbiybinaz@mail.ru</a>                         | Uzbekistan         |
| <b>Tadzhieva Mokhbonu Akram khizi</b>    | Dynamic systems, graph theory, problems of mathematical biology, genetics, epidemiology and ecology | <a href="mailto:mohbonut@mail.ru">mohbonut@mail.ru</a>                           | Uzbekistan         |
| <b>Turdiyev Malikjon</b>                 | Deformable solid mechanics  | <a href="mailto:malikjon_ts@mail.ru">malikjon_ts@mail.ru</a>                     | Uzbekistan         |
| <b>International editors</b>             |   |  |                    |
| <b>Aleksey Tuzhilin</b>                  | Differential geometry, calculus of variations, graph theory and combinatorics                       | <a href="mailto:aleksey.tuzhilin@yahoo.com">aleksey.tuzhilin@yahoo.com</a>       | Russian Federation |
| <b>Josef Mikeš</b>                       | Riemannian geometry, geodesic mappings, holomorphically projective mappings, F-planar mappings      | <a href="mailto:josef.mikes@upol.cz">josef.mikes@upol.cz</a>                     | Czech Republic     |
| <b>Umar Islambekov</b>                   | Statistics, Machine Learning, Applied Topology, Data Science  | <a href="mailto:yagol@physics.msu.ru">yagol@physics.msu.ru</a>                   | Russian Federation |
| <b>Марат Гаязович Юмагулов</b>           | Differential equations, nonlinear oscillations, bifurcations  | <a href="mailto:yum_mg@mail.ru">yum_mg@mail.ru</a>                               | Russian Federation |

|                                   |  |  |                    |
|-----------------------------------|--|--|--------------------|
| <b>Юрий Степанович Волков</b>     | Approximation theory, splines, numerical analysis  | <a href="mailto:volkov@math.nsc.ru">volkov@math.nsc.ru</a>                     | Russian Federation |
| <b>Fedor Sukochev</b>             | Theory noncommutative symmetric spaces, operator theory  | <a href="mailto:f.sukochev@unsw.edu.au">f.sukochev@unsw.edu.au</a>             | Australia          |
| <b>Tursun Yuldashev</b>           | Differential equations, computational mathematics, approximation methods of optimal control    | <a href="mailto:tursun.k.yuldashev@gmail.com">tursun.k.yuldashev@gmail.com</a> | Kyrgyzstan         |
| <b>Alexander Katz</b>             | Functional analysis, operator theory   | <a href="mailto:katza@stjohns.edu">katza@stjohns.edu</a>                       | USA                |
| <b>Semyon Litvinov</b>            | Theory noncommutative symmetric spaces, operator theory  | <a href="mailto:snl2@psu.edu">snl2@psu.edu</a>                                 | USA                |
| <b>Nurlan Temirbekov</b>          | Computational mathematics, mathematical modeling   | <a href="mailto:temirbekov@rambler.ru">temirbekov@rambler.ru</a>               | Kazakhstan         |
| <b>Farrukh Mukhamedov</b>         | Operator algebras, Functional analysis, Dynamical systems                                      | <a href="mailto:farrukh.m@uaeu.ac.ae">farrukh.m@uaeu.ac.ae</a>                 | UAE                |
| <b>Allaberen Ashyralyev</b>       | Delay differential equations, numerical functional analysis, stochastic differential equations | <a href="mailto:aallaberen@gmail.com">aallaberen@gmail.com</a>                 | Turkey             |
| <b>Dilmurat Azimov</b>            | Trajectory optimization, guidance, navigation and control, analytical methods of integration   | <a href="mailto:azimov@hawaii.edu">azimov@hawaii.edu</a>                       | USA                |
| <b>Parovik, Roman Ivanovich</b>   | Applications of fractional calculus, fractional dynamic systems                                | <a href="mailto:parovik@ikir.ru">parovik@ikir.ru</a>                           | Russian Federation |
| <b>Pskhu, Arsen Vladimirovich</b> | Differential equations, fractional calculus, mathematical modeling                             | <a href="mailto:pskhu@list.ru">pskhu@list.ru</a>                               | Russian Federation |

## CONTENTS

|   |     |
|---|-----|
| A.X. Бегматов, А.С. Исмоилов. <b>Об устойчивости решения задачи интегральной геометрии по неполным данным в пространстве <math>R^4</math></b> .....   | 1   |
| A. Y. Khamrayev, A.R. Doniyorov. <b>Негиперболическая траектория квазиневольтерровского кубического стохастического оператора</b> .....   | 12  |
| Мирзаев И., Турдиев М.С., Рахматов Н.Б. <b>Защита Зданий от Сейсмических Волн с Помощью Сухого Трения и Демпферов</b> .....   | 20  |
| D.B.Eshmatova, A.A.Alimov, M.A.Tadzhieva. <b>Analysis of the dynamics of quadratic mappings of a simplex with skew-symmetric matrices that are not in general position</b> .....            | 27  |
| A. Артикбаев, Г. Холмуродова. <b>Решение уравнения Монжа-Ампера с использованием геометрических преобразований</b> .....  | 38  |
| М.З. Саъдуллаева, Ш. Салимов, Т. Мавланов. <b>Исследование Устойчивости Цилиндрических Оболочек, Связанных с Кольцевой Пластиной</b> .....  | 46  |
| Т. К. Юлдашев, М. А. Тлеубергенова, А. К. Танкеева, А. Молюбайкызы. <b>Двухточечная краевая задача для системы функционально-дифференциальных уравнений с максимумами</b> .....             | 54  |
| A.Elmuurodov, A.Sotvoldiyev. <b>Структуросохраняющая схема для двухфазной конвективно-реакционно-диффузионной системы</b> .....   | 62  |
| Shomurodov Nozmbek, To'rayev Alimardon. <b>Asymptotic Properties of the Wilcoxon-Mann-Whitney Statistics</b> .....  | 79  |
| Мирожиддин Расулов, Масудхон Умирхонов. <b>Задача со свободной границей для уравнения нелинейной диффузии</b> .....   | 86  |
| Марат Юмагулов, Роберт Габдрахманов. <b>Кратные бифуркации Тьюринга и Андронова-Хопфа в системе "реакция-диффузия"</b> .....  | 94  |
| Ш.Х. Эштемирова. <b>Пространства идемпотентных вероятностных мер над <math>\Pi</math>-полными пространствами и отображениями</b> .....  | 105 |
| Сирожиддин Джамалов, Хамидулло Туракулов, Бийбиназ Сипатдинова . <b>О гладкости периодической краевой задачи для трёхмерного уравнения Чаплыгина в неограниченном параллелепипеде</b> ..... | 116 |
| A.C. Шарипов, З.Ю. Усмонхужаев. <b>О сохранении знака гауссовой кривизны при геодезических отображениях</b> .....   | 126 |
| В.И. Чилин, Г.Б. Закирова. <b><math>p</math>-Конвексификация симметричных пространств Банаха-Канторовича</b> .....  | 136 |
| Хилола Юлдашова, Анвар Хасанов. <b>Некоторые Функциональные Тождества, Выводимые Из Одной Конфлюэнтной Гипергеометрической Функции <math>E_7</math> От Трёх Переменной</b> .....            | 146 |
| R.N. Ganikhodzhaev , M.A. Tadzhieva, S.V. Maqsimova. <b>Пфаффиан и вычислительный анализ детерминантов кососимметричных матриц для однородных турниров</b> .....                            | 157 |



# Об устойчивости решения задачи интегральной геометрии по неполным данным в четырёхмерном пространстве

Бегматов Акрам Х.\* Исмоилов Алишер С.

## Аннотация

В статье изучается задача восстановления функции по интегралам по прямым, лежащим в плоскостях, проходящих через фиксированную точку в  $\mathbb{R}^4$ , при условии, что направления в каждой плоскости ограничены сектором. Рассматривается постановка с неполными данными и доказываются теоремы об единственности и логарифмической устойчивости. Отмечаются геометрические особенности задачи.

*Ключевые слова:* интегральная геометрия; неполные данные; устойчивость; гармоническая мера; грассманиан.

*Предметная классификация AMS (2020):* 44A12; 35R30; 65R32.

## Введение

Задачи интегральной геометрии представляют собой класс задач, в которых по значениям интегралов неизвестной функции по определённым семействам подмножеств требуется восстановить саму функцию. Наиболее известным примером является задача восстановления функции по её значениям на прямых — рентгеновское преобразование. Такие задачи находят широкое применение в томографии, геофизике, астрофизике и других прикладных областях.

Однако в большинстве случаев задачи интегральной геометрии оказываются некорректными. В классической монографии М.М. Лаврентьева [2] была предложена классификация задач интегральной геометрии на слабо и сильно некорректные. Задачи, в которых оператор обращения не является непрерывным даже в пространствах с конечным числом производных, относятся к сильно некорректным.

В более ранней работе [1] была исследована задача восстановления функции по её значениям рентгеновского преобразования при ограниченном наборе направлений в плоском секторе. В работе была получена логарифмическая оценка устойчивости в условиях сильной некорректности задачи.

Метод, основанный на применении гармонической меры и геометрического построения пучков прямых, оказался актуальным и применимым в ряде последующих исследований. В частности, в работах Салазара [10, 11], Уотерса [12], а также в ряде работ Стефанова и соавторов [13, 14, 9] рассматривались вопросы устойчивости и восстановления в задачах с частичными данными, в том числе в постановках, связанных с геодезическими/лучевыми преобразованиями и гиперболическими моделями.

Для полноты изложения кратко напомним постановку задачи и основные результаты, полученные нами ранее в работе [1].

Рассматривалась задача восстановления функции  $f \in C_0^5(\Omega)$ , где  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  — ограниченная область, по значениям её интегралов по прямым, проходящим через фиксированную точку  $x_0$  и направленным вдоль неполного множества направлений  $\omega \in \Gamma \subset S^2$ . Это соответствует рентгеновскому преобразованию:

$$Rf(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0 + s\omega) ds, \quad \omega \in \Gamma.$$

При этом множество направлений  $\Gamma$  описывается как сектор на сфере с центральным углом  $2\theta_0$ , что приводит к постановке задачи с неполными данными.

В указанной работе была доказана теорема об единственности восстановления функции, а также получена логарифмическая оценка устойчивости решения. Основным инструментом служило сведение задачи к двумерной с помощью конформного отображения сектора на полудиск и применение теории гармонической меры в плоскости.

В настоящей работе рассматривается задача восстановления функции по значениям её интегралов по прямым, проходящим через фиксированную вершину двуполостного конуса направлений — точку  $x_0 \in \mathbb{R}^4$ , расположенную вне замкнутой области  $B$ , содержащей носитель искомой функции. Рассматриваются значения интегралов этой функции по прямым, проходящим через  $x_0$  и направленным вдоль неполного множества направлений  $\omega$  в каждой двумерной плоскости, содержащей  $x_0$ .

В пространстве  $\mathbb{R}^4$  множество возможных двумерных направлений описывается грассманианом  $G(2, 4)$  — многообразием всех двумерных линейных подпространств четырёхмерного пространства. Каждая точка этого многообразия соответствует плоскости, проходящей через  $x_0$ . В каждой из этих плоскостей рассматриваются прямые, ограниченные заданным углом, что позволяет свести задачу устойчивости к двумерной, где применимы методы анализа на основе гармонической меры. Полученные локальные оценки затем объединяются путём интегрирования по  $G(2, 4)$ , что и даёт глобальную оценку устойчивости.

Однако важно подчеркнуть, что переход от трёхмерного к четырёхмерному пространству  $\mathbb{R}^4$  требует не просто обобщения ранее полученных результатов, а постановки **принципиально новой задачи**. Методы, использованные в [1] для доказательства устойчивости задачи с неполными данными в  $\mathbb{R}^3$ , не переносятся напрямую на четырёхмерный случай. Это связано, в частности, с невозможностью применения конформных отображений и локального сведения задачи к двумерному случаю, как это делалось ранее.

Проблемы восстановления функций по неполным интегральным данным активно исследуются в различных постановках интегральной геометрии и обратных задач. В частности, важным направлением являются задачи, в которых доступна лишь часть информации, ограниченная по геометрическим или аналитическим причинам. В последние годы было получено множество значимых результатов, связанных с устойчивостью и единственностью восстановления в подобных условиях.

В работе Уотерса [12] исследуется устойчивость временно-зависимого рентгеновского преобразования в условиях ограниченной видимости. Рассматривается случай, когда информация поступает только из определённой области, и доказываются априорные оценки, отражающие логарифмический характер нестабильности задачи. Эта модель демонстрирует важность локальной геометрии доступных направлений и мотивирует разработку новых подходов к устойчивости в условиях ограничений.

Стефанов в [13] доказывает теорему о поддержке функции на лоренцовых многообразиях, используя свойства геодезических потоков и методов микролокального анализа. Несмотря на то что метрика отличается от евклидовой, геометрическая логика, лежащая в основе восстановления, во многом схожа с нашей: данные по интегралам вдоль геодезических позволяют судить о функции в области.

В работе Стефанова и Янга [14] исследуется обратная задача Дирахле-Неймана для уравнений с гиперболическим типом, с акцентом на томографические аспекты в лоренцовой геометрии. Здесь центральным является вопрос, можно ли по данным на границе области восстановить внутреннюю структуру, что близко к нашему стремлению восстановить функцию по интегралам вдоль ограниченного семейства прямых.

В работе Белласуэда и Бен Айша [15] рассматривается устойчивое восстановление функции, «скрытой» под маской, в контексте задач обратного распространения волн. Хотя постановка относится к волновой

физике, характер устойчивости — логарифмический, как и в нашей работе, что подчёркивает общую природу неустойчивости в задачах с неполными данными.

Демченко в статье [16] анализирует задачу восстановления источника для волнового уравнения в условиях частичных данных. Важным является то, что даже при ограниченной информации возможно доказать устойчивость (пусть и слабую) решения, при условии выполнения определённых геометрических условий.

Наконец, Илмавирта [17] изучает рентгеновские преобразования на псевдоримановых многообразиях, с акцентом на параметризацию направлений и инвариантность задачи. Хотя геометрия существенно отличается от евклидовой, использование многообразий направлений близко к нашему подходу с грассманианом  $G(2, 4)$ .

Таким образом, все перечисленные работы подтверждают фундаментальную важность геометрического характера доступных данных, структуру направлений и априорные оценки. Настоящая статья продолжает и обобщает эту линию исследований, предлагая новую четырёхмерную модель с использованием расслоенного интегрирования по грассманиану и строгое логарифмическое обоснование устойчивости и единственности.

Изучение задач интегральной геометрии, связанных с восстановлением функции по её интегралам по определённым семействам подмножеств, остаётся актуальной как в теоретическом, так и в прикладном аспектах. При этом особый интерес представляют некорректные задачи, в которых малые изменения в исходных данных могут приводить к значительным отклонениям в решении. Такие задачи требуют специальных методов регуляризации и анализа устойчивости.

В предыдущих работах одного из авторов [1, 18, 19, 20, 21, 22, 23] были исследованы различные классы задач интегральной геометрии и получены оценки устойчивости. В частности, в статьях [18, 19, 20] получены логарифмические оценки устойчивости и построены формулы обращения для задач с интегрированием по параболам, конусам и кривым с особенностями. В работах [22, 23] предложены постановки с разрывными весовыми функциями и исследованы методы продолжения решения в симметричных областях. В статье [21] были рассмотрены два класса *слабо некорректных задач интегральной геометрии*. Первый класс связан с восстановлением функции по интегралам вдоль кусочно-гладких кривых с особенностью в вершине на плоскости. Для этого класса получены оценки устойчивости в пространствах конечной гладкости, доказаны теоремы существования и получены аналитические формулы обращения. Второй класс задач основан на интегрировании по семействам конусов в  $n$ -мерном пространстве. В работе показано существенное различие между чётномерным и нечётномерным случаями, установлены теоремы единственности и устойчивости, а также выведены соответствующие формулы обращения.

**Настоящая работа посвящена изучению задачи интегральной геометрии в пространстве  $\mathbb{R}^4$ , которая относится к классу *сильно некорректных задач*.** Основное внимание уделяется построению условия существования решения, формуле обращения и оценке степени неустойчивости задачи. Предложенный подход является развитием методов, разработанных ранее для задач в пространстве меньшей размерности, и требует принципиально новых технических средств.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим пространство  $\mathbb{R}^4$  с декартовой системой координат  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ . Пусть  $B \subset \mathbb{R}^4$  — ограниченная область с гладкой границей. Через  $\pi$  обозначим двумерные линейные подпространства в  $\mathbb{R}^4$ , принадлежащие многообразию Грассмана  $G(2, 4)$ , и через  $l \subset \pi \cap B$  — отрезки прямых, лежащие в пересечении  $\pi \cap B$ .

Пусть функция  $f \in C_0^\infty(B)$  задана на отрезках  $l \subset \pi \cap B$ , и для каждой такой прямой задан интеграл:

$$Rf(\pi, l) = \int_l f(x) ds,$$

где  $ds$  — элемент длины на прямой  $l$ . Задача заключается в восстановлении функции  $f(x)$  в области  $B$  по всем таким интегралам.

Отметим, что область  $B$  покрыта лишь подмножеством всех возможных прямых в  $\mathbb{R}^4$ , т.е. имеем дело с задачей по неполным данным. Такая постановка приводит к *сильно некорректной задаче*, поскольку информация ограничена как по направлениям, так и по длине прямых.

Целью работы является:

- установить условия разрешимости задачи;
- получить формулу обращения;
- дать априорные оценки для возможных решений в функциональных пространствах;
- проанализировать степень неустойчивости в зависимости от характеристик множества данных.

## 2. Геометрическая структура задачи

### 2.1. Пространство направлений: роль $G(2, 4)$

В трёхмерном случае ( $\mathbb{R}^3$ ) множество всех направлений задаётся как подмножество единичной сферы  $S^2$ . Это даёт возможность естественно работать с углами и секторами в сферических координатах.

В четырёхмерном случае ( $\mathbb{R}^4$ ) мы рассматриваем прямые, лежащие в двумерных плоскостях, проходящих через точку  $x_0$ . Такие плоскости описываются грассманианом:

$$G(2, 4) = \text{многообразие всех двумерных линейных подпространств в } \mathbb{R}^4.$$

Это компактное 4-мерное многообразие (см. [7, 3]). Таким образом, направление задаётся не просто вектором, а плоскостью  $\pi$  и направлением внутри неё.

### 2.2. Как строятся плоскости $\pi$ и семейство прямых

Фиксируем точку  $x_0 \in \mathbb{R}^4$ . Через неё проходит всё множество двумерных линейных подпространств  $\pi \in G(2, 4)$ . В каждой такой плоскости фиксируется сектор направлений (например, с центральным углом  $\theta$ ), и рассматриваются прямые, проходящие через  $x_0$  в этих направлениях.

Итак, множество прямых — это объединение всех локальных пучков прямых, заданных в плоскостях  $\pi \in \Pi \subset G(2, 4)$ , с локальным ограничением по углу.

### 2.3. Покрывание области $B$

Пусть  $B \subset \mathbb{R}^4$  — ограниченная область, содержащая  $x_0$ . Мы рассматриваем семейство прямых, формируемое так:

- для каждой плоскости  $\pi \in \Pi \subset G(2, 4)$ ,
- фиксируется сектор направлений  $\Gamma_\pi \subset S_\pi^1$ ,
- рассматриваются прямые  $L$ , проходящие через  $x_0$  в этих направлениях,
- эти прямые ограничиваются отрезками, лежащими в  $B$ .

Таким образом, получается частичное покрытие области  $B$  направленными отрезками.

### 2.4. Визуализация: построение семейства прямых из $x_0$

Процесс можно описать так:

1. В точке  $x_0$  фиксируется плоскость  $\pi$ .
2. В ней выделяется сектор направлений  $\Gamma_\pi$ .

3. Через  $x_0$  и каждое направление из  $\Gamma_\pi$  проводится прямая.

4. Повторяя это для различных  $\pi$ , получаем семейство прямых, «веером» заполняющих окрестность  $x_0$ .

Объединяя все такие прямые, мы строим множество «частичных лучей» в  $\mathbb{R}^4$ , по которым интегрируется функция  $f(x)$ .

### 2.5. Заключение

Геометрическая структура задачи определяется двумя уровнями параметризации: выбором плоскости  $\pi \in G(2, 4)$  и направлением внутри неё. Пространство направлений представляет собой волокнистое пространство: над каждой точкой  $G(2, 4)$  висит  $S^1$ . Это делает задачу существенно более сложной и исключает прямое использование методов из  $\mathbb{R}^3$ .

## 3. Вспомогательная лемма

Рассмотрим ограниченную область  $B \subset \mathbb{R}^4$ , содержащую точку  $x_0$ . Пусть  $\Pi \subset G(2, 4)$  — семейство двумерных плоскостей, проходящих через  $x_0$ , и в каждой  $\pi \in \Pi$  задан сектор направлений  $\Gamma_\pi \subset S_\pi^1$ .

Пусть  $f \in C_0(B)$  — непрерывная функция с компактным носителем в  $B$ , и известны значения её интегралов по отрезкам всех прямых, проходящих через  $x_0$  в направлениях из  $\Gamma_\pi$ , во всех  $\pi \in \Pi$ . Обозначим это интегральное преобразование через  $\mathcal{R}f$ .

**Лемма 1** (о логарифмической устойчивости). Пусть  $B \subset \mathbb{R}^4$  — ограниченная область, содержащая точку  $x_0$ . Пусть  $\Pi \subset G(2, 4)$  — семейство двумерных плоскостей, проходящих через  $x_0$ , и для каждой  $\pi \in \Pi$  задан сектор направлений  $\Gamma_\pi \subset S_\pi^1$ , угловая ширина которого характеризуется параметром  $\varepsilon > 0$ . Тогда существует постоянная

$$C = C(B, \Pi, \{\Gamma_\pi\}) > 0,$$

такая что для любой  $f \in C_0(B)$  выполняется оценка

$$\|f\|_{L^2(B)} \leq \frac{C}{\sqrt{|\log \varepsilon|}} \left( \int_{\Pi} \int_{\Gamma_\pi} |\mathcal{R}f(\pi, \theta)|^2 d\theta d\mu(\pi) \right)^{1/2}. \quad (3.1)$$

*Доказательство.* Рассмотрим фиксированную плоскость  $\pi \in \Pi$ , проходящую через точку  $x_0$ . Тогда задача сводится к двумерной: необходимо оценить норму функции  $f$ , ограниченной на  $B \cap \pi$ , по значениям её интегралов по отрезкам, исходящим из точки  $x_0$  в направлениях  $\theta \in \Gamma_\pi$ .

В двумерном случае аналогичная задача изучена в работе [1], где получена логарифмическая априорная оценка

$$\|f\|_{L^2(B \cap \pi)} \leq \frac{C_\pi}{\sqrt{|\log \varepsilon|}} \left( \int_{\Gamma_\pi} |\mathcal{R}f(\pi, \theta)|^2 d\theta \right)^{1/2},$$

где  $\varepsilon$  характеризует угловую ширину сектора  $\Gamma_\pi$ .

Интегрируя эти двумерные оценки по всем  $\pi \in \Pi \subset G(2, 4)$  относительно меры Хаара  $\mu(\pi)$ , получаем требуемую оценку (3.1).

Отметим, что полученная постоянная  $C$  зависит только от геометрии области  $B$ , выбранного семейства плоскостей  $\Pi \subset G(2, 4)$  и конфигурации секторов  $\{\Gamma_\pi\}$ , и не зависит от функции  $f$ .  $\square$

**Замечание о мере Хаара.** Мера  $\mu(\pi)$  является инвариантной относительно действия группы  $SO(4)$  на грассманиане  $G(2, 4) \cong SO(4)/[SO(2) \times SO(2)]$ . Она играет аналогичную роль мере Лебега на евклидовом пространстве. Конструкции и свойства такой меры подробно рассмотрены в [4, 5].

## 4. Теорема единственности

### 4.1. Формулировка

**Теорема 1.** Пусть  $f \in C_0(B)$ , где  $B \subset \mathbb{R}^4$  — ограниченная область. Предположим, что для всех  $\pi \in \Pi \subset G(2, 4)$  и всех направлений  $\theta \in \Gamma_\pi \subset S_\pi^1$ , выполняется

$$\mathcal{R}f(\pi, \theta) = \int_{L_{\pi, \theta}} f(x) ds = 0,$$

где  $L_{\pi, \theta} \subset \pi$  — отрезок прямой, проходящий через фиксированную точку  $x_0 \in B$  в направлении  $\theta$  и лежащий в плоскости  $\pi$ .

Предположим также, что семейство отрезков  $\{L_{\pi, \theta}\}$  покрывает область  $B$  в следующем смысле:

$$\forall x \in B \quad \exists \pi \in \Pi, \theta \in \Gamma_\pi : x \in L_{\pi, \theta}.$$

Тогда  $f(x) = 0$  для всех  $x \in B$ .

### 4.2. Доказательство

Рассмотрим произвольную плоскость  $\pi \in \Pi$ . Тогда ограничение функции  $f$  на  $\pi$  представляет собой непрерывную функцию  $f|_\pi \in C_0(B \cap \pi)$ . По предположению, для всех направлений  $\theta \in \Gamma_\pi$  имеем:

$$\int_{L_{\pi, \theta}} f(x) ds = 0.$$

То есть известны значения интегралов функции по отрезкам, лежащим в плоскости  $\pi$ , направленным в секторе  $\Gamma_\pi$ , и проходящим через точку  $x_0$ . Это означает, что в каждой плоскости решается задача восстановления функции по интегралам по пучку направлений, исходящих из одной точки.

Согласно результатам, доказанным в [1], в двумерном случае (в плоскости) такая система интегралов однозначно определяет функцию, при условии, что сектор направлений  $\Gamma_\pi$  содержит открытую дугу. Следовательно,

$$f|_{B \cap \pi} \equiv 0.$$

Так как множество плоскостей  $\pi \in \Pi$  таково, что для каждой точки  $x \in B$  найдётся отрезок  $L_{\pi, \theta} \ni x$ , на котором интеграл функции равен нулю, и, следовательно, функция обнуляется в каждой плоскости, охватывающей  $x$ , то получаем:

$$\forall x \in B \quad f(x) = 0.$$

Таким образом,  $f \equiv 0$  в  $B$ . Теорема доказана.

### 4.3. Заключение и замечания

Доказанная теорема утверждает, что знание интегралов функции по семейству отрезков, лежащих в фиксированных двумерных плоскостях и проходящих через одну точку, при условии охвата области  $B$ , обеспечивает однозначность восстановления функции.

Это результат существенно отличается от классических задач преобразования Радона, поскольку:

- направление интегрирования ограничено локальными пучками в каждой плоскости;
- пространство направлений параметризуется не сферой, а грассманианом  $G(2, 4)$ ;
- отсутствует возможность сведения задачи к двумерной глобальной постановке.

Важнейшую роль играет условие покрытия: без него возможны нетривиальные функции, ортогональные к системе отрезков. Теорема, таким образом, подтверждает корректность самой постановки задачи восстановления при наличии априорных геометрических условий.

## 5. Теорема устойчивости

Здесь и далее параметр  $\varepsilon > 0$  характеризует угловую ширину секторов  $\Gamma_\pi \subset S_\pi^1$  и, тем самым, степень неполноты данных.

### 5.1. Формулировка

**Теорема 2** (логарифмическая устойчивость). Пусть  $f \in C_0(B)$ , где  $B \subset \mathbb{R}^4$  — ограниченная область. Пусть  $x_0 \in B$ , и для каждого  $\pi \in \Pi \subset G(2, 4)$  задан сектор направлений  $\Gamma_\pi \subset S_\pi^1$ . Предположим, что семейство отрезков  $\{L_{\pi, \theta}\}$  покрывает область  $B$  в смысле:

$$\forall x \in B \exists \pi \in \Pi, \theta \in \Gamma_\pi : x \in L_{\pi, \theta}.$$

Тогда существует константа

$$C = C(B, \Pi, \{\Gamma_\pi\}, x_0) > 0$$

такая, что выполняется оценка

$$\|f\|_{L^2(B)} \leq \frac{C}{\sqrt{|\log \varepsilon|}} \left( \int_\Pi \int_{\Gamma_\pi} |\mathcal{R}f(\pi, \theta)|^2 d\theta d\mu(\pi) \right)^{1/2}. \quad (5.1)$$

### 5.2. Доказательство

*Шаг 1. Локальная оценка в фиксированной плоскости.* Зафиксируем  $\pi \in \Pi$ . Тогда в этой плоскости задача сводится к восстановлению функции  $f_\pi := f|_\pi \in C_0(B \cap \pi) \subset \mathbb{R}^2$  по интегралам по отрезкам  $L_{\pi, \theta}$ , проходящим через точку  $x_0 \in \pi$  в направлениях  $\theta \in \Gamma_\pi \subset S^1$ .

Пусть  $D_\pi := B \cap \pi$ . Согласно теореме из [1], в такой двумерной постановке справедлива априорная оценка:

$$\|f_\pi\|_{L^2(D_\pi)} \leq \frac{C_1(\pi)}{\sqrt{|\log \varepsilon|}} \left( \int_{\Gamma_\pi} |\mathcal{R}f(\pi, \theta)|^2 d\theta \right)^{1/2}.$$

Доказательство этой оценки основано на построении вспомогательной субгармонической функции  $u(z)$ , гармонической в  $D_\pi \setminus \{x_0\}$ , принимающей значения, определяемые преобразованием  $\mathcal{R}f(\pi, \theta)$ , и применении интегральной теоремы о средних (см. [3]).

*Шаг 2. Интегрирование по пространству плоскостей.* Интегрируя полученную оценку по всем  $\pi \in \Pi \subset G(2, 4)$  с использованием меры Хаара  $\mu(\pi)$ , получаем:

$$\int_\Pi \|f_\pi\|_{L^2(D_\pi)}^2 d\mu(\pi) \leq \frac{C_2}{|\log \varepsilon|} \int_\Pi \int_{\Gamma_\pi} |\mathcal{R}f(\pi, \theta)|^2 d\theta d\mu(\pi).$$

Согласно результатам интегральной геометрии (см. [5], [4]), при условии, что множество отрезков  $\{L_{\pi, \theta}\}$  покрывает  $B$ , это усреднение обеспечивает мажоранту всей нормы:

$$\|f\|_{L^2(B)}^2 \leq C_3 \int_\Pi \|f_\pi\|_{L^2(D_\pi)}^2 d\mu(\pi).$$

Подставляя предыдущую оценку, получаем

$$\|f\|_{L^2(B)} \leq \frac{C}{\sqrt{|\log \varepsilon|}} \left( \int_{\Pi} \int_{\Gamma_{\pi}} |\mathcal{R}f(\pi, \theta)|^2 d\theta d\mu(\pi) \right)^{1/2}.$$

Теорема доказана.

### 5.3. Заключение

Полученная логарифмическая оценка демонстрирует характерную для задач с неполными данными слабую устойчивость. Появление логарифма связано с деградацией гармонической меры при сужении сектора направлений: для секторов  $\Gamma_{\pi}$  с угловой шириной порядка  $\varepsilon$ , вес в центральной точке  $x_0$  убывает как  $|\log \varepsilon|^{-1}$ , что и отражается в правой части оценки.

Таким образом, при любых ограничениях на направление интегрирования, сохраняющих покрытие области  $B$ , задача остаётся устойчивой, хотя и с существенно более слабой оценкой, чем в случае полной информации.

## 6. Обсуждение и приложения

### 6.1. Связь с задачами геодезического типа

Рассматриваемая задача относится к классу задач интегральной геометрии с частичными данными. Существуют аналогии с задачами геодезической томографии, в которых изучаются интегралы по геодезическим линиям на римановых или псевдоримановых многообразиях (см. [6]). Однако, в отличие от таких задач, где линии интегрирования определяются метрикой и не всегда являются линейными, в нашей постановке рассматриваются только прямолинейные отрезки, расположенные в фиксированных двумерных плоскостях.

Таким образом, наша задача ближе по духу к преобразованию Радона, но с существенным ограничением: интегрирование не происходит по всему пространству направлений, а только по суженным пучкам в ограниченных подмногообразиях  $G(2, 4) \times S^1$ .

### 6.2. Принципиальные отличия от задач на многообразиях

Задача, рассматриваемая в данной работе, формулируется в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^4$ , но с параметризацией, не обладающей полной симметрией. Напомним, что в трёхмерной постановке ( $\mathbb{R}^3$ ) возможно использование конформных преобразований и редукция задачи к двумерной (см. [1]). В четырёхмерном случае такой редукции не существует: грассманиан  $G(2, 4)$  не допускает конформной структуры, согласующейся с евклидовой метрикой.

Кроме того, интегрирование происходит по семейству двумерных сечений, что существенно усложняет геометрию задачи и исключает прямое использование стандартных методов спектральной теории или вариационных подходов.

### 6.3. О возможности обобщения на $\mathbb{R}^n$

Одним из возможных направлений обобщения является постановка аналогичной задачи в  $\mathbb{R}^n$  при фиксированной размерности интегрирующих подпространств — например, двумерных или  $k$ -мерных.

Однако, как показал анализ, при увеличении размерности пространства резко усложняется структура грассманиана  $G(k, n)$ , что приводит к существенным трудностям:

- мера Хаара становится всё менее конструктивной;
- отсутствует инвариантность направлений относительно подгрупп движений;
- ухудшается локальная устойчивость: логарифмические оценки заменяются на сублогарифмические (см. [8], [9]).

Таким образом, хотя теоретическая постановка задачи возможна и в произвольной размерности, переход к  $\mathbb{R}^n$  требует существенной модификации методов.

## 7. Заключение

В данной работе рассмотрена новая постановка задачи интегральной геометрии с неполными данными в четырёхмерном евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^4$ . В отличие от классических преобразований Радона и их модификаций в  $\mathbb{R}^2$  и  $\mathbb{R}^3$ , данная задача отличается следующими особенностями:

- интегрирование происходит по пучкам прямых, лежащих в двумерных линейных подпространствах;
- направления интегрирования параметризуются элементами грассманиана  $G(2, 4)$  и секторами  $\Gamma_\pi \subset S_\pi^1$ ;
- отсутствует возможность сведения к двумерной задаче через конформные преобразования;
- пространственная структура охвата определяется системой подпространств и требует анализа на многообразии  $G(2, 4)$ .

В рамках данной постановки нами доказаны следующие результаты:

1. **Теорема единственности:** при условии, что семейство направлений покрывает область  $B$ , знание интегралов по соответствующим отрезкам однозначно определяет функцию;
2. **Теорема устойчивости:** получена логарифмическая априорная оценка нормы функции через интегралы по неполному семейству прямых. Характер оценки обусловлен геометрическим вырождением гармонической меры при сужении сектора направлений;
3. Построена строгая геометрическая модель задачи через параметризацию  $G(2, 4)$ , уточнена роль меры Хаара и доказана вспомогательная лемма, дающая ключевую оценку по частичным данным.

Особенностью данной постановки является её потенциальная применимость к задачам с локализованным доступом к данным (например, в математических моделях, описывающих ограниченное поле зрения датчиков или частичные потоки информации).

Будущие исследования могут быть направлены на:

- обобщение полученных результатов на произвольную размерность  $\mathbb{R}^n$  и более высокие грассманианы  $G(k, n)$ ;
- изучение аналогичных задач на римановых многообразиях с ограниченным набором геодезических направлений;
- разработку численных алгоритмов, использующих доказанные априорные оценки в качестве базиса для регуляризации некорректных задач.

Таким образом, представленная работа не только предлагает новую постановку и её строгое математическое обоснование, но и открывает возможности для дальнейшего развития методов частичной интегральной геометрии в многомерных пространствах.

## Список литературы

- [1] Бегматов А. Х. Об одной задаче обращения лучевого преобразования с неполными данными // Сибирский математический журнал. 2001. Т. 42, №3. С. 515–529.
- [2] Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишачкий С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа. — М.: Наука, 1980.

- [3] Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я. Обобщённые функции. Том 5: Интегральная геометрия и теория представлений. — М.: Физматгиз, 1966.
- [4] Helgason S. Groups and Geometric Analysis. Academic Press, 1984.
- [5] Gindikin S. Integral geometry on symmetric spaces. Journal of Functional Analysis. 1975. Vol. 18. P. 32–39.
- [6] Шарафутдинов В. А. Интегральная геометрия на многообразиях. — Новосибирск: Наука, 1994.
- [7] Boothby W. M. An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry. Academic Press, 1986.
- [8] Natterer F. The Mathematics of Computerized Tomography. SIAM, 2001.
- [9] Stefanov P., Uhlmann G. An inverse source problem in optical molecular imaging. Analysis and PDE, 2008, 1(1):115–126.
- [10] Salazar R. Stability estimates for the hyperbolic inverse problem with time-dependent coefficients. arXiv:1009.4003v4 [math.AP], 2013.
- [11] Salazar R. Stability estimate for the relativistic Schrödinger equation with time-dependent vector potentials. arXiv:1406.4854, 2014.
- [12] Waters A. Stability for Time Dependent X-ray Transforms and Applications. arXiv:1311.1591v2 [math.AP], 2015.
- [13] Stefanov P. Support theorems for the light ray transform on analytic Lorentzian manifolds. Proc. Amer. Math. Soc. 2017. Vol. 145, No. 3. P. 1259–1274.
- [14] Stefanov P., Yang Y. The inverse problem for the Dirichlet-to-Neumann map on Lorentzian manifolds. Anal. PDE. 2018. Vol. 11, No. 6. P. 1381–1414.
- [15] Bellassoued M., Ben Aïcha I. Stable determination outside a cloaking region of two time-dependent coefficients in a hyperbolic equation from Dirichlet to Neumann map. J. Math. Anal. Appl. 2017. Vol. 449. P. 46–76.
- [16] Demchenko M. On the inverse source problem for the wave equation. J. Math. Sci. 2017. Vol. 219, No. 1. P. 62–78.
- [17] Илмавирта J. X-ray transforms in pseudo-Riemannian geometry. J. Geom. Anal. 2018. Vol. 28. P. 1173–1197.
- [18] Бегматов А. Х. Два класса слабо некорректных задач интегральной геометрии на плоскости // Сиб. матем. журн. 1995. Т. 36, № 2. С. 243–247.
- [19] Бегматов А. Х. Задача интегральной геометрии для семейства конусов в  $n$ -мерном пространстве // Сиб. матем. журн. 1996. Т. 37, № 3. С. 500–505.
- [20] Бегматов А. Х. Задачи интегральной геометрии вольтерровского типа для кривых с особенностями // Сиб. матем. журн. 1997. Т. 38, № 4. С. 723–737.
- [21] Бегматов А. Х. Теоремы существования решения двух слабо некорректных задач интегральной геометрии // Докл. АН. 2002. Т. 386, № 1. С. 727–729.
- [22] Begmatov Akr. Kh., Ochilov Z. Kh. D'Alembert mappings for a class of symmetric domains // Dokl. Math. 2009. Vol. 80, No. 1. P. 506–507.
- [23] Begmatov Akr. Kh., Ochilov Z. Kh. Integral geometry problem with a discontinuous weight function // Dokl. Math. 2009. Vol. 80, No. 3. P. 823–825.

## On the Stability of the Solution to an Integral Geometry Problem from Incomplete Data in Four Dimensional Space

Akram K. Begmatov, Alisher S. Ismoilov

### Abstract

**This paper addresses an inverse problem in integral geometry in four-dimensional space  $\mathbb{R}^4$  based on incomplete data. The problem involves recovering a function defined in a bounded domain from its integrals along line segments lying in two-dimensional planes intersecting the domain. The incompleteness arises due to the restriction on the set of available directions and lengths of the lines, which leads to a severely ill-posed problem. A constructive inversion formula is proposed under geometric constraints, and a priori estimates are derived. The results obtained lay the foundation for applying the method in tomographic and geophysical problems with limited observational geometry.**

### Affiliations

Акрам Х. Бегматов

**Address:** Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан

**e-mail:** begmatov59@gmail.com

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0002-2813-7653>

Алишер С. Исмоилов

**Address:** Самаркандский государственный педагогический институт, Самарканд, Узбекистан

**e-mail:** alisher\_8778@mail.ru

**ORCID ID:**



# Негиперболическая траектория квазиневольтерровского кубического стохастического оператора

А. Ю. Хамраев,\* Ф.А.Юсупов, А. Р. Дониёров

## Аннотация

В данной работе рассматривается динамика квазиневольтерровского кубического стохастического оператора, определённого на двумерном симплексе. Найдено инвариантное множество данного оператора и показано, что он имеет единственную негиперболическую неподвижную точку. Кроме того, построена и использована функция Ляпунова для доказательства того, что множество предельных точек траектории для любой начальной точки является единственным.

*Ключевые слова:* кубический стохастический оператор, квазиневольтерровский кубический стохастический оператор, функция Ляпунова, траектория, предельное множество.

*Предметная классификация AMS (2020):* Основная: 37B25 ; Дополнительная: 37C25, 37C27

## 1. Введение

Пусть  $E = \{1, 2, \dots, m\}$ . Под  $(m - 1)$ -мерным симплексом понимается множество

$$S^{m-1} = \left\{ x \in R^m : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^m x_i = 1 \right\}$$

Каждый элемент  $x \in S^{m-1}$  является вероятностной мерой на множестве  $E$  и, следовательно, может рассматриваться как состояние биологической (физической и иной) системы, состоящей из  $m$  элементов.

Кубическим стохастическим оператором называется отображение  $V : S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$  вида

$$V : x'_l = \sum_{i,j,k=1}^m p_{ijk,l} x_i x_j x_k, \quad l \in E \quad (1.1)$$

где  $p_{ijk,l}$  — коэффициенты наследственности, удовлетворяющие условиям

$$p_{ijk,l} \geq 0, \quad \text{для всех } \sum_{l=1}^m p_{ijk,l} = 1, \quad \text{для всех } i, j, k \in E \quad (1.2)$$

и не изменяются при перестановках индексов  $i, j, k$  (в случае отсутствия половой дифференциации).

Для заданной начальной точки  $x^{(0)}$  траектория  $\{x^{(n)}\}_{n \geq 0}$  определяется итерацией:

$$x^{(n+1)} = V(x^{(n)}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Одной из основных задач математической биологии является изучение асимптотического поведения таких траекторий. Следует отметить, что даже в двумерном случае эта задача в общем виде остаётся открытой.

Авторы работ [7, 8, 14, 15, 16, 18, 19, 20] предложили различные модели популяционной динамики. В работе [16] данная задача была рассмотрена для класса вольтерровских кубических стохастических операторов (CSO). Невольтерровский кубический стохастический оператор определяется соотношениями (1.1), (1.2) и дополнительным предположением

$$p_{ij,k} = 0, \quad l \in \{i, j, k\}, \quad \text{для всех } i, j, k \in E.$$

В работе [18] был введён и исследован кубический стохастический оператор (CSO). Кубический стохастический оператор, являющийся выпуклой комбинацией регулярных и неэргодических операторов, был изучен в [11]. Случайная динамика вольтерровских кубических стохастических операторов рассматривалась в [5]. В работе [17] авторами был построен кубический стохастический оператор. Класс невольтерровских кубических стохастических операторов, называемый классом условных кубических стохастических операторов, был исследован в [2]. Если для заданных коэффициентов оператора выполняется следующее условие:

$$p_{iii,i} > 0, \quad \text{для всех } i \in E$$

то оператор такого вида называется квазивольтерровским кубическим стохастическим оператором.

В настоящей работе рассматриваются квазиневольтерровские кубические стохастические операторы, заданные на двумерном симплексе.

В разделе 2 приводятся необходимые определения. В разделе 3 проводится анализ квазиневольтерровского кубического стохастического оператора путём нахождения его инвариантного множества, неподвижных точек и исследования типов этих неподвижных точек. Показано, что любая траектория, начинающаяся в симплексе, сходится к неподвижной точке, что, в свою очередь, означает регулярность данного оператора.

## 2. Предварительные сведения

Точка  $x \in S^{m-1}$  называется неподвижной точкой КСО  $V$ , если  $V(x) = x$ . Множество всех неподвижных точек обозначается через  $Fix\{V\}$ .

**Определение 2.1.** Кубический стохастический оператор  $V$  называется регулярным, если для любой начальной точки  $x \in S^{m-1}$  существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V^n(x).$$

Пусть  $DV(x^*) = (\partial V_i / \partial x_j)(x^*)$  — якобиан оператора  $V$  в точке  $x^*$ .

**Определение 2.2.** Неподвижная точка  $x^*$  называется гиперболической, если якобиан  $DV(x^*)$  не имеет собственных значений на единичной окружности.

**Определение 2.3.** Гиперболическая неподвижная точка называется:

- i) притягивающей, если все собственные значения лежат внутри единичного круга;
- ii) отталкивающей, если все лежат вне замкнутого единичного круга;
- iii) седловой — в противном случае.

**Определение 2.4.** Непрерывная функция  $\varphi : S^{m-1} \rightarrow R$  называется функцией Ляпунова для оператора  $V$ , если существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x^{(n)}), \quad \forall x \in S^{m-1}.$$

Если  $\varphi(x^{(n)}) \rightarrow c$  то  $\omega$ -предельное множество траектории содержится в уровне  $\varphi^{-1}(c)$ .  
Внутренность симплекса  $S^2$  определяется как

$$\text{int}S^2 = \{x \in S^2 : x_1x_2x_3 > 0\},$$

а его граница – как  $\partial S^2 = S^2 \setminus \text{int}S^2$ .

### 3. Основные результаты

Рассматривается следующий квазиневольтерровский кубический стохастический оператор на двумерном симплексе:

$$V : \begin{cases} x' = \frac{x^3+y^3+z^3}{3} + 3x^2y + 3y^2z + 2xyz; \\ y' = \frac{x^3+y^3+z^3}{3} + 3xy^2 + 3x^2z + 2xyz; \\ z' = \frac{x^3+y^3+z^3}{3} + 3z^2y + 3z^2x + 2xyz. \end{cases} \quad (3.1)$$

Нетрудно видеть, что оператор  $V$  является квазиневольтерровским кубическим стохастическим оператором.

Рассмотрим разность

$$x' - y' = 3(x - y)(xy - z(x + y)) \quad (3.2)$$

Из этого следует, что множество

$$M = \{x \in S^2 : x = y\}$$

является инвариантным относительно оператора (3.1).

Сначала найдём неподвижные точки данного оператора. Неподвижные точки оператора  $V$  определяются следующим образом:

$$\begin{cases} x = \frac{x^3+y^3+z^3}{3} + 3x^2y + 3y^2z + 2xyz; \\ y = \frac{x^3+y^3+z^3}{3} + 3xy^2 + 3x^2z + 2xyz; \\ z = \frac{x^3+y^3+z^3}{3} + 3z^2y + 3z^2x + 2xyz; \end{cases} \quad (3.3)$$

что означает решение данной системы уравнений.

Полученное уравнение проанализируем, разбив его на два случая:

$$x - y = 0, 3xy - 3z(x + y) - 1 \neq 0, \quad (3.4a)$$

$$x - y \neq 0, 3xy - 3z(x + y) - 1 = 0, \quad (3.4b)$$

Сначала рассмотрим случай (3.4a). Используя условие  $x = y$  в первом уравнении оператора (3.1), получаем следующую функцию:

$$x' = f(x) = -\frac{1}{3}(3x - 1)^3 + x, x \in [0; 1].$$

Неподвижная точка функции  $f(x)$  равна  $x^* = \frac{1}{3}$ , что легко проверить. Нетрудно также убедиться, что  $|f'(x^*)| = 1$ . Следовательно, точка  $x^*$  является негиперболической неподвижной точкой.

**Теорема 3.1.** Пусть  $x^*$  — неподвижная точка разностного уравнения  $x_{n+1} = f(x_n)$  где  $f \in C^3(\mathbb{R})$  и  $f'(x^*) = 1$ . Тогда справедливы следующие утверждения:

- (i) Если  $f''(x^*) \neq 0$  то точка  $x^*$  является неустойчивой;
- (ii) Если  $f''(x^*) = 0$  и  $f'''(x^*) > 0$ , то точка  $x^*$  является неустойчивой;
- (iii) Если  $f''(x^*) = 0$  и  $f'''(x^*) < 0$  то точка  $x^*$  является асимптотически устойчивой.

Согласно Теореме 3.1, точка  $x^*$  является асимптотически устойчивой неподвижной точкой.

Теперь проанализируем уравнение (3.4b):

$$3xy - 3z(x + y) - 1 = 0 \Rightarrow 3xy - 3(1 - (x + y))(x + y) - 1 = 0$$

Отсюда получаем

$$3y^2 + 3(3x - 1)y + 3x^2 - 3x - 1 = 0$$

Решая это квадратное уравнение относительно  $y$ , получаем два решения:

$$y_1 = \frac{3(1 - 3x) + \sqrt{45x^2 - 18x + 21}}{6}, y_2 = \frac{3(1 - 3x) - \sqrt{45x^2 - 18x + 21}}{6} \quad (3.5)$$

Поскольку  $y_2 < 0$  это решение не принадлежит симплексу, а так как  $x + y_1 > 1$  то и первое решение также не принадлежит симплексу. Следовательно, уравнение (3.4b) не имеет решений в симплексе.

Из случая (3.4a) и условия  $x = \frac{1}{3}$  получаем, что точка  $c = (\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$  является единственной неподвижной точкой оператора.

Для определения типа неподвижной точки перепишем оператор (3.1) в виде двумерного отображения:

$$f(x, y) = \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + (1 - x - y)^3) + 3x^2y + 3y^2(1 - x - y) + 2xy(1 - x - y) \quad (3.6a)$$

$$g(x, y) = \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + (1 - x - y)^3) + 3xy^2 + 3x^2(1 - x - y) + 2xy(1 - x - y) \quad (3.6b)$$

Найдём частные производные функций (3.6a) и (3.6b):

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{3}(3x^2 - 3(1 - x - y)^2) + 6xy - 3y^2 + 2y(1 - x - y) - 2xy,$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{3}(3y^2 - 3(1 - x - y)^2) + 3x^2 + 6y(1 - x - y) - 3y^2 + 2x(1 - x - y) - 2xy,$$

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{3}(3x^2 - 3(1 - x - y)^2) + 3y^2 + 6x(1 - x - y) - 3x^2 + 2y(1 - x - y) - 2xy,$$

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{3}(3y^2 - 3(1 - x - y)^2) + 6xy - 3x^2 + 2x(1 - x - y) - 2xy.$$

В неподвижной точке  $(\frac{1}{3}; \frac{1}{3})$  эти производные принимают следующие значения:

$$\frac{\partial f(x; y)}{\partial x} \Big|_{(\frac{1}{3}; \frac{1}{3})} = \frac{1}{3}, \frac{\partial f(x; y)}{\partial y} \Big|_{(\frac{1}{3}; \frac{1}{3})} = \frac{2}{3}, \frac{\partial g(x; y)}{\partial x} \Big|_{(\frac{1}{3}; \frac{1}{3})} = \frac{2}{3}, \frac{\partial g(x; y)}{\partial y} \Big|_{(\frac{1}{3}; \frac{1}{3})} = \frac{1}{3} \quad (3.7)$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} - \lambda & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (3.8)$$

Из последнего равенства получаем собственные значения:  $|\lambda_1| = \frac{1}{3}, |\lambda_2| = 1$  Следовательно, точка  $c$  является негиперболической.

**Лемма 3.1.** Пусть  $\varphi : S^2 \rightarrow R$  задано формулой  $\varphi(x) = 3xy - 3z(x + y)$ . Тогда выполняется неравенство  $|\varphi(x)| < \frac{3}{4}$ .

**Доказательство.** По неравенству  $AM - GM$  имеем

$$0 < z(x + y) \leq \left( \frac{3(x + y + z)}{3 \cdot 2} \right)^2 = \frac{1}{4},$$

откуда

$$xy - \frac{1}{4} \leq xy - z(x+y) < xy < \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \left(\frac{1-z}{2}\right)^2$$

и, следовательно

$$3 \left(xy - \frac{1}{4}\right) \leq 3(xy - z(x+y)) < \frac{3}{4}.$$

Лемма доказана.

Рассмотрим непрерывную функцию  $\varphi : \text{int}S^2 \rightarrow R$ , определённую как  $\varphi(x) = |x - y|$ . Так как  $V(\partial S^2) \subset \text{int}S^2$  далее рассматривается только внутренняя часть симплекса.

Из Леммы 3.1 получаем

$$\varphi(x') = |x' - y'| = |x - y| \cdot |3xy - 3z(x+y)| = \varphi(x) \cdot |3xy - 3z(x+y)| < \frac{3}{4} \cdot \varphi(x). \quad (3.9)$$

Следовательно, функция  $\varphi(x)$  является функцией Ляпунова.

**Лемма 3.2.** Для любой начальной точки  $x^{(0)} \in S^2$ , если определить последовательность  $\varphi(x^{(n+1)}) = \varphi(V^n(x^{(n)}))$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x^{(n)}) = 0. \quad (3.10)$$

Доказательство. Из (3.9) следует

$$\varphi(x^{(n+1)}) < \frac{3}{4} \varphi(x^{(n)}) < \dots < \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \varphi(x^{(0)}),$$

откуда и вытекает предел (3.10).

Из этого следует, что траектория любой точки сходится к медиане симплекса, которая является инвариантной.

Инвариантное множество можно записать в виде

$$M = \{x \in S^2 : x = y\} = \left\{ (x; x; 1-2x) : x \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \right\}.$$

**Лемма 3.3.** Для любой начальной точки  $x \in [0; \frac{1}{2}]$  выполняется

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = \frac{1}{3}. \quad (3.11)$$

Доказательство. Найдём точки экстремума функции  $f(x)$ .

$$f'(x) = -3(3x-1)^2 + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{3\sqrt{3}}, x_2 = \frac{\sqrt{3}+1}{3\sqrt{3}}.$$

Поскольку  $x_2 > \frac{1}{2}$  эта точка не принадлежит отрезку  $[0; \frac{1}{2}]$ . Функция  $f(x)$  убывает на отрезке  $[0; x_1]$  и возрастает на  $[x_1; 0.5]$ . Разобьём отрезок  $[0; 0.5]$  на три части:

$$I_1 = [0; x_1], I_2 = [x_1; x^*], I_3 = (x^*; 0.5]$$

где  $x^* = \frac{1}{3}$ .

1) Случай  $x \in I_2$  Легко проверить, что  $f(x) - x = -\frac{1}{3}(3x-1)^3 > 0, \forall x \in I_2$ . Следовательно,

$$f^{(n+1)}(x) > f^n(x), n = 0, 1, 2, \dots$$

то есть последовательность  $\{f^n(x)\}$  монотонно возрастает. Так как она ограничена, существует предел, и потому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = \frac{1}{3}, \forall x \in I_2.$$

2) Случай  $x \in I_1$ . Так как  $f(0) = \frac{1}{3}$  и функция  $f(x)$  убывает на данном интервале, имеем

$$f(x_1) < f(x) < f(0) = \frac{1}{3}.$$

Следовательно, для любого  $x \in I_1$  его образ  $f(x)$  попадает в интервал  $I_2$  и потому по предыдущему пункту  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = \frac{1}{3}$ .

3) Случай  $x \in I_3$ . На этом интервале функция  $f(x)$  убывает и ограничена снизу. Из неравенства

$$f(x) - x = -\frac{1}{3}(3x - 1)^3 < 0$$

следует, что

$$f^{n+1}(x) < f^n(x), n = 0, 1, 2, \dots$$

то есть последовательность  $\{f^n(x)\}$  монотонно убывает. Поскольку она ограничена, существует предел, и потому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = \frac{1}{3}, \forall x \in I_3.$$

Таким образом, для любого  $x \in [0; \frac{1}{2}]$  выполняется

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = \frac{1}{3}.$$

Лемма доказана.

Принимая во внимание, что доказательство приведённой ниже теоремы непосредственно следует из вышеуказанных лемм, приводим формулировку теоремы без доказательства.

**Теорема 3.2.** Для любой начальной точки  $x^{(0)} \in S^2 \setminus \text{Fix}\{V\}$  справедливо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V^n(x^{(0)}) = c = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right).$$

## 4. Заключение

В настоящей работе исследовано динамическое поведение квазиневольтерровского кубического стохастического оператора, действующего на двумерном симплексе. Установлено, что данный оператор обладает единственной негиперболической неподвижной точкой. Посредством построения функции Ляпунова и анализа глобальных динамических свойств оператора доказано, что траектория, порождённая любой начальной точкой, сходится к центру симплекса.

В целом полученные результаты вносят вклад в более глубокое понимание стохастических моделей более высокого порядка в теории динамики популяций, в особенности моделей, отклоняющихся от классической вольтерровской схемы. В дальнейшем представляется целесообразным исследовать бифуркационные явления, а также глобальный фазовый портрет подобных операторов с целью получения более полного и всестороннего представления об их динамических свойствах.

Настоящее исследование выполнено в рамках фундаментального и прикладного научно-исследовательского проекта № AL-9224093956-R5 «Dynamics and Applications of Cubic Stochastic Operators» («Динамика и приложения кубических стохастических операторов»).

## Благодарность

Авторы выражают искреннюю благодарность академику У. А. Розикову, доктору физико-математических наук, академику Академии наук Республики Узбекистан, за ценные рекомендации и консультации, оказанные при подготовке настоящей статьи.

## Список литературы

- [1] Kouichi Murakami, Stability for non-hyrbolic fixed points of scalar differense equations, *J. Math Anal. Appl.* 310(2005) 492-505
- [2] Davronov R. R., Jamilov (Zhamilov) U. U. and Ladra M. Conditional cubic stochastic operator. *J. Difference Equ. Appl.*, 2015, vol. 21, no. 12, pp. 1163–1170. DOI: 10.1080/10236198.2015.1062481.
- [3] Devaney R.L., An introduction to chaotic dynamical systems, (Studies in Nonlinearity), Westview Press, Boulder, 2003, reprint of the second (1989) edition.
- [4] Freedman H. I. and Waltman P. Persistence in models of three interacting predator-prey populations. *Math. Biosci.*, 1984, vol. 68, no. 2, pp. 1 213–231. DOI: 10.1016/0025-5564(84)90032-4
- [5] Homburg A. J., Jamilov U. U. and Scheutzow M. Asymptotics for a class of iterated random cubic operators. *Nonlinearity*, 2019, vol. 32, no. 10, pp. 3646–3660. DOI: 10.1088/1361-6544/ab1f24.
- [6] Jamilov U. U. Khamraev A. Yu. and Ladra M. On a Volterra cubic stochastic operator. *Bull. Math. Biol.*, 2018, vol. 80, no. 2, pp. 319–334. DOI: 10.1007/s11538-017-0376-0.
- [7] Jamilov U. U. Khamraev A. Yu. On dynamics of Volterra and non-Volterra cubic stochastic operators. *Bull. Math. Biol.*, 2022, vol. 37, no. 1, pp. 66–82. DOI: 10.1080/14689367.2021.2006150
- [8] Khamraev A. Yu. Makhmatkobilov N. P. On the dynamics of a quasi-strictly non-Volterra cubic stochastic operator *Bull. Math. Biol.*, 2025, vol. 15, no. 1, DOI: 10.62476/jcam.151.1
- [9] Jamilov U. U. and Ladra M. On identically distributed non-Volterra cubic stochastic operator. *Jour. Appl. Nonlin. Dyn.*, 2017, vol. 6, no. 1, pp. 79–90. DOI: 10.5890/JAND.2017.03.006.
- [10] Jamilov U. U. and Reinfelds A. On constrained Volterra cubic stochastic operators. *J. Difference Equ. Appl.*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 261–274. DOI: 10.1080/10236198.2020.1720664.
- [11] Jamilov U. U. and Reinfelds A. A family of Volterra cubic stochastic operators. *Journal Convex Analysis*, 2021, vol. 28, no. 1, pp. 19–30. DOI: <https://www.heldermann.de/JCA/JCA28/JCA281/jca28003.html>
- [12] Mukhamedov F. M., Embong A. F. and Rosli A. Orthogonal preserving and surjective cubic stochastic operators. *Ann. Funs. Anal.* 2017, vol. 8, no. 4, pp. 490–501. DOI: 10.1215/20088752-2017-0013.
- [13] Mukhamedov F. M., Pah C. H. and Rosli A. On non-ergodic Volterra cubic stochastic operators. *Qual. Theory Dyn. Syst.* 2019, vol. 18, no. 3, pp. 1225–1235. DOI: 10.1007/s12346-019-00334-8.
- [14] Mukhamedov F., Embong A.F., Rosli A. Orthogonal-preserving and surjective cubic stochastic operators *Ann. Funct. Anal.* 2019, vol. 8, no. 4, pp. 490–501. DOI: 10.1215/20088752-2017-0013.
- [15] Rozikov U. A. Population dynamics: algebraic and probabilistic approach. *World Sci Publ.*, p. 460., Singapore (2020)
- [16] Rozikov U. A. and Khamraev A. Yu. On cubic operators defined on finite-dimensional simplices. *Ukrainian Math. J.*, 2004, vol. 56, no. 10, pp. 1699–1711. DOI: 10.1007/s11253-005-0145-3.
- [17] Rozikov U. A. and Khamraev A. Yu. On construction and a class of non-Volterra cubic stochastic operators. *Nonlinear Dyn. Syst. Theory.*, 2014, vol. 14, no. 1, pp. 92–100.
- [18] Khamraev A. Yu. On cubic operators of Volterra type. *Uzbek. Math. Zh.*, 2004, no. 2, pp. 79–84. (in Russian)
- [19] Khamraev A. Yu. A condition for the uniqueness of a fixed point for cubic operators. *Uzbek. Math. Zh.*, 2005, no. 1, pp. 79–87. (in Russian)
- [20] Khamraev A. Yu. On a Volterra-type cubic operator. *Uzbek. Math. Zh.*, 2009, no. 3, pp. 65–71. (in Russian)
- [21] Khamraev A. Yu. and Tursunova A. Kh. *Prob. Comp. App. Math.* Full description of the behavior of trajectories of a cubic operator. 2020, vol. 2, no. 26, pp. 32–38. (in Russian)

## Non-hyperbolic trajectory of a quasi-non-Volterra cubic stochastic operator

A. Y. Khamrayev, F.A.Yusupov and A.R. Doniyorov

## Abstract

**In this paper, we consider the dynamics of a quasi-non-Volterra cubic stochastic operator defined on the 2D simplex. We find the invariant set of this operator and show that it has a unique non-hyperbolic fixed point. Furthermore, we construct and use the Lyapunov function to prove that the set of limit points of a trajectory for any initial point is unique.**

## Affiliations

A. Y. KHAMRAYEV

**Address:** Karshi State University, Karshi. Uzbekistan.

**e-mail:** khamrayev-ay@yandex.ru

**ORCID ID:**0009-0005-4858-9285

F.A. YUSUPOV

**Address:** Tashkent State Transport University, Tashkent. Uzbekistan

**e-mail:** farrukhyusupovchambil@mail.ru

**ORCID ID:** 0000-0003-1909-6420

A. R. DONIYOROV

**Address:** Karshi State University, Karshi. Uzbekistan.

**ORCID ID:**0009-0005-5310-1256



# Защита Зданий от Сейсмических Волн с Помощью Сухого Трения и Демпферов

Мирзаев И., Турдиев М.С.\* и Рахматов Н.Б.

## Аннотация

В представленной научной работе исследуется проблема сейсмоизоляции девятиэтажного здания при воздействии четырёх различных реальных записей сейсмических волн. Для защиты конструкции применяется комбинированная система, включающая сейсмоизоляторы с сухим трением и резинометаллические демпферы (резинометаллические опоры с демпфирующими свойствами). В ходе исследования подробно анализируется влияние различных сейсмических воздействий на величину максимальной сдвиговой (срезающей) силы, возникающей в элементах здания. Особое внимание уделено тому, как изменяется этот показатель при увеличении и уменьшении количества используемых изолирующих и демпфирующих устройств в системе сейсмоизоляции. Полученные результаты позволяют оценить эффективность совместного применения указанных типов устройств, а также выявить оптимальные конфигурации их размещения и количества для минимизации сейсмических нагрузок на несущие конструкции многоэтажного здания.

*Ключевые слова:* сухое трение; сейсмоизоляция; резинометаллический демпфер.

*Предметная классификация AMS (2020):* Основная: 74-XX; Дополнительная: 74Jxx; 74Kxx; 74K10; 70F35; 74Pxx; 86A15.

## Введение

В современном мире всё большее внимание уделяется разработке и внедрению передовых технологий строительства, обеспечивающих повышенную сейсмостойкость зданий и сооружений. Особый акцент делается на применении специальных сейсмозащитных устройств и систем, которые позволяют существенно снизить уровень динамических нагрузок, передаваемых на несущие конструкции во время сильных землетрясений, тем самым повышая общую надёжность, безопасность и долговечность объектов. В настоящее время в странах с высоким уровнем сейсмической активности и развитой инженерной практикой — таких как США, Япония, Германия, Россия, Италия и Китай — активно ведутся фундаментальные и прикладные исследования, направленные на создание новых, более эффективных типов сейсмоизолирующих и демпфирующих устройств. Эти разработки ориентированы на использование в различных элементах несущих систем зданий и сооружений (фундаменты, колонны, перекрытия, связи), с широким применением местных сырьевых материалов и учётом требований к длительной безотказной эксплуатации в жёстких климатических и сейсмических условиях [1–3]. В рамках настоящей исследовательской работы рассматривается актуальная инженерная задача сейсмоизоляции девятиэтажного жилого или общественного здания при одновременном воздействии четырёх различных реальных акселерограмм (записей) сильных землетрясений. Для достижения требуемого уровня защиты применяется

комбинированная (гибридная) система сейсмоизоляции, основанная на совместном использовании двух типов устройств:

сейсмоизоляторов с сухим трением (трибологических изоляторов, работающих за счёт сил сухого трения между поверхностями скольжения), резинометаллических демпферов (эластомерных опор с металлическими армирующими слоями, обеспечивающих упругую податливость и дополнительное рассеивание энергии).

В ходе численного моделирования и параметрического анализа подробно изучено влияние характера и интенсивности выбранных сейсмических воздействий на величину максимальной сдвиговой (срезающей) силы (base shear), возникающей в уровне основания здания. Особое внимание уделено количественной оценке того, как изменяется данный ключевой показатель сейсмической нагрузки при систематическом увеличении и уменьшении количества одновременно применяемых изолирующих и демпфирующих элементов в составе гибридной системы. Полученные результаты позволяют глубже понять механизмы совместной работы указанных устройств, выявить диапазоны рационального варьирования их числа и размещения, а также оценить реальную эффективность комбинированного подхода к сейсмоизоляции для снижения уровня сдвиговых усилий в несущих конструкциях многоэтажного здания при различных сценариях сейсмического воздействия. В работе [7] проведена оценка эффективности оптимальных систем TLCD и TMD для снижения сейсмического отклика зданий с учетом взаимодействия «сооружение–грунт». Используется численное моделирование и оптимизационные алгоритмы. Показано, что учет SSI существенно влияет на выбор и эффективность демпфирующих устройств. Статья [8] посвящена базовой сейсмоизоляции зданий с использованием свободно катящихся стержней под фундаментом. Рассмотрена динамика конструкции при землетрясениях и особенности снижения передаваемых инерционных сил. Показана перспективность роликовых систем как простой формы изоляции. Авторы исследуют [9] наклонные многороликовые сейсмоизоляционные устройства для защиты оборудования и сооружений. Представлены экспериментальные и численные результаты, подтверждающие стабильность и самовосстанавливающие свойства системы. Показано значительное снижение сейсмических перемещений и усилий. В статье [10] выполнено численное моделирование взаимодействия здания с основанием при сейсмических воздействиях. Рассматриваются различные условия контакта и скольжения фундамента. Полученные результаты демонстрируют влияние модели основания на динамический отклик сооружения. Отчет посвящен [11] разработке и валидации системы сейсмоизоляции для легких жилых зданий. Представлены результаты экспериментальных испытаний и аналитического моделирования. Доказана надежность и практическая применимость предложенной изоляционной системы.

## 1. Метод

Пусть горизонтальное движение основания конструкции задано в виде акселерограммы действительного землетрясения. Здание представим одномерной сдвиговой моделью с сосредоточенными массами и безынерционными упругими связями. Расчетная схема многоэтажного здания с учетом сейсмоизоляции с сухим трением по нормативному документу принимает следующий вид (рис. 1).

Для данной конструкции применяем конечные элементы смещения, в результате чего приходим к следующей системе простых дифференциальных уравнений [4, 5]:

$$\begin{aligned} [M] \cdot \{\ddot{U}\} + [C] \cdot \{\dot{U}\} + [K] \cdot \{U\} &= \{Q(t)\}, \\ \{U\} = 0, \quad \{\dot{U}\} = 0 &\text{ при } t = 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $[M]$  – диагональная матрица масс,  $[K]$  – матрица жесткостей;  $[C] = \alpha[M] + \beta[K]$  – матрица вязкости,  $\{U\}$  – вектор перемещений. Для сейсмоизолятора сухого трения условие взаимосвязи массы ростверка  $M_0$  и скользящего фундамента принимает следующий вид:

$$u_0 = u_g - u_r, \quad \text{если } |F_0| < |F_{fr}|, \text{ т.е. при совместном движении,} \quad (1.2)$$

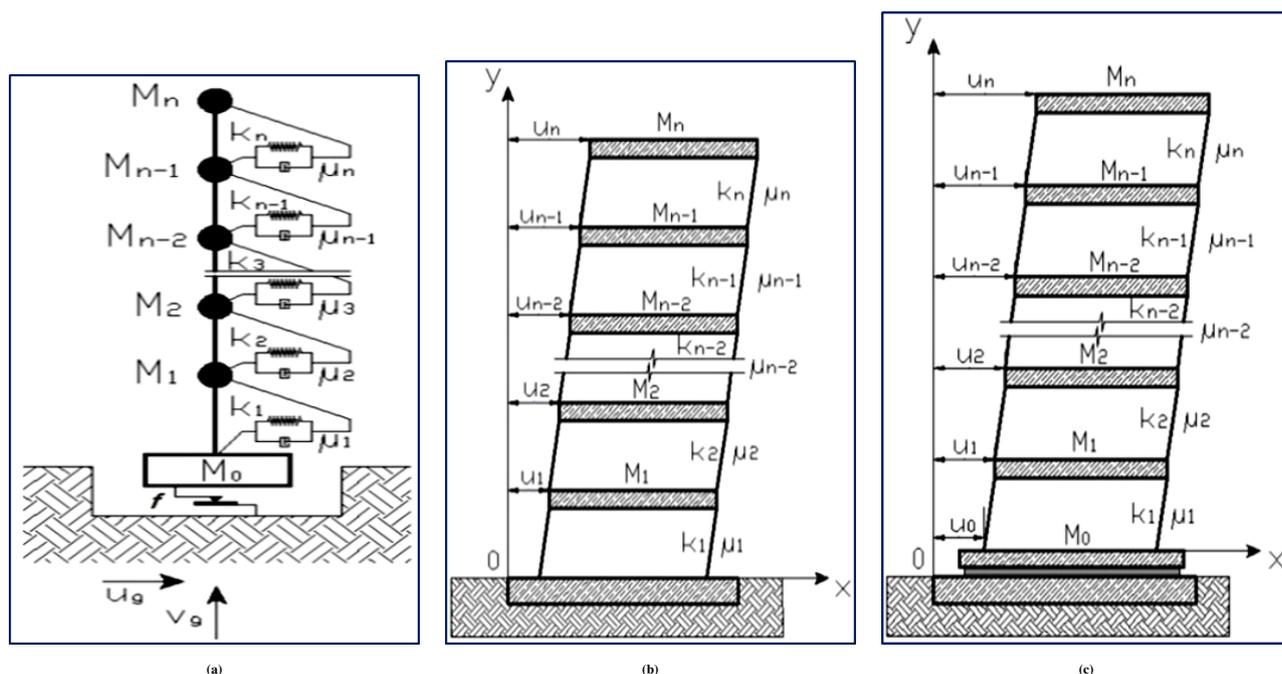


Рис. 1. Консольная расчетная схема в виде упругого стержня с сосредоточенными массами (а), расчетная схема многоэтажного здания в плоскости с жестким защемлением основания (б) и с сейсмоизоляцией (с)

$$F_0 = F_{fr}, \text{ при скольжении,} \quad (1.3)$$

где  $u_0$  — горизонтальное перемещение ростверка,  $u_g$  — перемещение фундамента,  $u_r$  — величина сдвига в момент времени в начале текущего совместного движения без скольжения нижней части фундамента и движения ростверка, т.е. разность между значениями перемещений нижней части фундамента и ростверка (в начальный момент времени  $u_r = 0$ ),  $F_0$  — неизвестное значение силы сцепления между верхним и нижним фундаментами;

$$F_{fr} = \text{sign}(\dot{u}_g - \dot{u}_0) \cdot f \cdot P. \quad (1.4)$$

$F_{fr}$  — значение силы сухого трения,  $f$  — коэффициент сухого трения;  $P$  — вес здания. Если сухое трение скольжения осуществляется на основе материала фторопласта-4, то  $f = 0.05$ . При совместном движении перемещение  $u_0$  определяется по равенству (1.2) и уравнение движения массы  $M_1$  имеет вид [4],[5]:

$$M_1 \ddot{u}_1 + k u_1 + c_1 \dot{u}_1 - k_2(u_2 - u_1) - c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) = k_1 u_0 + c_1 \dot{u}_0 \quad (1.5)$$

В этом случае  $Q_1 = k_1 u_0 + c_1 \dot{u}_0$ , остальные элементы вектора  $\{Q\}$ , соответствующие горизонтальным перемещениям сосредоточенных масс, равны нулю.

Скольжение с сухим трением наступает только тогда, когда выполняется условие (1.3). В этом случае демпферная сила имеет вид  $F_{dm} = k_0 u_r + c_0 \dot{u}_r$ . Рассматриваемая задача (1.1), (1.2), (1.3) является нелинейной задачей, при этом отсутствуют условия вычисления неизвестной функции  $F_0$ , а также во время динамического процесса изменяются размерности матриц  $[M]$  и  $[K]$ . При скольжении имеет место уравнение для массы  $[M_0]$  [4, 5]:

$$M_0 \ddot{u}_0 + k_0 u_0 - k_1(u_1 - u_0) + c_0 \dot{u}_0 - c_1(\dot{u}_1 - \dot{u}_0) = F_{fr} + k_0 u_g + c_0 \dot{u}_g, \quad (1.6)$$

где  $Q_0 = F_{fr} + k_0 u_g + c_0 \dot{u}_g$ ;  $k_0$ ,  $c_0$  — жесткость и вязкость резинометаллического изолятора, дополнительно размещенного между фундаментом и ростверком. Для решения задачи в целом воспользуемся следующим алгоритмом. На каждом шаге по времени решаем задачи в трех постановках:

1. Уравнение (1.1) решаем с условием (1.2);

2. Уравнение (1.1) решаем с условием (1.3), при  $F_0 = f \cdot P$ ;

3. Уравнение (1.1) решаем с условием (1.3), при  $F_0 = -f \cdot P$ .

При этом матрицы  $[M]$  и  $[K]$  в первой постановке имеют размер  $m \times m$  (здесь  $m$  количество этажей здания), а во второй и третьей постановках  $(m + 1) \times (m + 1)$ . Выбор действительного решения из этих трех решений осуществляется следующим образом. Если относительные скорости  $\dot{u}_g - \dot{u}_0$  во втором и третьем условиях задачи имеют разные знаки, правильное решение является решением задачи в первом условии, поскольку сила сухого трения приводит фундамент в движение в разных направлениях, и поэтому неизвестная сила меньше порогового значения силы сухого трения, то есть скольжения нет. Если относительные скорости во втором и третьем условиях задачи имеют одинаковый знак, то решение при условии наименьшего абсолютного значения относительной скорости является действительным, так как сила сухого трения всегда направлена против относительного движения. Все три задачи решаются методом Ньюмарка [4, 5].

### 1.1. Результат.

Проанализируем результаты вычислений с помощью следующих примеров. Даны характеристики 9-этажного здания, а также действительные сейсмографические записи следующих землетрясений. Приближенное сопоставление расчетов проведено с использованием результатов воздействия 4 типов землетрясений:

- №1. Абхарское землетрясение (Иран 20.06.1990) 8 баллов по шкале MSK-64: ускорение – 1.93 м/с<sup>2</sup>; скорость – 0.19 м/с; перемещение – 0.0641 м, продолжительность – 36 сек.
- №2. Газлинское землетрясение (Узбекистан 17.05.1978) более 9 баллов по шкале MSK-64: ускорение – 7.22 м/с<sup>2</sup>; скорость – 0.62 м/с; перемещение – 0.18 м; продолжительность – 28 сек.
- №3. Землетрясение Duzce (Турция 17.08.1999) магнитудой 9 по шкале MSK-64: ускорение – 3.66 м/с<sup>2</sup>, скорость – 0.45 м/с; перемещение – 0.1065 м, продолжительность – 36 сек.
- №4. Табасское (Иран) землетрясение 16.09.1978 баллов выше 9 по шкале MSK-64: ускорение – 10.17 м/с<sup>2</sup>; скорость – 0.88 м/с; перемещение – 0.3446 м; продолжительность – 78.398 сек.

**Таблица 1. Землетрясение №1**

| Этаж | Без скольжения<br>$q_{\max}$ (кН) | При скольжении $f = 0.05$<br>и числе резинометаллических демпферов $q_{1 \max}$ (кН) |       |       |       |       |      |
|------|-----------------------------------|--|-------|-------|-------|-------|------|
|      |                                   | 27 та  | 23 та | 19 та | 15 та | 9 та  | 0 та |
| 1    | 13200                             | 11400  | 13000 | 12200 | 14300 | 13100 | 2350 |
| 2    | 11700                             | 12800  | 14100 | 11200 | 13700 | 14200 | 2680 |
| 3    | 10700                             | 11600  | 12500 | 10900 | 13800 | 13600 | 2910 |
| 4    | 9510                              | 12200  | 13300 | 11400 | 13100 | 12900 | 3000 |
| 5    | 8140                              | 12600  | 14000 | 11400 | 13600 | 12200 | 2900 |
| 6    | 6640                              | 11700  | 11600 | 11800 | 13300 | 11700 | 2650 |
| 7    | 5040                              | 11800  | 11700 | 12600 | 12000 | 11600 | 2310 |
| 8    | 3350                              | 11000  | 10800 | 11800 | 13000 | 11300 | 1710 |
| 9    | 1600                              | 7050   | 6850  | 7150  | 8960  | 7560  | 876  |

Существующие записи сильных землетрясений взяты из европейской базы данных [6].

Девятиэтажное здание серии 76-017СП/53 имеет следующие характеристики: крупнопанельное здание размером

Таблица 2. Землетрясение №2

| Этаж | Без скольжения<br>$q_{\max}$ (кН) | При скольжении $f = 0.05$<br>и числе резинометаллических демпферов $q_{1 \max}$ (кН) |       |       |       |       |       |
|------|-----------------------------------|--|-------|-------|-------|-------|-------|
|      |                                   | 27 та  | 23 та | 19 та | 15 та | 9 та  | 0 та  |
| 1    | 68100                             | 14800  | 15900 | 20300 | 18400 | 16100 | 12300 |
| 2    | 61000                             | 11300  | 13000 | 12100 | 11500 | 13800 | 11000 |
| 3    | 56300                             | 12100  | 12700 | 13400 | 12100 | 13900 | 10400 |
| 4    | 50700                             | 12200  | 14700 | 15300 | 11200 | 13500 | 10200 |
| 5    | 44000                             | 11300  | 13900 | 15300 | 10600 | 14000 | 10000 |
| 6    | 36400                             | 12200  | 13000 | 13400 | 12300 | 14700 | 9800  |
| 7    | 28700                             | 12800  | 13400 | 12400 | 13000 | 12900 | 9200  |
| 8    | 19800                             | 10400  | 13200 | 12500 | 11300 | 12800 | 7150  |
| 9    | 9640                              | 6760   | 8390  | 7560  | 7410  | 8020  | 6400  |

Таблица 3. Землетрясение №3

| Этаж | Без скольжения<br>$q_{\max}$ (кН) | При скольжении $f = 0.05$<br>и числе резинометаллических демпферов $q_{1 \max}$ (кН) |       |       |       |       |      |
|------|-----------------------------------|--|-------|-------|-------|-------|------|
|      |                                   | 27   | 23    | 19    | 15    | 9     | 0    |
| 1    | 19400                             | 15700  | 13900 | 15200 | 14600 | 15700 | 2210 |
| 2    | 18100                             | 11300  | 9470  | 10000 | 11600 | 11300 | 2450 |
| 3    | 16500                             | 11900  | 9310  | 12000 | 9890  | 11900 | 2670 |
| 4    | 14600                             | 11400  | 8500  | 10900 | 8900  | 11400 | 2850 |
| 5    | 12500                             | 10800  | 8380  | 10700 | 9280  | 10800 | 2950 |
| 6    | 10200                             | 11500  | 7450  | 11600 | 10500 | 11500 | 2890 |
| 7    | 7770                              | 9600   | 7330  | 10100 | 10700 | 14900 | 2580 |
| 8    | 5150                              | 9070   | 8620  | 10000 | 9990  | 15000 | 1950 |
| 9    | 2460                              | 5740   | 5470  | 7020  | 5980  | 9310  | 1000 |

в плане  $291.6 \text{ м}^2$ ; сосредоточенные массы в уровнях верхней части фундамента и этажей  $M_0 = 449000 \text{ кг}$ ,  $M_1 = 379500 \text{ кг}$ ,  $M_2 = 379500 \text{ кг}$ ,  $M_3 = 379500 \text{ кг}$ ,  $M_4 = 379500 \text{ кг}$ ,  $M_5 = 379500 \text{ кг}$ ,  $M_6 = 379500 \text{ кг}$ ,  $M_7 = 379500 \text{ кг}$ ,  $M_8 = 379500 \text{ кг}$ ,  $M_9 = 341000 \text{ кг}$ , при этом общий вес здания, давящий на нижнюю часть фундамента, равен  $P = 37494800 \text{ Н}$ ; сдвиговые жесткости по этажам одинаковы  $k = 32.357 \cdot 10^9 \text{ Н/м}$ ; вязкость материала здания по этажам одинакова  $\mu_i = 10.58 \cdot 10^6 \text{ Нс/м}$ . Значения частот собственных колебаний с жесткой заделкой фундамента:  $\omega_1 = 79 \text{ Гц}$ ,  $\omega_2 = 160 \text{ Гц}$ ,  $\omega_3 = 239 \text{ Гц}$ ,  $\omega_4 = 314 \text{ Гц}$ ,  $\omega_5 = 380 \text{ Гц}$ . Для защиты рассматриваемого 9 этажного здания от сейсмических волн, наряду с сухим трением, мы используем 27 резинометаллических демпферов. Демпферы производства компании FIR. Жесткость одного демпфера в серии SI-S 600/152 равна  $k_0 = 0.74 \cdot 10^6 \text{ Н/м}$  [2]. Проанализируем результаты, уменьшив количество демпферов соответственно до 27 ( $k_0 = 19.98 \cdot 10^6 \text{ Н/м}$ ), 23 ( $k_0 = 17.02 \cdot 10^6 \text{ Н/м}$ ), 19 ( $k_0 = 14.06 \cdot 10^6 \text{ Н/м}$ ), 15 ( $k_0 = 11.1 \cdot 10^6 \text{ Н/м}$ ) и 9 ( $k_0 = 6.66 \cdot 10^6 \text{ Н/м}$ ), а

Таблица 4. Землетрясение №4

| Этаж | Без скольжения<br>$q_{\max}$ (кН) | При скольжении $f = 0.05$<br>и числе резинометаллических демпферов $q_{1 \max}$ (кН) |       |       |       |       |       |
|------|-----------------------------------|--|-------|-------|-------|-------|-------|
|      |                                   | 27 та  | 23 та | 19 та | 15 та | 9 та  | 0 та  |
| 1    | 131000                            | 18700  | 14800 | 20900 | 19900 | 19300 | 21000 |
| 2    | 124000                            | 13600  | 12200 | 13100 | 15300 | 13400 | 12800 |
| 3    | 115000                            | 12700  | 13000 | 13300 | 14900 | 15200 | 14200 |
| 4    | 104000                            | 12500  | 12700 | 12900 | 13900 | 15500 | 14300 |
| 5    | 90800                             | 13200  | 13600 | 13000 | 13200 | 15300 | 12600 |
| 6    | 74900                             | 11700  | 15200 | 13500 | 12500 | 15100 | 13200 |
| 7    | 57200                             | 11300  | 15200 | 15400 | 14100 | 16400 | 13300 |
| 8    | 38200                             | 11300  | 12700 | 15400 | 15300 | 15000 | 13100 |
| 9    | 18300                             | 7510   | 7710  | 10000 | 10000 | 9380  | 8180  |

также рассчитаем вариант без резинометаллического демпфера. При численном решении задач с сухим трением, не зависимо от выбора явной или неявной конечно-разностной схемы, шаг по времени необходимо подбирать для обеспечения достаточной точности. В наших примерах расч етов шаг по времени был равен 0.0001.

## Заключение.

В данной исследовательской работе на основе различных записей реальных сейсмических волн показано, что сейсмическая изоляция с совместным использованием сухого трения и резинометаллических изоляторов в 6 раз менее эффективна, чем сейсмическая изоляция только с сухим трением (табл. 1-4). Использование демпферов компании FIP для сейсмоизоляции зданий обходится дорого. Использование фторопласта, материала, обеспечивающего скольжение, значительно дешевле, чем демпферы.

## Список литературы

- [1] Hiroki, A., Kotaro, K., Kohei, F., Izuru, T.: *Critical Response of Nonlinear Base-Isolated Building Considering Soil-Structure Interaction Under Double Impulse as Substitute for Near-Fault Ground Motion*. Front. Built Environ. **4**, 1-13 (2018).
- [2] FIP Industriale: *Резинометаллические Изоляторы серии SI S02*. (2014).
- [3] *Curved Surface Sliders*. Homepage. Available at: <https://docplayer.net/133188454-Curved-surface-sliders.html>.
- [4] Mirzaev, I., Turdiev, M. S.: *Vibrations of buildings with a sliding foundation having lateral yielding contact under real seismic impacts*. AIP Conf. Proc. **2432**, 030050, 1-6 (2022).
- [5] Мирзаев, И., Турдиев, М. С.: *Колебания зданий с подвижным фундаментом при реальных сейсмических воздействиях разного спектра частот*. Transportda resurs tejamkor texnologiyalar, 502-506 (2023).
- [6] Ambraseys, N. N., et al.: *Internet site for European strong-motion data*. Boll. Geof. Teor. Appl. **45** (3), 113-129 (2004). Available at: [http://www.isesd.hi.is/ESD\\_local/frameset.htm](http://www.isesd.hi.is/ESD_local/frameset.htm).
- [7] Roozbahan, M., Masnata, Ch., Turan, G. and Pirrotta, A.: *Efficiency evaluation of optimal TLCD and TMD for the seismic response reduction of buildings considering soil structure interaction effect*. Meccanica. **11012-025-01981-9** (2025). Available at: <https://doi.org/10.1007/s11012-025-01981-9>.
- [8] Lin, T. W. and Hone, Ch. Ch.: *Base Isolation by Free Rolling Rods Under Basement*. Earthquake engineering and structural dynamics **22**, 261-273 (1993). Available at: <https://doi.org/10.1002/eqe.4290220502>.
- [9] Wang, S. J., Hwang, J. S., Chang, K. C., Shiau, C. Y., Lin, W. C., Tsai, M. S., Hong, J. X. and Yang, Y. H.: *Sloped multi-roller isolation devices for seismic protection of equipment and facilities*. Earthquake Engineering Structural Dynamics **43**(10), 1443-1461 (2014). Available at: <https://doi.org/10.1002/eqe.2404>.

- [10] Nizomov, D. N. and Sanginov, A. M.: *Simulation of the interaction of the structure with the foundation under seismic impacts*. Bulletin of Science and Research Center of Construction **3**(38), 143–154 (2023). Available at: <https://doi.org/10.37153/2618-9283-2023-1-29-37>.
- [11] Cilsalar, H. and Constantinou, M. C.: *Development and Validation of a Seismic Isolation System for Lightweight Residential Construction*. Technical Report MCEER-19-0001, 566 p (2019).

## Protection of Buildings From Seismic Waves Using Dry Fracture and Dempfers

Mirzayev I., Turdiyev M.S. and Raxmatov N.B.

### Abstract

**In this research work, the problem of seismic isolation of a nine-story building under the influence of 4 different real seismic waves through the joint use of dry friction isolators and rubber-metal dampers is considered. The influence of seismic waves on the magnitude of the shear force in the building as a result of their increase and decrease was studied.**

### Keywords

**dry friction; seismic isolation; rubber-metal damper.**

### Affiliations

Mirzayev I.

**Address:** Doctor of physical and mathematical sciences, Professor, Professor of the Department of Applied Mechanics, Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan.

**e-mail:** [ibrakhim.mir@mail.ru](mailto:ibrakhim.mir@mail.ru)

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0002-8616-9717>

Turdiyev M.S.

**Address:** Associate Professor of the Department of Applied Mechanics, Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan.

**e-mail:** [malikjon.ts@mail.ru](mailto:malikjon.ts@mail.ru)

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0002-2499-0243>

Raxmatov N.B.

**Address:** Assistant of the Department of Differential Equations and Mathematical Physics, National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan.

**e-mail:** [nodirbekrakhmatov0@gmail.com](mailto:nodirbekrakhmatov0@gmail.com)

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0000-0000-0000>

# Analysis of the dynamics of quadratic mappings of a simplex with skew-symmetric matrices that are not in general position

D.B.Eshmamatova \* A.A.Alimov and M.A.Tadzhieva

## ABSTRACT

The Lotka – Volterra systems arise in questions of biology, population genetics, epidemiology, ecology, economics as well as in some branches of theoretical physics, in particular, in solid state physics. Some important questions of ecology (for example, biogens cycles) can be studied using Lotka – Volterra mappings operating in a four-dimensional simplex with homogeneous tournaments. In this regard, the work is devoted to the construction and study of cards of fixed points of Lotka – Volterra mappings operating in a four-dimensional simplex in the case of homogeneous tournaments (for arbitrary coefficients of a skew-symmetric matrix). The card of fixed points gives us a more detailed understanding of the asymptotic behavior of the trajectories of discrete dynamical Lotka – Volterra systems. In the paper, we show that even if the tournaments corresponding to the Lotka – Volterra mappings are homogeneous, among them it is possible to distinguish a class of mappings with skew-symmetric matrices that are not matrices in a general position. It is not possible to generalize this kind of mappings; each of them represents a map of fixed points of a different type. This is clearly noted in the work. It is also shown that even in the case when the tournament corresponding to the Lotka – Volterra mapping is homogeneous, the set of fixed points is infinite and the card of fixed points consists of a convex hull of fixed points belonging to strong faces.

*Keywords:* fixed point; homogeneous tournament; quadratic Lotka – Volterra mapping; simplex.

*AMS Subject Classification (2020):* Primary: 37B25 ; Secondary: 37C25; 37C27.

## 1. Introduction

One of the main problems in mathematical biology, epidemiology and ecology is the study of the asymptotic behavior of the trajectories of dynamical systems. The works [1-4] are devoted to the study of continuous dynamical systems and the asymptotic behavior of their trajectories. The proposed work is devoted to the analysis of the trajectories of interior points of quadratic Lotka – Volterra mappings operating in a four-dimensional simplex that are not in a general position. Before presenting the main results, let us start with preliminary information and a review of the literature.

Let

$$S^{m-1} = \{x \in \mathbb{R}^m : x = (x_1, \dots, x_m) : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^m x_i = 1\}$$

the standard simplex in  $\mathbb{R}^m$  and  $A = (a_{ki}), k, i = \overline{1, m}$  – is a skew-symmetric matrix with conditions  $|a_{ki}| \leq 1$ .

The mapping  $V : S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$  defined by equality

$$V : x'_k = x_k \left( 1 + \sum_{i=1}^m a_{ki} x_i \right), \quad k = \overline{1, m}, \quad (1.1)$$

is called the discrete Lotka – Volterra operator. Mappings of the form (1.1) arise in problems of population genetics that describe the evolution of a certain population over time, and time is considered discrete [5].

Each Lotka – Volterra operator and its corresponding skew-symmetric matrix are associated with a complete oriented tournament graph [6], [7] and a partially oriented graph [8].

A complete directed graph – tournament is constructed if the skew-symmetric matrix is in the general position [6]. To build a tournament, let us take  $m$  points numbered  $1, 2, \dots, m$  on the plane and connect the point with the number  $k$  to the point with the number  $i$  with an arc directed from  $k$  to  $i$  if  $a_{ki} < 0$  and in the opposite direction if  $a_{ki} > 0$ .

So, the graph constructed in this way is called a tournament corresponding to the Lotka – Volterra operator and we denote it by  $T_m$ .

A tournament is called strong if there is a path from any vertex to any other according to the orientation (direction of the arc).

A tournament that does not have strong subtournaments is called a transitive.

**Definition 1.1.** [9] A tournament is called homogeneous if any of its sub-tournaments is either strong or transitive.

**Theorem 1.2.**  $A$  is a skew-symmetric matrix, then the sets

$$P = \{x \in S^{m-1} : Ax \geq 0\} \quad \text{and} \quad Q = \{x \in S^{m-1} : Ax \leq 0\}$$

non-empty convex polyhedra.

**Theorem 1.3.** If  $A$  is a generic skew-symmetric matrix, then the set  $P$  (respectively  $Q$ ) consists of a single point.

## 2. The card of fixed points of the operator $V$

Let us recall the concept of a card of fixed points for a dynamic system (1.1) [9], [10]:

Let  $\alpha \subset I = \{1, \dots, 5\}$ . We represent the set of all fixed points  $\{x \in S^4 : Vx = x\}$  of the operator  $V$  as points on the plane, then for each  $\alpha \subset I$  the fixed point  $Q_\alpha$  is connected by an arc to a fixed point  $P_\alpha$  directed from  $P_\alpha$  to  $Q_\alpha$ . The resulting directed graph is called the card of fixed points of the operator  $V$  we denote it by  $G_V$ .

It is known [11], [12] that for  $m = 5$ , only the next four tournaments are homogeneous. These are the tournaments shown in Figure 1.

In case a), the tournament is transitive. If the tournament is transitive, then any trajectory of the Lotka – Volterra mapping converges to one of the vertices of the simplex [10]. This means that the fixed point card  $G_V$  coincides with the tournament itself  $T_5$ . In the case of transitivity, the operator has no fixed points except the vertices of the simplex [12]. Next, we mark the vertices of the tournaments with the numbers  $1, 2, 3, 4, 5$  from top to bottom, and the substructure with vertices, for example,  $1, 2, 5$ , is denoted by  $\overline{125}$ .

**Definition 2.1.**[11] A skew-symmetric matrix  $A = (a_{ki})$  is called a general position matrix if all major minors of even order are nonzero.

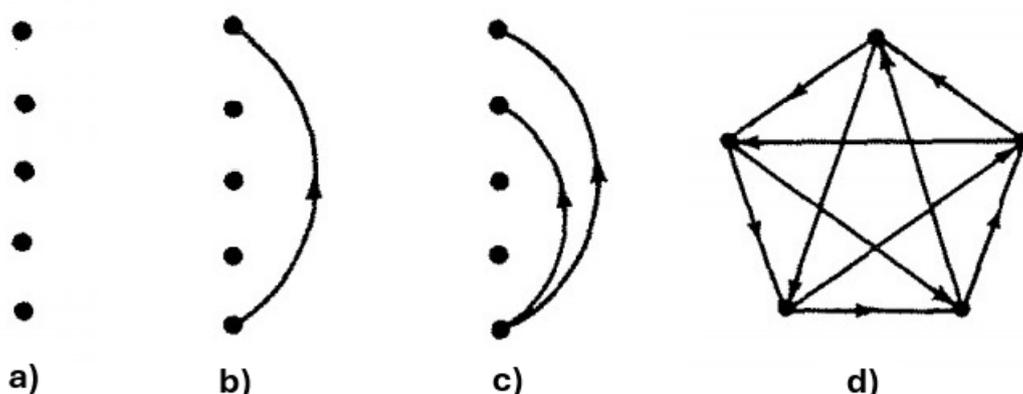


Figure 1. Homogeneous tournament.

If the skew-symmetric matrix of general position, then the corresponding Lotka – Volterra mapping  $V$  with coefficients  $a_{ki}$  is also a general position operator. The task assigned to us is to study quadratic Lotka – Volterra mappings operating in a four-dimensional simplex that are not in a general position. That is, we show that even if the tournament corresponding to the skew-symmetric matrix is homogeneous, but the matrix itself and, accordingly, the operator may not be in the general position. Since the skew-symmetric matrix of the system is not a matrix of general position, i.e. all major minors of the fourth order (there are only five of them in this case) are zero. Fixed point cards have been constructed and studied for such mappings, since the structure of fixed point cards gives a detailed idea of the asymptotic behavior of the trajectories of interior points of discrete Lotka – Volterra dynamical systems.

In [12], [13] it is proved that skew-symmetric matrices of general position form an open and everywhere dense subset in the set of all skew-symmetric matrices.

For example, the mapping of Lotka-Volterra  $V : S^3 \rightarrow S^3$  has the form:

$$\begin{cases} x'_1 = x_1(1 + a_{12}x_2 - a_{13}x_3 + a_{14}x_4), \\ x'_2 = x_2(1 - a_{12}x_1 + a_{23}x_3 - a_{24}x_4), \\ x'_3 = x_3(1 + a_{13}x_1 - a_{23}x_2 + a_{34}x_4), \\ x'_4 = x_4(1 - a_{14}x_1 + a_{24}x_2 - a_{34}x_3), \end{cases}$$

where  $a_{ki} \in [-1; 1]$ ,  $k, i = \overline{1, 4}$

This operator is a general position operator if and only if the coefficients  $a_{ki} \in [-1; 1]$ ,  $k, i = \overline{1, 4}$  satisfy the following conditions:

$$a_{ki} \neq 0, k, i = \overline{1, 4} \text{ and } a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23} \neq 0.$$

Fixed point cards for the Lotka – Volterra operators were first introduced in [5] and it also introduced the concept of a homogeneous card for Lotka – Volterra mappings. Many other useful properties of the fixed point card are given in [12], [13]. But these papers do not consider in detail the cases when the skew-symmetric matrix corresponding to the Lotka – Volterra mapping is not in the general position. Our goal is to consider these cases in more detail, since these mappings can serve as a discrete model of the biogen cycle in an ecosystem. In [14], the Lotka – Volterra mapping is investigated, acting in a four-dimensional simplex as a discrete model of the phosphorus and carbon cycle, depending on the nature of the card of fixed points of this

mapping. Here we show that among those operators there can also be those that are not in general position and the set of their fixed points is an infinite set. Let us go over each case in detail.

### 3. Main results

a) Consider the Lotka – Volterra operator acting in

$$S^4 = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5, x_i \geq 0, \sum_{i=1}^5 x_i = 1\},$$

with the corresponding transitive tournament  $T_5$ .

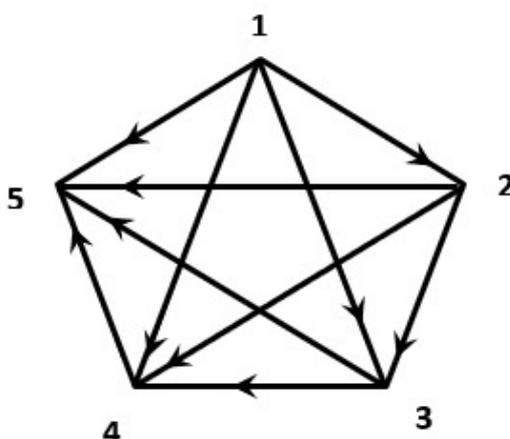


Figure 2. Transitive tournament.

The skew-symmetric matrix corresponding to this operator has the form:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} & -a_{15} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & -a_{24} & -a_{25} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & -a_{34} & -a_{35} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & 0 & -a_{45} \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & 0 \end{pmatrix}$$

where  $|a_{ki}| \leq 1$ .

It is easy to see from the classical algebra course that there are only five major minors of the fourth order for this matrix.

$$A_1^{11} = \begin{pmatrix} 0 & -a_{23} & -a_{24} & -a_{25} \\ a_{23} & 0 & -a_{34} & -a_{35} \\ a_{24} & a_{34} & 0 & -a_{45} \\ a_{25} & a_{35} & a_{45} & 0 \end{pmatrix}$$

The determinant of the skew-symmetric matrix  $A_1^{11}$  is equal to the following expression:

$$A_1^{11} = \begin{vmatrix} 0 & -a_{23} & -a_{24} & -a_{25} \\ a_{23} & 0 & -a_{34} & -a_{35} \\ a_{24} & a_{34} & 0 & -a_{45} \\ a_{25} & a_{35} & a_{45} & 0 \end{vmatrix} = (a_{23}a_{45} - a_{24}a_{35} + a_{25}a_{34})^2.$$

Similarly, we can calculate the values of the remaining fourth-order minors:

$$A_2^{22} = (a_{15}a_{34} - a_{14}a_{35} + a_{13}a_{45})^2,$$

$$A_3^{33} = (a_{15}a_{24} - a_{14}a_{25} + a_{12}a_{45})^2,$$

$$A_4^{44} = (a_{15}a_{23} - a_{13}a_{25} + a_{12}a_{35})^2,$$

$$A_5^{55} = (a_{14}a_{23} - a_{13}a_{24} + a_{12}a_{34})^2.$$

Now we can select the elements of the skew-symmetric matrix so that the values of these minors are zero,

$$a_{12} = a_{13} = a_{14} = a_{15} = a_{23} = a_{34} = a_{45} = \frac{1}{3}, \quad a_{24} = a_{35} = \frac{2}{3}, \quad a_{25} = 1$$

i.e.

$$A_1^{11} = (a_{23}a_{45} - a_{24}a_{35} + a_{25}a_{34})^2 = (1 - 4 + 3)^2 = 0$$

$$A_2^{22} = (a_{15}a_{34} - a_{14}a_{35} + a_{13}a_{45})^2 = (1 - 2 + 1)^2 = 0,$$

$$A_3^{33} = (a_{15}a_{24} - a_{14}a_{25} + a_{12}a_{45})^2 = (2 - 3 + 1)^2 = 0,$$

$$A_4^{44} = (a_{15}a_{23} - a_{13}a_{25} + a_{12}a_{35})^2 = (1 - 3 + 2)^2 = 0,$$

$$A_5^{55} = (a_{14}a_{23} - a_{13}a_{24} + a_{12}a_{34})^2 = (1 - 2 + 1)^2 = 0.$$

The picture is clear here, since the tournament is transitive, the card of fixed points completely coincides with it.

The tournament shown in Figure is strong and in its expanded form looks as shown in Figure 3.

From the Figure 3 we see that  $T_5$  has three cyclic triples  $\overline{125}$ ,  $\overline{135}$ ,  $\overline{145}$ , i.e. three strong substructures with three vertices. It is known [1], [2] that if a tournament with three vertices is strong, then the mapping corresponding to this tournament has a fixed point inside the simplex, unlike its vertices. Below we will find the coordinates of these points.

The skew-symmetric matrix corresponding to this strong tournament has the form:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} & a_{15} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & -a_{24} & -a_{25} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & -a_{34} & -a_{35} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & 0 & -a_{45} \\ -a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & 0 \end{pmatrix}$$

In [1], the same operator was investigated when it is in a general position and it is proposed as a discrete model of the carbon and phosphorus cycle in an ecosystem, depending on the type of fixed point map. But as it turned out, for this operator, too, the elements of the skew-symmetric matrix can be selected so that all major minors of the fourth order are equal to zero,

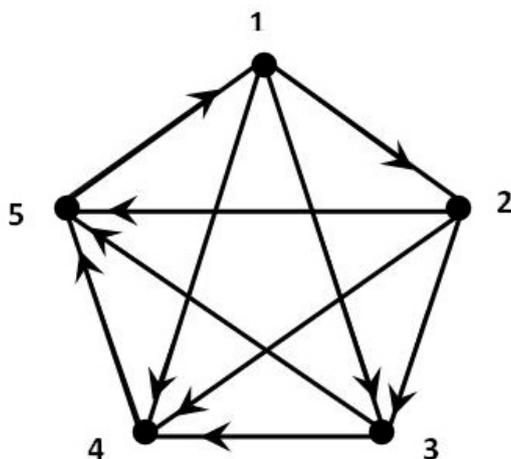


Figure 3. Strong tournament.

$$a_{14} = a_{15} = a_{23} = a_{25} = a_{34} = a_{35} = a_{45} = \frac{1}{3}, \quad a_{13} = a_{24} = \frac{2}{3}, \quad a_{12} = 1$$

$$A_1^{11} = (a_{23}a_{45} - a_{24}a_{35} + a_{25}a_{34})^2 = (1 - 2 + 1)^2 = 0$$

$$A_2^{22} = (a_{14}a_{35} - a_{13}a_{45} + a_{15}a_{34})^2 = (1 - 2 + 1)^2 = 0,$$

$$A_3^{33} = (a_{14}a_{25} - a_{12}a_{45} + a_{15}a_{24})^2 = (1 - 3 + 2)^2 = 0,$$

$$A_4^{44} = (a_{13}a_{25} - a_{12}a_{35} + a_{15}a_{23})^2 = (2 - 3 + 1)^2 = 0,$$

$$A_5^{55} = (a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23})^2 = (1 - 4 + 3)^2 = 0.$$

The mapping in this case looks like

$$\begin{cases} x'_1 = x_1(1 - x_2 - \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5), \\ x'_2 = x_2(1 + x_1 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5), \\ x'_3 = x_3(1 + \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5), \\ x'_4 = x_4(1 + \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_5), \\ x'_5 = x_5(1 - \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4). \end{cases} \quad (3.1)$$

and it is not in the general position, since all major minors of the fourth order are zero and the card of fixed points for this operator has the form shown in Figure 4.

The card of fixed points has the form of an undirected graph, which means that the set of fixed points is infinite and consists of a convex hull of three fixed points that belong to the strong faces of the simplex  $\Gamma_{125}, \Gamma_{135}, \Gamma_{145}$ . Now, in order to investigate the characters of fixed points belonging to the convex hull of fixed points belonging to strong faces, we first find their coordinates explicitly by solving the equation  $Vx = x$ , according to [10]:

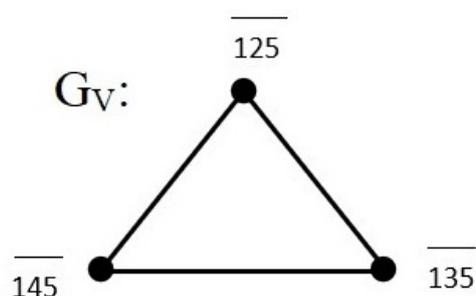


Figure 4. The card of fixed point for homogeneous tournament.

$$M_1 \left( \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, 0, 0, \frac{3}{5} \right), \quad M_2 \left( \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{2} \right), \quad M_3 \left( \frac{1}{3}, 0, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

Now let us take their convex hull:

$$M_1 \left( \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, 0, 0, \frac{3}{5} \right) | \alpha$$

$$M_2 \left( \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{2} \right) | \beta$$

$$M_3 \left( \frac{1}{3}, 0, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) | \gamma$$

For the considered mapping, an arbitrary fixed point belonging to this shell has coordinates of the form:

$$M \left( \frac{1}{5}\alpha + \frac{1}{4}\beta + \frac{1}{3}\gamma; \frac{1}{5}\alpha; \frac{1}{4}\beta; \frac{1}{3}\gamma; \frac{3}{5}\alpha + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{3}\gamma \right), \quad 0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 1$$

Let  $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{3}$ , then the fixed point has the form  $M \left( \frac{47}{180}, \frac{1}{15}, \frac{1}{12}, \frac{1}{9}, \frac{43}{90} \right)$ .

Now we calculate the eigenvalues for this fixed point, i.e. we analyze the spectrum of the Jacobian at this point and get the following:

$$\lambda_1 = \frac{1}{90} (90 + i\sqrt{510})$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{90} (90 - i\sqrt{510})$$

$$\lambda_3 = 1, \quad \lambda_4 = 1, \quad \lambda_5 = 1.$$

It is easy to see that the modulo eigenvalues are greater than one. This means that the entire convex hull consists of repulsive fixed points. The definitions describing the characters of fixed points are given in [11], [12].

Now, let us move on to the third tournament from Figure 1 (see Figure 5).

This strong tournament, unlike the previous one, has four strong sub-tournaments, with three vertices - 135, 145, 235, 245. Each of these strong triples has one interior fixed point. Let us select the elements of the skew-symmetric matrix

$$a_{12} = a_{14} = a_{24} = a_{25} = a_{34} = a_{35} = a_{45} = 1, \quad a_{15} = a_{23} = 2, \quad a_{13} = 3$$

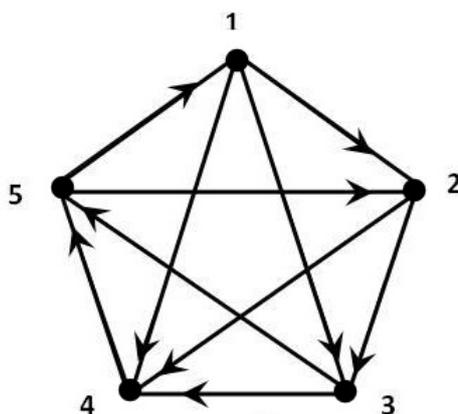


Figure 5. The homogeneous tournament.

and then

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

we get the minors equal to zero, i.e.

$$A_1^{11} = (a_{24}a_{35} - a_{23}a_{45} + a_{25}a_{34})^2 = (1 - 2 + 1)^2 = 0$$

$$A_2^{22} = (a_{14}a_{35} - a_{13}a_{45} + a_{15}a_{34})^2 = (1 - 3 + 2)^2 = 0,$$

$$A_3^{33} = (a_{12}a_{45} - a_{15}a_{24} + a_{14}a_{25})^2 = (1 - 2 + 1)^2 = 0,$$

$$A_4^{44} = (a_{12}a_{35} - a_{15}a_{23} + a_{13}a_{25})^2 = (1 - 4 + 3)^2 = 0,$$

$$A_5^{55} = (a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23})^2 = (1 - 3 + 2)^2 = 0.$$

Since in this case there are four interior fixed points belonging to strong faces, the card of fixed points looks like a convex hull of them (see Figure 6).

Here, as in the previous case, we can explicitly calculate the coordinates of the vertices of the card and check the characters of the fixed points belonging to this card.

The last – fourth tournament has five strong sub-tournaments, which means that the card has interior fixed points belonging to the faces of the simplex  $\Gamma_{124}$ ,  $\Gamma_{134}$ ,  $\Gamma_{135}$ ,  $\Gamma_{235}$  and  $\Gamma_{245}$ . Here, you can also select the elements of a skew-symmetric matrix, so that all its fourth-order minors are equal to zero.

$$a_{12} = a_{13} = a_{14} = a_{15} = a_{24} = a_{25} = a_{35} = 1, \quad a_{23} = a_{45} = 2, \quad a_{34} = 3$$

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

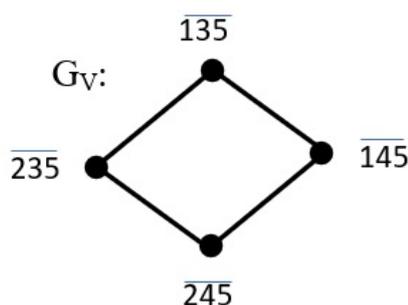


Figure 6. The card of fixed point for homogeneous tournament.

$$A_1^{11} = (a_{24}a_{35} - a_{23}a_{45} + a_{25}a_{34})^2 = (1 - 4 + 3)^2 = 0$$

$$A_2^{22} = (a_{13}a_{45} - a_{15}a_{34} + a_{14}a_{35})^2 = (1 + 2 - 3)^2 = 0,$$

$$A_3^{33} = (a_{14}a_{25} - a_{12}a_{45} + a_{15}a_{24})^2 = (1 - 2 + 1)^2 = 0,$$

$$A_4^{44} = (a_{12}a_{35} - a_{15}a_{23} + a_{13}a_{25})^2 = (1 - 2 + 1)^2 = 0,$$

$$A_5^{55} = (a_{13}a_{24} - a_{12}a_{34} + a_{14}a_{23})^2 = (1 - 3 + 2)^2 = 0.$$

The fixed points card of this operator has the form shown in Figure 7.

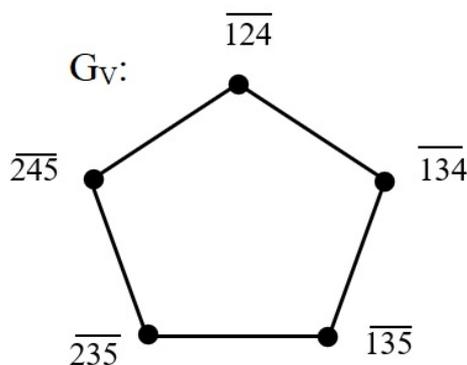


Figure 7. The card of fixed point for homogeneous tournament.

In conclusion, we have constructively proved the following theorem.

**Corollary 3.1.** Let give a discrete Lotka – Volterra mapping of the form (1.1). If all the major minors of the second order of the skew-symmetric matrix corresponding to this mapping are nonzero, then

– if all fourth-order minors are nonzero, then all eigenvalues of the skew-symmetric matrix are complex numbers and the kernel is zero,

$$\det A \neq 0, \quad \text{Ker } A = \{0\},$$

that is, the mapping is in the general position;

– if all the major minors of the fourth order are zero, then the core of the skew-symmetric matrix will be nonzero, i.e.  $\text{Ker}A \neq \{0\}$ . The equation  $Ax = 0$  has a solution and the eigenvalues of the skew-symmetric matrix are modulo greater than one, which means that the card of fixed points consists of repulsive fixed points.

## 4. Conclusion

The main result of this paper, in contrast to works [5], [11], [12], is the study of quadratic Lotka – Volterra mappings that are not mappings in general position. Mappings of this nature can be proposed as a discrete model to study the biogen cycle in the ecosystem [13]. In the paper, we analyze the cases where all the principal minors of even order are equal to zero, the set of fixed points is infinite, and the card of fixed points consists of the convex hull of fixed points belonging to strong faces. The main result of the work is Theorem 3, in which the kernel of a skew-symmetric matrix and its eigenvalues are analyzed. As a result, the nature of the fixed points of the considered mappings is determined. The cases considered in this paper can be used as a discrete model of the nitrogen cycle. We will consider the application in the next paper. In the paper we use elements of the graph theory in order to clearly see the dynamic picture of the considered mappings, since the use of elements of graph theory and the construction of cards of fixed points helps to visually build a picture in problems of ecology, epidemiology etc.

## Acknowledgements

We, the authors of the paper Analysis of the dynamics of quadratic mappings of a simplex with skew-symmetric matrices that are not in general position would like to thank the Tashkent State Transport University for the opportunity to publish our work.

## References

- [1] Brin, M. and Stuck, G. Introduction to Dynamical Systems. Cambridge University Press. (2004).
- [2] Cvetkovich, M. and Karapinar, E. and Rakocevic, V. Fixed point results for admissible  $Z$ -contractions. Fixed Point Theory.Math. — 19 — (2). — P. — 515-526. (2018).
- [3] O. Galor, Discrete dynamical systems. Springer. Berlin. — P. 153. (2007).
- [4] Murray J.D. Mathematical biology. Third Edition. Springer. p. 776. (2009).
- [5] Ganikhodzhaev R.N. Quadratic stochastic operators, Lyapunov function and tournaments, Acad. Sci. Sb. Math., 76(2), p. 489-506. (1993)
- [6] Harary F., Palmer E.M. Graphical enumeration. Academic Press New York and London. 1973.
- [7] G. Chartrand and H. Jordon and V. Vatter and P. Zhang. Graphs and Digraphs. CRC Press. p. 364. (2024)
- [8] Kh. Koh and F. Dong and E.G. Tay. Introduction to graph theory. World Scientific. p. 308. (2024)
- [9] Ganikhodzhaev R.N., Tadzhiyeva M.A. Stability of fixed points of discrete dynamic systems of Volterra type. AIP Conference Proceedings, 2021. V. 2365. P. 060005-1 – 060005-7. <https://doi.org/10.1063/5.0057979>. (Scopus. IF=0.7).
- [10] Ganikhodzhaev R.N., Tadzhiyeva M.A., Eshmatova D.B. Dynamical Properties of Quadratic Homeomorphisms of a Finite-Dimensional Simplex. Journal of Mathematical Sciences — 245 — (3). — P. — 398-402.
- [11] Ganikhodzhaev R.N., Eshmatova D.B. Quadratic automorphisms of a simplex and the asymptotic behavior of their trajectories. Vladikavkaz. Mat. Zh., 2006, Volume 8, Number 2, 12-28.
- [12] Eshmatova D.B., Ganikhodzhaev R.N. Tournaments of Volterra type transversal operators acting in the simplex  $S^{m-1}$ . AIP Conference Proceedings 2365, 060009 (2021). <https://doi.org/10.1063/5.0057303>.
- [13] Ganikhodzhaev R.N. A chart of fixed points and Lyapunov functions for a class of discrete dynamical systems, Math. Notes, 56 (5-6), (1994) pp.1125-1131.
- [14] D.B. Eshmatova and R.N. Ganikhodzhaev and M.A. Tadzhiyeva. Degenerate Cases in Lotka-Volterra Systems. AIP Conference Proceedings, 2024. V. 2781. <https://doi.org/10.1063/5.0057979>. (Scopus. IF=0.7).

## Affiliations

ESHMAMATOVA, D.B.

**ADDRESS:** Doctor of physical and mathematical sciences, head of the department of higher mathematics, Tashkent State Transport University, Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Senior Researcher. Tashkent, Uzbekistan.

**E-MAIL:** 24dil@mail.ru

**ORCID ID:** 0000-0002-1096-2751

ALIMOV A.A.

**ADDRESS:** Associate Professor, head of the department of higher mathematics, Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan.

**E-MAIL:** alimovakrom63@yandex.ru

**ORCID ID:** 0000-0002-3070-2674

TADZHIEVA M.A.

**ADDRESS:** PhD, head of the department of higher mathematics, Tashkent State Transport University, Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Senior Researcher. Tashkent, Uzbekistan.

**E-MAIL:** mohbonut@mail.ru

**ORCID ID:** 0000-0001-9232-3365



# Решение уравнения Монжа-Ампера с использованием геометрических преобразований

Абдуллаазиз Артикбаев, Гулноза Холмуродова \*

## Аннотация

Геометрическая задача восстановления выпуклой поверхности по заданной функции эквивалентна решению определенного уравнения Монжа-Ампера. В этом случае внешняя кривизна определяется как функция борелевских множеств. И. Я. Бакельман построил эту теорию и доказал существование и единственность решения уравнения Монжа-Ампера эллиптического типа в односвязной выпуклой области. А. Артыкбаев обобщил это решение на случай не односвязной области, применяя геометрию галилеева пространства. Данная работа посвящена аналитическому решению уравнения Монжа-Ампера в не односвязной области. Внешняя кривизна поверхности определяется в не односвязной области, ограниченной концентрическими окружностями. Применяя преобразование, представляющее собой движение галилеева пространства, и переход в полярную систему координат, уравнение модифицируется, в котором можно разделить переменные решения, уравнение ищется для суммы трех функций. В результате получен аналитический вид решения в не односвязной области, ограниченной концентрическими окружностями.

*Ключевые слова:* Галилеево движение; уравнение Монжа-Ампера; группа Гейзенберга; полная кривизна; полярная система координат.

*Предметная классификация AMS (2020):* Основная: 39A14; 39A70;

## 1. Введение

Уравнение Монжа–Ампера было впервые введено Г. Монжем и А. М. Ампером и широко применяется во многих областях науки [4,24]. В частности, оно встречается в анализе, геометрии, газовой динамике, метеорологии, экономике и задачах оптимального транспорта [11,13,20,22,25,26]. Проблемы существования и единственности задачи Дирихле для уравнения Монжа–Ампера были исследованы в следующих работах [16,18]. В экономике это уравнение связано с производственными функциями [13].

Известно, что задача восстановления выпуклой поверхности по её внешней кривизне в геометрии эквивалентна решению эллиптического типа уравнения Монжа–Ампера [10]. В геометрии задача восстановления выпуклой поверхности в евклидовом пространстве по её внешней кривизне была исследована А. Д. Александровым и А. В. Погореловым [1,2,27]. При этом внешняя кривизна множества, заданного на поверхности, определяется как площадь его сферического образа. В этом случае внешняя кривизна множества является неотрицательной, вполне аддитивной функцией, определённой на борелевских множествах. Когда выпуклая поверхность является регулярной, эта задача сводится к уравнению Монжа–Ампера.

Пусть уравнение Монжа–Ампера имеет вид

$$z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = \mu(x, y)R(p, q)$$

тогда существование решения задачи Дирихле в евклидовом пространстве было установлено И. Я. Бакельманом на основе априорной оценки функции в правой части уравнения [10].

Результаты, полученные в вышеуказанных работах, справедливы при условии выпуклости области. В случае невыпуклой области задачи восстановления поверхности были исследованы А. Артикбаевым [8]. При этом используется геометрия неевклидовых пространств, понятие сферического отображения обобщается для неевклидовых пространств, и вводится понятие цилиндрического отображения поверхности. В частности, задачи восстановления поверхности по её внешней кривизне в галилеевых и изотропных пространствах приведены в работе [8]. Эквивалентность задач восстановления поверхности в изотропном пространстве по её внешней и полной кривизне, а также то, что эти задачи являются частными случаями уравнения Монжа–Ампера, была показана Ш. Исмаиловым [17].

В последние годы задачи восстановления поверхности по её полной кривизне получили широкое развитие. В частности, изучение этих задач в неевклидовых пространствах позволило получить их решения в более широком классе случаев. В случае, когда полная кривизна равна нулю или постоянна, решения для различных классов поверхностей приведены в работах [9,15,19]. Для двойственных поверхностей с постоянной полной кривизной задачи восстановления были решены в работах [12,23]. В изотропном пространстве, когда полная кривизна представлена в виде произведения функции от двух отдельных переменных, уравнение поверхности было получено в работе [17]. В этой работе задача была решена для случая, когда полная кривизна задана как функция на плоскости, в семействе одно-параметрических поверхностей переноса. В работе [5] было показано, что для уравнения Монжа–Ампера, правая часть которого зависит только от первых частных производных, его общее решение было найдено в семействе поверхностей переноса. В двухсвязной кольцевой области при точно заданной полной кривизне аналитическое решение уравнения Монжа–Ампера приведено в работе [21]. В работе [3] Ю. Аминов и другие соавторы рассматривают для уравнения Монжа-Ампера

$$z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + b_{00}$$

задача о существовании решения  $z(x, y)$  в классе полиномов. Задача восстановления выпуклой поверхности была изучена в работе [6], посредством интерпретации полугиперболического пространства внутри сферы изотропного пространства. Кроме того, в работе [7] сделан вывод о том, что задачи восстановления поверхности в других трехмерных неевклидовых пространствах являются частными случаями задачи в евклидовом пространстве. В данной работе мы ищем общее решение уравнения Монжа–Ампера в кольцевой области для функций, заданных в этой области.

## 2. Предварительные сведения

Пусть дана двумерную аффинную плоскость  $\pi$  с аффинной системой координат  $Oxy$ . В этом случае любая точка плоскости имеет свою пару координат  $(x, y)$ . Расстояние между точками  $A(x_1, y_1)$  и  $B(x_2, y_2)$  равно [30]:

$$d = \begin{cases} |x_2 - x_1|, & x_1 \neq x_2 \\ |y_2 - y_1|, & x_1 = x_2 \end{cases} \quad (2.1)$$

По аналогии евклидовой плоскости и плоскости Минковского галилееву плоскость можно определить с помощью скалярного произведения.

**Определение 2.1.** Аффинная плоскость в котором скалярное произведение векторов  $A(x_1, y_1)$  и  $B(x_2, y_2)$  определено по формуле

$$(X \cdot Y) = \begin{cases} x_1x_2, & x_1x_2 \neq 0 \\ y_1y_2 & x_1x_2 = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

называется галилеевой плоскостью [8].

Рассмотрим следующее аффинное преобразование:

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = hx + y + b \end{cases} \quad (2.3)$$

Это преобразование является галилеевское движение в плоскости, сохраняющее заданное расстояние (2.1) [8]. Галилеевское движение относится к группе преобразований Гейзенберга, в которой матрица перехода имеет следующий вид [14,31]:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h & 1 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Здесь, поскольку  $\det |C| = 1$ , площадь области также инвариантна относительно этого преобразования.

Основы геометрии галилеевой плоскости, изложена в книге Яглома [32], где впервые систематически изложена планиметрия галилеевой плоскости. Изучение геометрии галилеевой плоскости начинается определением свойств движения этой плоскости [8].

Движение (2.3) состоит из следующих двух частей [16]:

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases} \quad \cdot \quad \begin{cases} x' = x \\ y' = hx + y \end{cases} \quad (2.5)$$

Первый из них — параллельный перенос, а второй — поворот на плоскости Галилея. При этом ось  $Oy$  сохраняет своё направление, а ось  $Ox$  заменяется прямой  $y = hx + l$ . Геометрическое значение параметра  $h$  вводится через понятие угла между прямыми[8].

Сначала приводится понятия окружности галилеевой плоскости.

**Определение 2.2.** Окружностью называется геометрическое место точек равноудалённой от данной точки.

Если центр окружности в начале координат и радиусе равно  $r$ , уравнения окружности галилеевой плоскости имеет вид:

$$x^2 = r^2$$

Отсюда окружность является парой прямой параллельной оси  $Oy$ .

$$x = \pm r$$

Если  $A$  и  $B$  точки окружности, то  $|OA| = |OB| = r$ .

По аналогии евклидовой плоскости определяется угол между прямыми, как длина дуги единичной окружности, когда центр окружности является точка пересечения прямых.

Когда прямые задана уравнением:

$$\begin{aligned} l_1 : y_1 &= k_1x_1 \\ l_2 : y_2 &= k_2x_2 \end{aligned}$$

то длина дуги галилеевой окружности

$$AB = h|k_2 - k_1| \quad (2.6)$$

будет углом между прямыми  $l_1$  и  $l_2$ . Это угол называется параболическим, и оно принимает значение от 0 до  $\infty$ .

Прямые параллельные координатные оси  $Oy$  очень характерные. По этим прямым измеряется вторая часть расстояния, угол и она является "дугой" окружности.

Поэтому прямые параллельные оси  $Oy$  - названа "особыми"[16].

Пусть дана выпуклая регулярная поверхность  $F$ . Мы можем найти её уравнение по её полной кривизне. Нахождение поверхности по её полной кривизне, то есть когда известна правая часть, эквивалентно решению уравнения Монжа-Ампера[10]:

$$z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = \phi(x, y, z, z_x, z_y) \quad (2.7)$$

Левая часть уравнения представляет собой оператор Монжа-Ампера. Ниже мы найдём решение уравнения Монжа-Ампера (2.7) в частном случае, используя преобразование (2.3), когда полная кривизна является функцией, заданной на кольцевой области. Для этого, прежде всего, найдём вид уравнения Монжа-Ампера в полярной системе координат:

### 3. Основной результат

Рассмотрим следующую замену:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases} \quad (3.1)$$

Подставив эту замену в уравнение (2.3), получим следующее уравнение:

$$\begin{cases} x' = \rho \cos \varphi + a \\ y' = \rho(h \cos \varphi + \sin \varphi) + b \end{cases} \quad (3.2)$$

Вид уравнения Монжа-Ампера в новой системе координат следующий:

$$z_{x'x'}z_{y'y'} - z_{x'y'}^2 = K(x', y') \quad (3.3)$$

Ниже мы находим частные производные:

$$\begin{aligned} z_\rho &= z_{x'} \cos \varphi + z_{y'} (h \cos \varphi + \sin \varphi), \quad z_\varphi = z_{x'} (-\rho \sin \varphi) + z_{y'} (\rho(-h \sin \varphi + \cos \varphi)) \\ z_{\rho\rho} &= z_{x'x'} \cos^2 \varphi + 2z_{x'y'} \cos \varphi (h \cos \varphi + \sin \varphi) + z_{y'y'} (h \cos \varphi + \sin \varphi)^2 \\ z_{\varphi\varphi} &= z_{x'x'} \rho^2 \sin^2 \varphi - 2z_{x'y'} \rho^2 \sin \varphi (-h \sin \varphi + \cos \varphi) + z_{y'y'} \rho^2 (-h \sin \varphi + \cos \varphi) - \\ &\quad - z_{x'} \rho \cos \varphi - z_{y'} \rho (h \cos \varphi + \sin \varphi) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Упростим выражение  $z_{\varphi\varphi}$ , отсюда

$$\frac{z_\rho}{\rho} + \frac{z_{\varphi\varphi}}{\rho^2} = z_{x'x'} \sin^2 \varphi + 2z_{x'y'} (h \sin^2 \varphi - \sin \varphi \cos \varphi) + z_{y'y'} (\cos \varphi - h \sin \varphi)^2 \quad (3.5)$$

Вычислим смешанную частную производную:

$$\begin{aligned} z_{\rho\varphi} &= -z_{x'x'} \rho \sin \varphi \cos \varphi + z_{y'y'} \rho (\cos \varphi - h \sin \varphi) (h \cos \varphi + \sin \varphi) + z_{x'y'} \rho \cos \varphi (\cos \varphi - h \sin \varphi) - \\ &\quad - z_{x'y'} \rho \sin \varphi (h \cos \varphi + \sin \varphi) - z_{x'} \sin \varphi - z_{y'} (h \sin \varphi - \cos \varphi) \end{aligned}$$

из этого следует:

$$\frac{z_{\rho\varphi}}{\rho} - \frac{z_{\varphi}}{\rho^2} = -z_{x'x'} \sin \varphi \cos \varphi + z_{x'y'} (\cos 2\varphi - h \sin 2\varphi) + z_{y'y'} (h \cos 2\varphi - (h^2 - 1) \sin \varphi \cos \varphi) \quad (3.6)$$

Путём сложения и вычитания выражений (3.4) и (3.5) получаем следующие равенства:

$$\begin{aligned} z_{\rho\rho} + \frac{z_{\rho}}{\rho} + \frac{z_{\varphi\varphi}}{\rho^2} &= z_{x'x'} + 2hz_{x'y'} + (h^2 + 1)z_{y'y'} \\ z_{\rho\rho} - \frac{z_{\rho}}{\rho} - \frac{z_{\varphi\varphi}}{\rho^2} &= z_{x'x'} \cos 2\varphi + 2hz_{x'y'}(h \cos 2\varphi + \sin 2\varphi) + z_{y'y'}((h^2 - 1) \cos 2\varphi + 2h \sin 2\varphi) \end{aligned}$$

В результате упрощения вышеприведённого выражения и равенства (3.6) получаем следующую систему:

$$\begin{cases} z_{x'x'} + 2hz_{x'y'} + (h^2 + 1)z_{y'y'} = z_{\rho\rho} + \frac{z_{\rho}}{\rho} + \frac{z_{\varphi\varphi}}{\rho^2} \\ z_{x'y'} + hz_{y'y'} = \frac{1}{2} \left( z_{\rho\rho} - \frac{z_{\rho}}{\rho} - \frac{z_{\varphi\varphi}}{\rho^2} \right) \sin 2\varphi + \left( \frac{z_{\rho\varphi}}{\rho} - \frac{z_{\varphi}}{\rho^2} \right) \cos 2\varphi \\ z_{x'x'} + 2hz_{x'y'} + (h^2 - 1)z_{y'y'} = \left( z_{\rho\rho} - \frac{z_{\rho}}{\rho} - \frac{z_{\varphi\varphi}}{\rho^2} \right) \cos 2\varphi - 2 \left( \frac{z_{\rho\varphi}}{\rho} - \frac{z_{\varphi}}{\rho^2} \right) \sin 2\varphi \end{cases} \quad (3.7)$$

Из (3.7) получаем:

$$\begin{aligned} z_{x'x'} &= \frac{h^2 + 1}{2} \left( z_{\rho\rho} + \frac{z_{\rho}}{\rho} + \frac{z_{\varphi\varphi}}{\rho^2} \right) + \left( \frac{1 - h^2}{2} \cos 2\varphi - h \sin 2\varphi \right) \left( z_{\rho\rho} - \frac{z_{\rho}}{\rho} - \frac{z_{\varphi\varphi}}{\rho^2} \right) + \\ &+ \left( \frac{3h^2 - 1}{2} \sin 2\varphi - 2h \cos 2\varphi \right) \left( \frac{z_{\rho\varphi}}{\rho} - \frac{z_{\varphi}}{\rho^2} \right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$z_{x'y'} = -\frac{h}{2} \left( z_{\rho\rho} + \frac{z_{\rho}}{\rho} + \frac{z_{\varphi\varphi}}{\rho^2} \right) + \frac{\sin 2\varphi + h \cos 2\varphi}{2} \left( z_{\rho\rho} - \frac{z_{\rho}}{\rho} - \frac{z_{\varphi\varphi}}{\rho^2} \right) + (\cos 2\varphi - h \sin 2\varphi) \left( \frac{z_{\rho\varphi}}{\rho} - \frac{z_{\varphi}}{\rho^2} \right) \quad (3.9)$$

$$z_{y'y'} = \frac{1}{2} \left( z_{\rho\rho} + \frac{z_{\rho}}{\rho} + \frac{z_{\varphi\varphi}}{\rho^2} \right) - \frac{\cos 2\varphi}{2} \left( z_{\rho\rho} - \frac{z_{\rho}}{\rho} - \frac{z_{\varphi\varphi}}{\rho^2} \right) + \sin 2\varphi \left( \frac{z_{\rho\varphi}}{\rho} - \frac{z_{\varphi}}{\rho^2} \right) \quad (3.10)$$

Если подставить найденные выражения в уравнение Монжа-Ампера, то найдем его уравнение в полярных координатах:

$$\begin{aligned} z_{x'x'}z_{y'y'} - z_{x'y'}^2 &= z_{\rho\rho} \left( \frac{z_{\rho}}{\rho} + \frac{z_{\varphi\varphi}}{\rho^2} \right) + \\ &+ \left( \frac{z_{\rho\varphi}}{\rho} - \frac{z_{\varphi}}{\rho^2} \right) \left( \frac{h^2 + 1}{4} \sin 2\varphi \left( z_{\rho\rho} + \frac{z_{\rho}}{\rho} + \frac{z_{\varphi\varphi}}{\rho^2} \right) - \frac{h^2 + 1}{4} \left( z_{\rho\rho} - \frac{z_{\rho}}{\rho} - \frac{z_{\varphi\varphi}}{\rho^2} \right) \right) + \\ &+ \left( \frac{z_{\rho\varphi}}{\rho} - \frac{z_{\varphi}}{\rho^2} \right)^2 \left( \frac{h^2 - 1}{2} \sin^2 2\varphi - \cos^2 2\varphi \right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Отсюда следует следующая основная теорема:

**Теорема 3.1.** Если положительная непрерывная функция задана формулой

$$\Phi = \Phi \left( \sqrt{x^2 + y^2 - b^2}, \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \right)$$

определенной на кольцевой области  $D = \{(x, y) : b^2 \leq x^2 + y^2 \leq a^2\}$ , общее решение эллиптического уравнения Монжа-Ампера:

$$z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = \Phi \left( \sqrt{x^2 + y^2 - b^2}, \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \right)$$

имеет следующее:

$$z(\rho, \varphi) = \int \left[ \sqrt{\lambda^2 + d_1 + \int 2\rho \cdot \Phi \left( \sqrt{\rho^2 - b^2}, \sqrt{a^2 - \rho^2} \right) d\rho} \right] d\rho + \rho(c_1 \cos \varphi + c_2 \sin \varphi) + d_2 \quad (3.12)$$

где,  $z(\rho, \varphi) = z \left( \sqrt{x^2 + y^2}, \arctg \frac{y}{x} \right)$ , и  $\lambda, c_i, d_i - const, i = 1, 2$ .

Доказательство. Решение ищем в следующем виде [28,29]:

$$z(\rho, \varphi) = (f(\rho) + g(\varphi))\rho \quad (3.13)$$

$$z_\rho = \rho f' + f + g, \quad z_\varphi = \rho g', \quad z_{\rho\rho} = \rho f'' + 2f', \quad z_{\varphi\varphi} = \rho g'', \quad z_{\rho\varphi} = z_{\varphi\rho} = g'$$

Если подставить найденные выражения в правую часть равенства (3.11), то получим следующее:

$$\left(\rho f'' + 2f'\right) \left(f' + \frac{f}{\rho} + \frac{1}{\rho}(g'' + g)\right) = \Phi\left(\sqrt{\rho^2 - b^2}, \sqrt{a^2 - \rho^2}\right) \quad (3.14)$$

Упростив это выражение, получим:

$$g'' + g = \frac{\rho \cdot \Phi\left(\sqrt{\rho^2 - b^2}, \sqrt{a^2 - \rho^2}\right) - (\rho f'' + 2f') \cdot (\rho f' + f)}{\rho f'' + 2f'} = \lambda \quad (3.15)$$

где,  $\lambda - const$ .

Общее решение левой части (3.15) имеет следующий вид:

$$g(\varphi) = c_1 \cos \varphi + c_2 \sin \varphi + \lambda \quad (3.16)$$

Упростив правую часть, получим:

$$((\rho f' + f) + \lambda)^2 = \int 2\rho \cdot \Phi\left(\sqrt{\rho^2 - b^2}, \sqrt{a^2 - \rho^2}\right) d\rho + \lambda^2 + d_1$$

Из этого уравнения мы получаем только одно решение:

$$(\rho f' + f) + \lambda = \sqrt{\int 2\rho \cdot \Phi\left(\sqrt{\rho^2 - b^2}, \sqrt{a^2 - \rho^2}\right) d\rho + \lambda^2 + d_1}$$

Из этого,

$$(\rho f')' = -\lambda + \sqrt{\int 2\rho \cdot \Phi\left(\sqrt{\rho^2 - b^2}, \sqrt{a^2 - \rho^2}\right) d\rho + \lambda^2 + d_1}$$

Интегрируя, получаем следующее уравнение:

$$f(\rho) = -\lambda + \frac{1}{\rho} \int \left[ \sqrt{\int 2\rho \Phi\left(\sqrt{\rho^2 - b^2}, \sqrt{a^2 - \rho^2}\right) d\rho + \lambda^2 + d_1} \right] d\rho + \frac{d_2}{\rho} \quad (3.17)$$

Подставляя уравнения (3.16)-(3.17) в выражение (3.13), получаем следующее общее решение (3.12):

$$z(\rho, \varphi) = \rho(f(\rho) + g(\varphi)) = \int \left[ \sqrt{\lambda^2 + d_1 + \int 2\rho \cdot \Phi\left(\sqrt{\rho^2 - b^2}, \sqrt{a^2 - \rho^2}\right) d\rho} \right] d\rho + \rho(c_1 \cos \varphi + c_2 \sin \varphi) + d_2$$

Теорема доказана.

Пример. Если  $\Phi = a^2 - b^2$ , то  $z(\rho, \varphi) = \int [\sqrt{\lambda^2 + d_1 + \int 2(a^2 - b^2)\rho d\rho}] d\rho + \rho(c_1 \cos \varphi + c_2 \sin \varphi) + d_2 = \int \sqrt{\lambda^2 + d_1 + (a^2 - b^2)\rho^2} d\rho + \rho(c_1 \cos \varphi + c_2 \sin \varphi) + d_2 = \sqrt{a^2 - b^2} \int \sqrt{\frac{\lambda^2 + d_1}{a^2 - b^2} + \rho^2} d\rho + \rho(c_1 \cos \varphi + c_2 \sin \varphi) + d_2 = \frac{\rho}{2} \sqrt{(a^2 - b^2)\rho^2 + \lambda^2 + d_1} + \frac{\lambda^2 + d_1}{2\sqrt{a^2 - b^2}} \ln \left| \rho + \sqrt{\rho^2 + \frac{\lambda^2 + d_1}{a^2 - b^2}} \right| + \rho(c_1 \cos \varphi + c_2 \sin \varphi) + d_2$

Упрощения данного выражения получаем следующее уравнение.

$$z(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2} \sqrt{(a^2 - b^2)(x^2 + y^2) + \lambda^2 + d_1} + \frac{\lambda^2 + d_1}{2\sqrt{a^2 - b^2}} \ln \left| \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + \frac{\lambda^2 + d_1}{a^2 - b^2}} \right| + c_1 x + c_2 y + d_2$$

## 4. Заключение

Когда правая часть уравнения Монжа–Ампера задана, нахождение его решения вместе с граничными условиями является одной из актуальных задач теории дифференциальных уравнений с частными производными. В дифференциальной геометрии эта задача в частном случае эквивалентна задачам восстановления поверхности по её внешней или полной кривизне. Во многих исследованиях рассмотрение задачи восстановления поверхности в неевклидовых пространствах имеет важное значение для нахождения её решений в частных случаях. В данной работе с использованием неевклидова пространства, а именно движения Галилеевой плоскости, и перехода к полярной системе координат, выражение уравнения Монжа–Ампера в полярной системе координат было найдено. Для правой части, заданной функциями в кольцевой области, было получено общее решение уравнения Монжа–Ампера в этой области с использованием геометрии неевклидовых пространств и преобразований Галилея. Галилеевское движение плоскости применяется для решения уравнения Монжа–Ампера. Результат расширяет предыдущие исследования, демонстрируя эффективность предложенного геометрического подхода к решению уравнения Монжа–Ампера.

## Список литературы

- [1] Alexandrov, A.D.: *Convex polyhedra*. Springer Monographs in Mathematics. (2005).
- [2] Alexandrov, A.D.: *Intrinsic geometry of convex surfaces*. Classics of Soviet Mathematics. (2006).
- [3] Aminov Yu., Arslan K., Bayram B., Bulca B., Murathan C., O'zturk G. : *On the solution of the Monge-Ampere equation  $z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = f(x, y)$  with quadratic right side*. J. Math.Phys.Anal.Geo. **7** (3), 203-211 (2011).
- [4] Ampere A.M. : *Memoire contenant l'application de la theorie*. Journal de Polytechnique (1820).
- [5] Artykbaev A., Ismoilov Sh.Sh., Kholmurodova G.N. : *Recovering a surface in isotropic space using dual mapping according to curvature invariants*. KazNu.Bull. Math. Mech. Comp.Sci. **126** (2), 104-118 (2025).
- [6] Artykbaev A., Kholmurodova G.N. : *The problem of recovering convex surfaces in a semi-hyperbolic space*. Springer Proc. Math.Stat. **510**, 281-286 (2025).
- [7] Artykbaev A., Kholmurodova G.N. : *Applying of the surface theory of non-Euclidian spaces to the solution of the Monge-Ampere equation of elliptic type*. Uzbek Math. J. **69** (2), 23-28 (2025).
- [8] Artykbaev, A., Sultanov, B.M., Ismoilov, Sh.Sh.: *Geometry of semi-Euclidean spaces: Isotropic and Galilean (in Russian)*. Tashkent, Transport. (2024).
- [9] Aydin M.E., Kulahci M.A, Ogenmis A.O.: *Constant curvature Translation surfaces in Galilean 3-space.* Int. Elect. J. Geom. **12** (1), 9-19 (2019).
- [10] Bakelman, I.Y.: *Convex Analysis and Nonlinear Geometric Elliptic Equations* Springer Verlag, Berlin, Heidelberg. (1994).
- [11] Budd, C.J., Cullen, M.J., Walsh, E.J.: *Monge-Ampere based moving mesh methods for numerical weather prediction, with applications to the Eady problem*. J.Comput.Phys. **236** (1), 247-270 (2013).
- [12] Cakmak A., Karacan M.K., Kiziltug S., : *Dual surfaces defined by  $z = f(u) + g(v)$  in simply isotropic 3-space  $I_3^1$* . Commun. Korean math. soc. **34** (1), 267-277 (2019).
- [13] Chen, B.Y. : *Solutions to homogenous Monge-Ampere equations of homothetic functions and their applications to production models in economics*. J. Math.Anal.Appl. **411** (1), 223-229 (2014).
- [14] Dairbekov, N.S. : *Otobrajeniya s ogranichenem na gruppax Geyzenberga*. Siberian Math. J. **41**, 567-590 (2000).
- [15] Dede, M., Ekici, C., Goemans, W. : *Surfaces of revolution with vanishing curvature in Galilean 3-space*. J.Math.Phys.Anal.Geo. **14** (2), 141-152 (2018).
- [16] Hartenstine, D. : *The Dirichlet problem for the Monge-Ampere equation in convex (but not strictly convex) domains*. Elect. J. Diff.Equat. **138**, 1-9 (2006).
- [17] Ismoilov Sh.Sh. : *Geometry of the Monge-Ampere equation in an isotropic space*. Uzbek Math.J. **66** (2), 66-77 (2022).
- [18] Ju H.J., Bao J.G., : *On the exterior Dirichlet problem for Monge-Ampere equations*. J.Math. Anal. Appl. **405**, 475-483 (2013).
- [19] Karacan M.K., Yoon D.W., Yuksel N. : *Classification of some special types ruled surfaces in simply isotropic 3-space*. Anal. Uni. de vest , Timisoara Seria Math –info. **55**, 87-98 (2017).
- [20] Khabirov S.V. : *Nonisentropic one-dimensional gas motions constructed by means of the contact group of the nonhomogenous Monge-Ampere equation*. Math.USSR.Sbornik **21** (2), 447-462 (1992).
- [21] Kholmurodova G.N. : *Solution of the Monge-Ampere equation in a ring domain*. Uzbek Math. J. **69** (3), 114-120 (2025).
- [22] Kushner, A.G. : *A contact linearization problem for Monge-Ampere equations and laplace invariants*. Acta. Appl.Math. **101**, 177-189 (2008).
- [23] Lone M.S, Karacan M.K., : *Dual translation surfaces in the three dimensional simply isotropic space*. Tamkang J.Math. **49** (1), 67-77 (2018).
- [24] Monge G. : *Sur le calcul integral des equations aux differences partielles*. Memoires de l'Academie des Sciences (1784).
- [25] Nam Q.L. : *Analysis of Monge-Ampere equations*. American. Math.Soc. (2024).
- [26] Philippis G., Figalli, A. : *The Monge-Ampere equation and its link to optimal transportation*. Bull. American Math.Soc. **51** (4), 527-580 (2014).
- [27] Pogorelov, A.V.: *Extrinsic geometry of convex surfaces*. Moscow, Science. (1991).

- [28] Polyanin, A.D., Zhurov, A.I.: *Methods for separation of variables and exact solutions of nonlinear equations of mathematical physics*. Moscow, Ipmex. Ran. (2020).
- [29] Polyanin, A.D.: *Lectures on nonlinear equations of mathematical physics*. Moscow, Ipmex. Ran. (2023).
- [30] Sultanov, B.M., Kurudirek, A., Ismoilov, Sh.Sh. : *Development and isometry of surfaces Galilean space*. Math.Stat. **11** (6), 965-972 (2023).
- [31] Tomter, P.: *Constant mean curvature surface in the Heisenberg group* Proc. of Symp. Pure Math. **54** (1), 485-495 (1993).
- [32] Yaglom, I.M.: *A simple non-Euclidean geometry and its physical basis*. Springer, New York pp. 326 (1979).

## Solving the Monge-Ampere Equation using Geometric Transformations

Abdullaaziz Artykbaev, Gulnoza Kholmurodova

### Abstract

The geometric problem of recovering a convex surface from a given function is equivalent to solving a certain Monge-Ampère equation. In this case, the extrinsic curvature is defined as a function of Borel sets. I. Ya. Bakelman constructed this theory and proved the existence and uniqueness of the solution of the Monge-Ampère equation of elliptic type in a simply connected convex domain. A. Artykbaev generalized this solution for a non-simply connected domain applying of the geometry of Galilean space. This paper is devoted to the analytical solution of the Monge-Ampère equation in a non-simply connected domain. The extrinsic curvature of the surface is determined in a non-simply connected domain which is bounded by concentric circles. By applying the transformation which is the motion of Galilean space and the transition to the polar coordinate system, the equation is modified, in which it is possible to separate the variables of the solution, the equation is sought for the sum of three functions. As a result, an analytical form of the solution in a non-simply connected domain bounded by concentric circles is obtained.

### Keywords

Galilean motion; Monge-Ampere equation; Heisenberg group; total curvature; polar coordinat system.

### Affiliations

A.Artykbaev

**Address:** Tashkent State Transport University, Department of Higher Mathematics, 99999, Tashkent-Uzbekistan.

**e-mail:** aartykbaev@mail.ru

**ORCID ID:** 0000-0001-6228-8749

G.Kholmurodova

**Address:** Tashkent State Transport University, Department of Higher Mathematics, 99999, Tashkent-Uzbekistan.

**e-mail:** xolmurodovagulnoza3@gmail.com

**ORCID ID:**0009-0000-8131-8405



# Исследование Устойчивости Цилиндрических Оболочек, Связанных с Кольцевой Пластиной

Саъдуллаева Мавжуда, Салимов Шоолим Музаффарович\* и Мавланов Тулкин

## Аннотация

В работе представлены постановка и методы решения динамических задач многосвязных структурно-неоднородных оболочечных конструкций, позволяющие свести задачу расчета широкого класса инженерных конструкций к задачам автоматизированного проектирования. На основе численных экспериментов и многопараметрического анализа системы в целом решен ряд принципиально важных прикладных задач расчета динамических характеристик колебаний (частот, форм, определяющих резонансных амплитуд и коэффициентов затухания) специальных конструкций в зависимости от параметров структурной неоднородности. А также рассмотрены устойчивости цилиндрических оболочек связанных с кольцевой пластиной под действием динамических нагрузок. Предложено методика комплексной оценки деформационных свойств с целью получения наиболее рациональных механических и геометрических характеристик. На основе математического моделирования деформационных и релаксационных процессов.

*Ключевые слова:* конструкция; оболочка; деформация; релаксация; кольцевая пластина; устойчивость; вязкоупругий.

## 1. Введение

Теоретические и экспериментальные основы проявления нелинейных реологических свойств в различных элементах структурно-неоднородных, сложных многосвязных оболочечных конструкций изложены в фундаментальных работах [1–12]. Несмотря на это, оценка напряженно-деформированного состояния оболочечных конструкций с учетом неоднородных, вязкоупругих свойств осуществляется только в рамках линейной вязко упругости. В [13] представлена расчетная модель деформаций основания фундамента, основанная на методе послонного суммирования с учетом компонент девиатора и тензора шаровой деформации, соотношение между которыми различно в разных точках фундамента. Рассматривалось нелинейное объемное деформирование грунта во времени с учетом уплотнения несущего слоя грунта. На основании результатов экспериментов построены локальные закономерности взаимодействия протяженных подземных трубопроводов и фрагментов наружной поверхности подземных сооружений с грунтами нарушенной и ненарушенной структуры [14]. В [15] с использованием нелинейных реологических моделей исследовано напряженное состояние плотины. Возможность использования модели продемонстрирована путем сравнения численных результатов с результатами лабораторных испытаний.

В [16] предложены обобщенные реологические модели ненасыщенных и вод насыщенных грунтов и выведены соответствующие уравнения, используемые для количественной оценки дополнительных остаточных деформаций

и напряжений в грунте. Решена одномерная задача консолидации слоя не полностью вод насыщенного грунта при циклическом изменении внешней нагрузки.

В работе [17] предложены модель и набор определяющих соотношений для реологической модели слабых грунтов. Возможность использования этой модели подтверждена рядом экспериментов по реологической консолидации при различных скоростях нагруженные.

В [18] показана тенденция к увеличению мгновенного модуля деформации с ростом ползучести. Для мягких грунтов предложена нелинейная модель ползучести, в которой затухание ползучести описывалось нелинейной функцией упрочнения и коэффициентом вязкости, а нелинейные кривые ползучести хорошо согласуются с экспериментальными данными. Поведение конкретных конструкций, использующих наследственную теорию вязко упругости, при динамическом нагруженные изучено недостаточно, хотя и широко представлено в литературе [19–20]. Подавляющее число публикаций, посвященных динамическим задачам наследственной теории вязко упругости, посвящено расчету (линейных и геометрически нелинейных) тонкостенных конструкций — балок, пластин и оболочек.

Схема решения динамических задач вязко для тонкостенных конструкций достаточно стандартна. Выбором координатной функции, удовлетворяющей граничным условиям, исходная задача может быть сведена к задаче о колебаниях системы с конечным числом степеней свободы, то есть к системе линейных или нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с одной независимой временной переменной. В качестве координатных функций, как правило, используют тригонометрические или балочные функции. Такой выбор координатных функций ограничивает класс решаемых задач конструкциями простейших конфигураций – балками постоянного сечения, прямоугольной пластиной, цилиндрической оболочкой [12]. Авторы этих публикаций, допуская ряд неточностей в выборе координатных функций, пытались повысить точность решения системы интегро-дифференциальных уравнений. Однако для конструкций с реальной геометрией подобрать аналитические координатные функции, удовлетворяющие граничным условиям задачи, невозможно. Приведенный выше обзор известных работ показывает необходимость оценки напряженно-деформированного состояния и динамического поведения структурно-неоднородных оболочечных конструкций грунтовых сооружений с учетом не только реологических свойств оболочечных конструкций, но и особенностей неоднородной структуры и реальной геометрии. В данной работе представлены методы, алгоритм и результаты исследования динамического поведения многосвязных структурно-неоднородных оболочечных конструкций с учетом вязкоупругих свойств материала при различных динамических воздействиях.

Постановка задачи и принятые допущения. В настоящей работе рассматривается осесимметричная многосвязная конструкция, состоящая из цилиндрической оболочки длиной  $L$  и кольцевой пластины, расположенной в средней части. Для решения задачи устойчивости используются следующие допущения и модельные предпосылки:

Модель оболочки:

- используется тонкая цилиндрическая оболочка по теории Тимошенко–Власова;
- деформации предполагаются малыми, материал линейно-упругий;
- радиальная жёсткость кольцевой пластины предполагается значительно большей, что приводит к локальной концентрации моментов и усилий. Принятые допущения:
- осесимметричность конструкции и нагрузки;
- отсутствие начальных несовершенств;
- отсутствие влияния температурных напряжений;
- взаимодействие оболочки и пластины моделируется через упругие условия на линии стыка.

**Основная цель задачи.** Определить критическое внешнее давление, при котором цилиндрическая оболочка или кольцевая пластина теряют устойчивость, а также выявить зоны преобладающего характера потери устойчивости.

## 2. Методы исследования

Многосвязные конструкции, нагруженные внешним давлением на цилиндрические части, исследуются на устойчивость. Цилиндрические оболочки, один из торцов которых жестко защемлен, в обеих конструкциях имеют одну и ту же геометрию

$$\frac{L_1}{R} = \frac{L_2}{R} = 1, \quad R/h_\mu = 400. \quad (2.1)$$

Задача сводится к поиску минимального значения критической нагрузки внешнего давления, которую будем определять по формуле

$$q = \xi q_c, \quad (2.2)$$

где

$$q_c = \frac{\pi\sqrt{6}}{9z} \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \frac{h^2}{R^2}, \quad Z = \frac{L^4\sqrt{(1-\nu^2)}}{\sqrt{Rh}}, \quad (2.3)$$

Прежде чем непосредственно перейти к анализу всей конструкции, рассмотрим поведение отдельных элементов конструкции. Общая длина цилиндрической части конструкции равна  $2L$ , но в силу подкрепления в середине её кольцевой пластиной, которая имеет большую жесткость в радиальном направлении, можно ограничиться рассмотрением только цилиндрической оболочки длиной  $L$ . Остается вопрос о выборе граничных условий в месте стыка кольцевой пластины и цилиндрической части конструкции. В месте стыка кольцевой пластины и цилиндрической оболочки применяются упругие граничные условия, которые в зависимости от жёсткости пластины принимают вид:

Шарнирное опирание

$$\Gamma_6 : w = M_{11} = T_{11} = \vartheta = 0 \quad (2.4)$$

до жесткого защемления

$$\Gamma_1 : w = \theta_1 = u = \vartheta = 0. \quad (2.5)$$

В реальной конструкции стык имеет промежуточную жёсткость, поэтому кривая критических нагрузок располагается между теоретическими пределами, соответствующими (2.4) и (2.5). Это принципиально влияет на вид форм потери устойчивости. Для комбинаций из этих граничных условий на торцах цилиндрической оболочки в широкой области изменения относительной длины  $z$  из работы [2] следует, что зависимости критического параметра  $\xi^*$  при  $z \geq 10$  практически совпадают с пунктирными линиями на рис.1, полученными Н.А.Алфутковым на основе полубезмоментной теории В.З.Власова. С учетом реальной жесткости стыка кривая, описывающая зависимость критического параметра  $\xi^*$  от относительной длины оболочки  $z$ , будет лежать между этими линиями. Поведение кольцевой пластины со свободным внутренним краем от радиального сжатия по внешнему краю слабо изучено, поэтому было проведено исследование устойчивости кольцевой пластины с двумя вариантами граничных условий на внешнем краю

$$\Gamma_2 : w = \theta_1 = T_{11} = \vartheta = 0, \quad (2.6)$$

$$\Gamma_6 : w = M_{11} = T_{11} = \vartheta = 0. \quad (2.7)$$

Величина критического усилия определяется по формуле

$$T = -\zeta^* \cdot \frac{Eh_n}{(1-\nu^2)} \cdot \left(\frac{R}{h_n}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{r_0}{R}\right)^3. \quad (2.8)$$

Зависимости критического параметра  $\zeta^*$  в широкой области изменения внутреннего радиуса для различных значений волн в кольцевом направлении представлены на рис.2.(а). В случае шарнирного закрепления (2.7) минимальное значение критической нагрузки получается при осесимметричной потере устойчивости ( $n = 0$ ), но при  $r_0 \rightarrow R$ , когда пластина может работать как кольцо, возможно иное значение критической нагрузки с

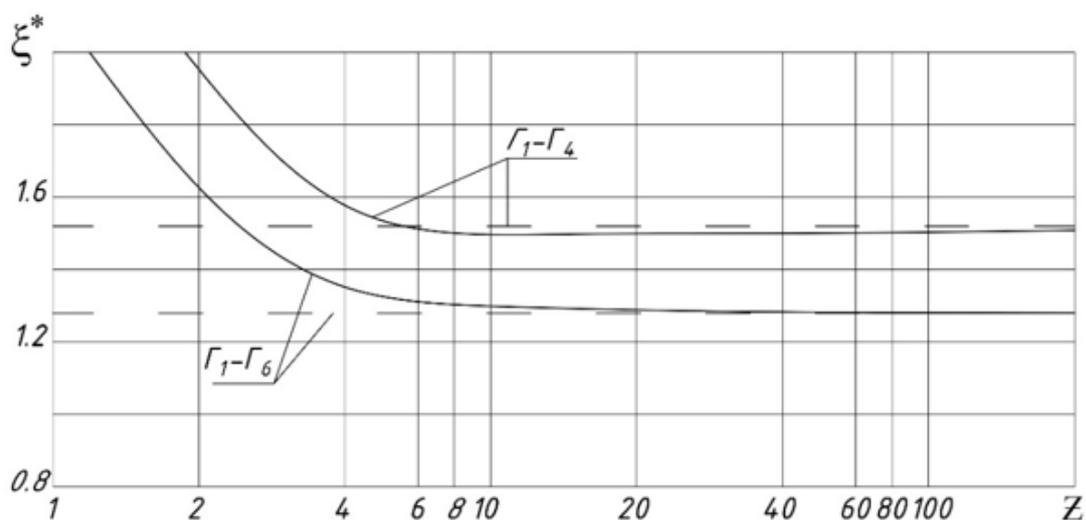


Рис. 1

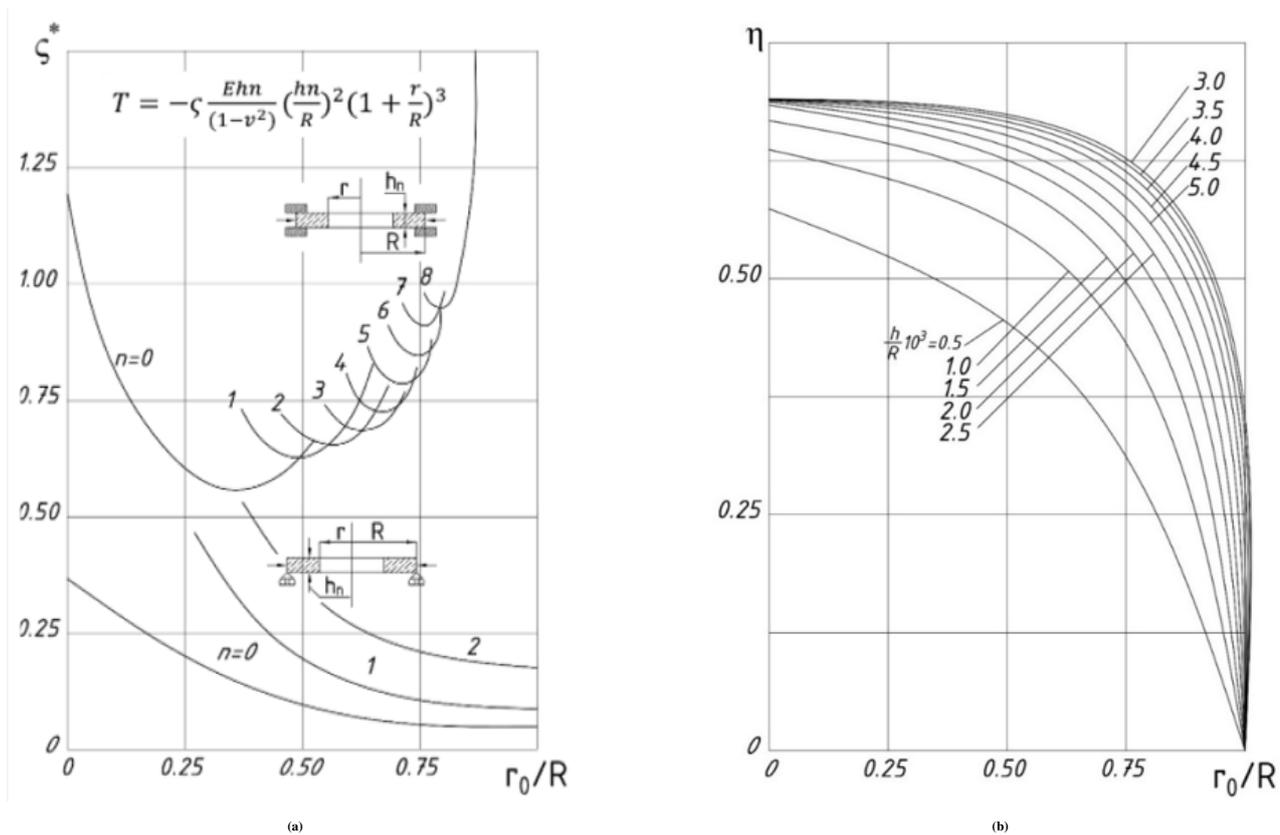


Рис. 2

неосесимметричной формой потери устойчивости ( $n > 0$ ). В этом случае необходимо вычислить критическую нагрузку для пластины по схеме кольца ( $n = 2$ ).

$$T = 2h_n E \cdot \left( \frac{R - r_0}{R + r_0} \right)^3 \quad (2.9)$$

и сравнить с полученными значениями из (2.8). Минимальное значение из них и определит истинную величину расчётного критического усилия. При рассмотрении граничного условия (2.6) величина параметра критической нагрузки значительно увеличивается, причём минимальные значения его наблюдаются как при осесимметричной ( $r_0/R \leq 0.5$ ), так и при неосесимметричной ( $r_0/R > 0.5$ ) потере устойчивости. В случае неосесимметричной потери устойчивости число волн в окружном направлении растёт с увеличением  $r_0/R$ .

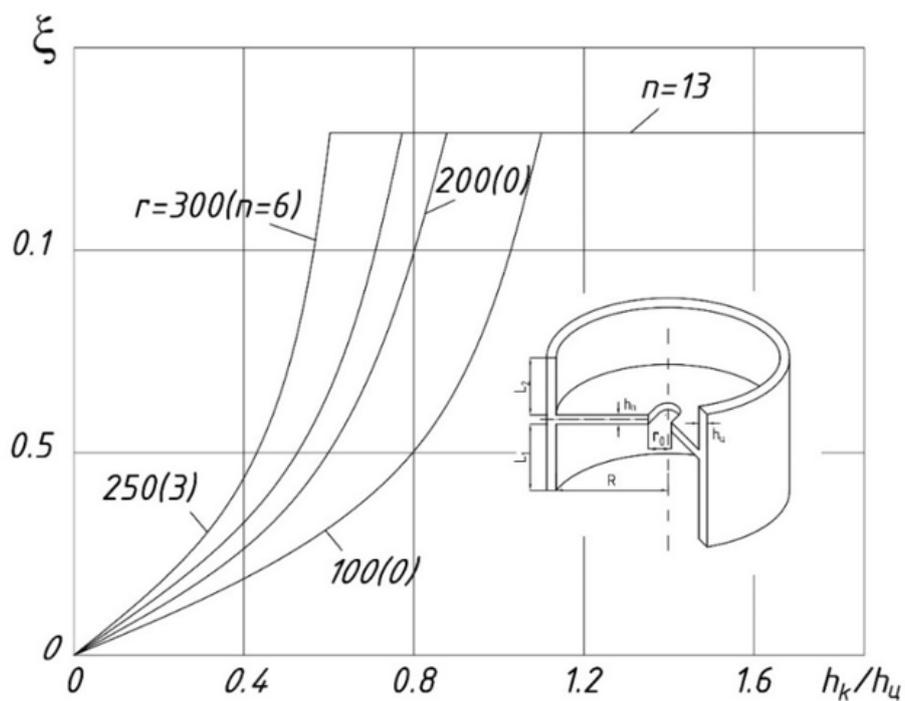


Рис. 3

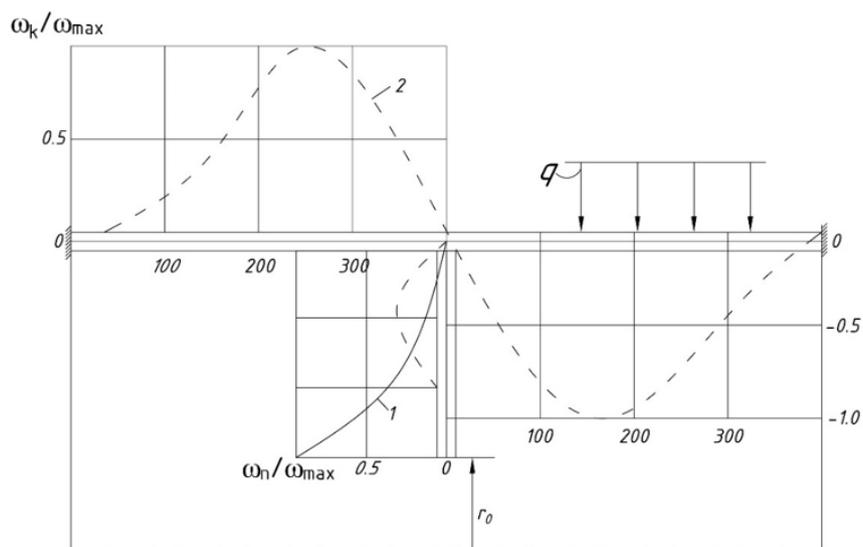


Рис. 4

### 3. Результаты и обсуждения.

В результате исследования устойчивости всей конструкции по разработанному методу получены зависимости  $\xi^*$ , относящиеся к соответствующей геометрии кольцевой пластины (рис.3). На рис.4 приведены формы потери устойчивости элементов конструкции. Форма, отмеченная цифрой 1 на рис.4, показывает, что устойчивость теряет преимущественно пластина. В области геометрии, где в потере устойчивости участвуют явным образом все элементы конструкции (форма 2 на рис.4), величина критической нагрузки практически не изменяется, форма остается постоянной с образованием 13 волн в кольцевом направлении. Области критических значений  $\xi^*$  практически совпадают со значениями этого параметра для цилиндра длиной  $L$ , у которого реализуется граничные условия (2.4) и (2.5). Это подтверждает тот факт, что для исследования устойчивости рассматриваемой многосвязной конструкции можно использовать результаты работы [2], которые представлены на рис.1, совместно с формулой (2.2).

В области параметров конструкции, где преимущественно теряет устойчивость пластина, следует установить какой или какими зависимостями можно ограничиться в исследовании устойчивости конструкции. Для этого выясним в какой связи находятся зависимости критических величин для пластины (2.8) и (2.9) с критическим давлением для всей конструкции. Определим из решения задачи прочности усилия приходящееся на внешний край пластины в зависимости от внешнего давления  $q$  для различной геометрии пластины. В результате проведения расчётов на рис.2.(b). приведены зависимости параметра  $\eta$ , через который определяется действующее на пластину усилие

$$T = \eta q R \quad (3.1)$$

Теперь из рассмотрения конкретного критического давления, для которого из выражений (2.8) и (2.9) с учетом (3.1) определяются критические значения усилия для пластины, следует, что значение критического усилия совпадает с критическим усилием для пластины с граничными условиями (2.6) на внешнем крае и определяется по формуле (2.8). Иными словами, цилиндрические оболочки при потере устойчивости пластины не позволяют ей изгибаться на внешнем крае.

Таким образом, для анализа многосвязной осесимметричной конструкции (рис.3) достаточно иметь зависимости параметров  $\xi^*$ ,  $\zeta^*$  и  $\eta$  от геометрии конструкции (рис.1, 2) и выражения (2.2), (2.8) и (3.1). Минимальное значение нагрузки для всей конструкции будет меньше из двух давлений, соответствующих критическому внешнему давлению для цилиндра длиной  $L$  с граничными условиями (2.4) и (2.5), которое определяется по формуле (2.2) с учетом зависимости  $\xi^*$  на рис.1, или внешнему давлению, вызывающему потерю устойчивости пластины и обделяемому, согласно (2.8), выражением

$$q = -\zeta^* \eta^{-1} \cdot \frac{E}{(1 - \nu^2)} \cdot \left(\frac{h_n}{R}\right)^3 \cdot \left(1 + \frac{r_0}{R}\right)^3, \quad (3.2)$$

где  $\zeta^*$  берется с рис.2.(a). для граничного условия (2.6) на внешнем крае. Форма потери устойчивости конструкции принимает вид кривой 1 или 2 на рис.4 в зависимости от того какая часть конструкции преимущественно теряет устойчивость.

### 4. Выводы.

Основные выводы по результатам моделирования:

- Основная опасная форма потери устойчивости кольцевой пластины - осесимметричная, однако при большом внутреннем радиусе возможно преобладание неосесимметричных форм.
- Цилиндрическая часть конструкции теряет устойчивость при значениях, хорошо согласующихся с классическими зависимостями Власова–Алфурова.

- В переходных областях, где в потере устойчивости одновременно участвуют все элементы, форма имеет 13 волн, что важно для инженерной диагностики.
- Установлено, что цилиндрическая оболочка не позволяет изгибу внешнего края кольцевой пластины — это объясняет преобладание условий типа (2.6) в расчётах.

Таким образом, получены соотношения и зависимости, которые могут быть использованы при анализе и проектировании подобных конструкций в довольно широкой области изменения геометрических параметров конструкции. Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что предложенные теоретические предпосылки с достаточной точностью моделируют динамику реальных объектов. Разработанные методика, алгоритм и программа расчета обеспечивают получение решения задачи с необходимой точностью.

## Список литературы

- [1] Urzhumtsev Yu.S., Mayboroda V.P.: *Technical means and methods for determining the strength characteristics of polymer structures*. M.: Engineering, 1984, 168 p.
- [2] Kravchuk A.S., Mayboroda V.P., Urzhumtsev Yu.S.: *Mechanics of Polymer and Composite Materials*. Moscow (M): Nauka, 1985, 300 p.
- [3] Filatov A.N.: *Asymptotic methods in the theory of differential and integro-differential equations*. Tashkent: FAN, 1974, 216 p.
- [4] Koltunov M.A., Maiboroda V.P., Kravchuk A.S.: *Applied mechanics of a deformable rigid body*. M.: Higher School, 1983, 350 p.
- [5] Koltunov M.A.: *Creep and relaxation*. M.: Higher School, 1976, 277 p.
- [6] Ilyushin A.A., Pobedrya B.E.: *Fundamentals of the mathematical theory of thermo-viscoelasticity*. Moscow: Nauka, 1970, 280 p.
- [7] Koltunov M.A., Mayboroda V.P., Zubchaninov V.G.: *Strength calculations of products from polymeric materials*. M.: Engineering, 1983, 239 p.
- [8] Blend D.: *Theory of linear viscoelasticity*. M.: Mir, 1974, 338 p.
- [9] Rzhantsyn A.R.: *Creep theory*. M.: Stroyizdat, 1968, 416 p.
- [10] Grigorenko Ya.M., Vasilenko A.T.: *Methods for shell calculation. Vol. 4, Theory of shells of variable rigidity*. Kiev: Naukova Dumka, 1981, 543 p.
- [11] Karmishin A.V., Lyaskovets V.A., Myachenkov V.I., Frolov A.N.: *Statics and dynamics of thin-walled shell structures*. M.: Mechanical Engineering, 1975, 376 p.
- [12] Myachenkov V.I., Maltsev V.P.: *Methods and algorithms for the calculation of spatial structures at computer*. M.: Mechanical Engineering, 1984, 278 p.
- [13] Mirsaidov M.: *Theory and methods for calculating earth structures for strength and rigidity*. Tashkent: FAN, 2010, 312 p.
- [14] Mirsaidov M., Godovannikov A.M.: *Earthquake Resistance of Structures*. Tashkent: Uzbekistan, 2008, 220 p.
- [15] Sultanov K.S.: *Wave theory of earthquake resistance of underground structures*. Tashkent, 2016, 250 p.
- [16] Sh. Salimov: *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.* **883**, 012191 (2020).
- [17] Sh. Salimov et al.: *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.* **883**, 012192 (2020).
- [18] Sh. M. Salimov, T. Mavlanov: *IOP Conf. Ser.: Earth Environ. Sci.* **614**, 012057 (2020).
- [19] Sh. M. Salimov et al.: "Solutions of vibration problems of structural-inhomogeneous shell structures by the Müller's method", *AIP Conference Proceedings* **2612**, 020003 (2023). <https://doi.org/10.1063/5.0124322>
- [20] Khudainazarov S. et al.: *E3S Web of Conferences* **365**, 03040 (2023). <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202336503040>

## Study of Stability of Cylindrical Shells Connected to an Annular Plate

Sadullaeva Mavjuda, Salimov Shoolim Muzaffarovich, Mavlonov Tolkin

### Abstract

The paper presents the statement and methods for solving dynamic problems of multiply connected structurally inhomogeneous shell structures, which make it possible to reduce the problem of calculating a wide class of engineering structures to computer-aided design tasks. On the basis of numerical experiments and multi-parameter analysis of the system as a whole, a number of fundamentally important applied problems have been solved for calculating the dynamic characteristics of oscillations (frequencies, modes, determinant resonant amplitudes and damping coefficients) of special structures depending on the parameters of structural inhomogeneity. The stabilities of cylindrical shells connected to an annular plate under the action of dynamic loads are also considered. A methodics for comprehensive assessment of deformation properties is proposed in order to obtain the most rational mechanical and geometric characteristics based on mathematical modeling of deformation and relaxation processes.

### Keywords

construction; shell; deformation; relaxation; annular plate; stability; viscoelastic.

### Affiliations

Sadullaeva Mavjuda Ziyadullaevna

**Address:** Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan.

**e-mail:** mavjuda1975m@mail.ru

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0002-6999-3472>

Salimov Shoolim Muzaffarovich

**Address:** Associate Professor, Tashkent University of Applied Sciences, Tashkent, Uzbekistan.

**e-mail:** salimovshoolim@yahoo.com

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0003-0750-8619>

Mavlanov Tulkin

**Address:** Professor, Doctor of Technical Sciences, Scientific Research Institute of Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural Mechanization Engineers, Tashkent, Uzbekistan.

**e-mail:** teormechanics@yandex.com

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0002-4349-5715>



# Двухточечная краевая задача для системы функционально-дифференциальных уравнений с максимумами

Т. К. Юлдашев\*, М. А. Тлеубергенова, А. К. Танкеева, А. Молюбайкызы

## Аннотация

В данной статье рассматриваются вопросы краевой задачи с двухточечными граничными условиями для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с максимумами. Используется метод параметризации. Получены условия сходимости и построены алгоритмы решения. Установлены необходимые и достаточные условия на коэффициенты для корректности рассматриваемой задачи. В доказательстве однозначной разрешимости функционально-интегральных уравнений в пространстве  $BD([0, \omega], \mathbb{R}^n)$  используется метод сжимающих отображений.

**Ключевые слова:** Краевая задача, система обыкновенных дифференциальных уравнений, метод параметризации, необходимые и достаточные условия, существование и единственность решения.

**Предметная классификация AMS (2020):** Основная: 34A30; 34A45; Дополнительная: 34B05; 34B10.

## 1. Введение. Постановка проблемы

Рассмотрим линейную двухточечную краевую задачу

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + B(t) \max \{x(\tau) : \tau \in [t-h, t]\} + f(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in (0, T), \quad (1.1)$$

$$x(\xi) = \phi(\xi), \quad \xi \in [-h, 0], \quad (1.2)$$

$$B_0x(0) + C_0x(T) = D_0, \quad (1.3)$$

где  $0 < h = \text{const}$  – запаздывание,  $A(t)$ ,  $B(t)$  и  $f(t)$  непрерывны на  $[0, T]$ ,  $B_0$  и  $C_0$  – заданные  $(n \times n)$  матрицы,  $D_0$  – заданный  $n$ -мерный вектор,  $\phi(t) \in C[-h, 0]$ .

Обозначим через  $C([0, T], \mathbb{R}^n)$  банахово пространство, состоящее из непрерывных вектор-функций  $x(t)$  с нормой

$$\|x(t)\|_{C[0, T]} = \sqrt{\sum_{j=1}^n \max_{t \in [0, T]} |x_j(t)|}.$$

Received : 8-октябрь-2025, Accepted : 10-ноябрь-2025

\* Corresponding author

Данное исследование выполнено при поддержке Министерства высшего и среднего специального образования, науки и инновационного развития Республики Узбекистан (грант F-FA-2021-424).

Мы используем линейное пространство  $BD([0, T], \mathbb{R}^n)$ , которое является банаховым пространством со следующей нормой

$$\|x(t)\|_{BD[0, T]} = \|x(t)\|_{C[0, T]} + h \|x'(t)\|_{C[0, T]},$$

где  $0 < h = \text{const}$ .

Пусть  $X(t)$  – фундаментальная матрица дифференциального уравнения  $\frac{dX}{dt} = A(t)X$ . Тогда из уравнения (1.1) получаем

$$x(t) = \int_0^t X(t)X^{-1}(s) \left( A(s)x(s) + B(s) \max \{x(\tau) : \tau \in [s-h, s]\} + f(s) \right) ds. \quad (1.4)$$

Однозначную разрешимость уравнения (1.4) мы доказываем в пространстве  $BD([0, T], \mathbb{R}^n)$ .

Отметим, что решение задачи (1.1)–(1.3) – это функция  $x^*(t) \in C([0, T], \mathbb{R}^n)$ , непрерывно дифференцируемая на  $(0, T)$  и удовлетворяющая дифференциальному уравнению (1.1) и граничному условию (1.3).

Краевые задачи для дифференциальных уравнений имеют широкий спектр применений [1]–[19]. В работах [2]–[8], [10, 12] используются различные методы качественной теории дифференциальных уравнений. На основе этих методов были установлены условия разрешимости краевых задач и предложены практические способы их решения. В работах [9, 11] особое значение приобретают приближенные и численные методы построения решений краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Данная статья посвящена установлению критериев единственной разрешимости двухточечных краевых задач для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с максимумами и построению методом параметризации приближенного решения задачи (1.1)–(1.3). Следует отметить, что метод параметризации был разработан во многих работах Д. С. Джумабаева и его учеников (см., например, [20]–[32]).

## 2. О разрешимости уравнения (1.4)

Воспользуемся следующей леммой.

**Лемма 2.1** ([33]). *Для разности двух функций с максимумами справедлива следующая оценка*

$$\begin{aligned} & \|\max \{x(\tau) : \tau \in [t-h, t]\} - \max \{y(\tau) : \tau \in [t-h, t]\}\|_C \leq \\ & \leq \|x(t) - y(t)\|_C + h \left\| \frac{\partial}{\partial t} [x(t) - y(t)] \right\|_C, \end{aligned}$$

где  $0 < h = \text{const}$ .

Для уравнения (1.4) рассмотрим следующий итерационный процесс:

$$\begin{aligned} x^0(t) &= g(t) \equiv \int_0^t X(t)X^{-1}(s)f(s)ds, \quad t \in [0, T], \\ x^{k+1}(t) &= g(t) + \int_0^t X(t)X^{-1}(s) \left( A(s)x^k(s) + B(s) \max \{x^k(\tau) : \tau \in [s-h, s]\} \right) ds, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $k = 0, 1, 2, \dots$

**Теорема 2.1.** *Пусть выполнены следующие условия*

$$\int_0^t \|X(t)X^{-1}(s)\|_{C([0, T] \times [0, T])} \max \left\{ \|A(s)\|_{C[0, T]}; \|B(s)\|_{C[0, T]} \right\} ds \leq C_1,$$

то функционально-интегральное уравнение (1.4) имеет единственное решение в классе  $BD([0, T], \mathbb{R}^n)$ , где  $0 < C_1 = \text{const} < \infty$ ,  $\|g(t)\| \leq g_0 < \infty$ ,  $g_0 = \text{const}$  и  $\rho = \max\{C_2; C_3\} < 1$ ,  $0 < C_2$  и  $0 < C_3$  определяются формулами (2.5) ниже.

*Доказательство.* Мы используем итерационный процесс (2.1). Тогда получаем следующие оценки:

$$\|x^0(t)\|_{C[0, T]} \leq \|g(t)\|_{C[0, T]} = \int_0^t \|X(t)X^{-1}(s)\|_{C([0, T] \times [0, T])} \|f(t)\|_{C[0, T]} ds \leq g_0, \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \|x^{k+1}(t) - x^k(t)\|_{C[0, T]} &\leq \int_0^t \|X(t)X^{-1}(s)\|_{C([0, T] \times [0, T])} \left[ \|A(s)\|_{C[0, T]} \times \right. \\ &\times \|x^k(s) - x^{k-1}(s)\|_{C[0, T]} + \|B(s)\|_{C[0, T]} \max\{x^k(\tau) : \tau \in [s-h, s]\} - \\ &- \max\{x^{k-1}(\tau) : \tau \in [s-h, s]\} \|_{C[0, T]} \Big] ds \leq C_1 \left[ \|x^k(t) - x^{k-1}(t)\|_{C[0, T]} + \right. \\ &\left. + \|\max\{x^k(\tau) : \tau \in [t-h, t]\} - \max\{x^{k-1}(\tau) : \tau \in [t-h, t]\}\|_{C[0, T]} \right]. \end{aligned}$$

Применяя лемму 2.1 к последнему неравенству, получаем

$$\|x^{k+1}(t) - x^k(t)\|_{C[0, T]} \leq C_1 \left[ 2\|x^k(t) - x^{k-1}(t)\|_{C[0, T]} + h \left\| \frac{d}{dt}(x^k(t) - x^{k-1}(t)) \right\|_{C[0, T]} \right]. \quad (2.3)$$

Аналогично, из уравнения (1.1) выводим

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d}{dt}(x^{k+1}(t) - x^k(t)) \right\|_{C[0, T]} &\leq \|A(t)\|_{C[0, T]} \|x^k(t) - x^{k-1}(t)\|_{C[0, T]} + \\ &+ \|B(t)\|_{C[0, T]} \max\{x^k(\tau) : \tau \in [t-h, t]\} - \max\{x^{k-1}(\tau) : \tau \in [t-h, t]\} \|_{C[0, T]} \leq \\ &\leq \left( \|A(t)\| + \|B(t)\| \right) \|x^k(t) - x^{k-1}(t)\|_{C[0, T]} + h \|B(t)\| \left\| \frac{d}{dt}(x^k(t) - x^{k-1}(t)) \right\|_{C[0, T]}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Обозначим

$$C_2 \geq \max\{2C_1; \|A(t)\|_{C[0, T]} + \|B(t)\|_{C[0, T]}\}, \quad C_3 \geq \max\{h C_1; h \|B(t)\|_{C[0, T]}\}. \quad (2.5)$$

Тогда из оценок (2.3) и (2.4) получаем

$$\|x^{k+1}(t) - x^k(t)\|_{BD[0, T]} \leq \rho \|x^k(t) - x^{k-1}(t)\|_{BD[0, T]}, \quad (2.6)$$

где  $\rho = \max\{C_2; C_3\}$ . Из оценок (2.2) и (2.6) следует, что оператор в правой части уравнения (1.4) является сжимающим отображением, и уравнение (1.4) имеет единственное решение в пространстве  $BD[0, T]$ . Теорема доказана.  $\square$

### 3. Практические способы нахождения единственного решения

Выберем некоторый шаг  $h_0 > 0$ , такой что  $Nh_0 = T$  ( $N \in \mathbb{N}$ ), и разобьем интервал  $[0, T]$  на подынтервалы:

$$[0, T] = \bigcup_{r=1}^N [(r-1)h_0, rh_0).$$

Обозначено через  $C([0, T], h_0, \mathbb{R}^{nN})$  банахово пространство непрерывных вектор-функций  $x(t) \in \mathbb{R}^{nN}$  с нормой

$$\|x(t)\|_1 = \max_{r=\overline{1:N}} \sup_{t \in [(r-1)h_0, rh_0]} \|x_r(t)\|,$$

где  $\lim_{t \rightarrow rh_0-0} x_r(t)$  для всех  $r = \overline{1, N}$  – конечно. Обозначим через  $x_r(t) = \left\{ \begin{array}{l} x_r(t) = x(t), t \in [(r-1)h_0, rh_0), \\ r = \overline{1, N} \end{array} \right\}$  ограничение вектор-функции  $x(t)$  на  $r$ -й интервал  $[(r-1)h_0, rh_0)$  и сведем задачу (1.1)–(1.3) к эквивалентной многоточечной краевой задаче:

$$\frac{d}{dt} x_r(t) = A(t)x_r + B(t) \max \{x_r(\tau) : \tau \in [t-h, t]\} + f(t), t \in ((r-1)h_0, rh_0), \quad (3.1)$$

$$x(\xi) = \phi(\xi), \quad \xi \in [-h, 0], \quad (3.2)$$

$$B_0 x_1(0) + C_0 \lim_{t \rightarrow Nh_0-0} x_N(t) = D_0, \quad (3.3)$$

$$\lim_{t \rightarrow lh_0-0} x_l(t) = x_{l+1}(lh_0), \quad l = \overline{1, (N-1)}, \quad (3.4)$$

где (3.4) – условия, связывающие решение задачи (1.1)–(1.3) во внутренних точках разбиения интервала  $[0, T]$ . Пусть  $\lambda_r$  – значение функции  $x_r(t)$  в точке  $t = (r-1)h_0$ . Производя замену  $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$ ,  $r = \overline{1, N}$  на интервале  $[(r-1)h_0, rh_0)$ , из (3.1)–(3.4) получаем многоточечную краевую задачу с параметрами:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u_r(t) &= (A(t) + B(t))\lambda_r + \\ &+ A(t)u_r(t) + B(t) \max \{u_r(\tau) : \tau \in [t-h, t]\} + f(t), \quad t \in ((r-1)h_0, rh_0), \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$u_0(\xi) = \phi_0(\xi), \quad \xi \in [-h, 0], \quad t \in [0, h_0 - h], \quad (3.6)$$

$$u_r((r-1)h_0) = 0, \quad r = \overline{2, N}, \quad (3.7)$$

$$B_0 \lambda_1 + C_0 \lambda_N + C_0 \lim_{t \rightarrow Nh_0-0} u_N(t) = D_0, \quad (3.8)$$

$$\lambda_l + \lim_{t \rightarrow lh_0-0} u_l(t) = \lambda_{l+1}, \quad l = \overline{1, N-1}. \quad (3.9)$$

Пара  $(\lambda^*, u^*(t))$  с элементами  $\lambda^* \in \mathbb{R}^{nN}$ ,  $u^*(t) \in C([0, T], h_0, \mathbb{R}^{nN})$  является решением задачи (3.5)–(3.9). Здесь функция  $u_r^*(t)$  является решением задачи (3.5), (3.7) при  $\lambda_r = \lambda_r^*$ ,  $r = \overline{1, N}$ . Для  $\lambda_r^*$  и  $\lim_{t \rightarrow rh_0-0} u_r^*(t)$ ,  $r = \overline{1, N}$  выполняются равенства (3.8), (3.9).

Если  $x^*(t)$  является решением задачи (1.1)–(1.3), то пара  $(\lambda^*, u^*(t))$  является решением задачи (3.5)–(3.9). Наоборот, если пара  $(\tilde{\lambda}, \tilde{u}(t))$  является решением задачи (3.5)–(3.9), то функция

$$\tilde{x}(t) = \tilde{\lambda}_r + \tilde{u}_r(t), \quad t \in [(r-1)h_0, rh_0), \quad r = \overline{1, N}$$

является решением задачи (1.1)–(1.3) и  $\tilde{x}(T) = \tilde{\lambda}_N + \lim_{t \rightarrow Nh_0-0} \tilde{u}_N(t)$ .

Для дальнейшего изложения используем следующие обозначения: пусть  $P(t)$  – произвольная квадратная матрица, непрерывная на интервале  $[(r-1)h_0, rh_0)$  и имеющая конечный предел  $\lim_{t \rightarrow rh_0-0} P(t)$ ,  $r = \overline{1, N}$ . Возьмем число  $\nu \in \mathbb{N}$  и обозначим через  $E_{\nu, r}(A(\cdot), P(\cdot), t)$  сумму

$$\begin{aligned} &\int_{(r-1)h_0}^t P(s_1) ds_1 + \int_{(r-1)h_0}^t A(s_1) \int_{(r-1)h_0}^{s_2} P(s_2) ds_2 ds_1 + \dots + \\ &+ \int_{(r-1)h_0}^t A(s_1) \dots \int_{(r-1)h_0}^{s_{\nu-2}} A(s_{\nu-1}) \int_{(r-1)h_0}^{s_{\nu-1}} P(s_\nu) ds_\nu ds_{\nu-1} \dots ds_1, \quad t \in [(r-1)h_0, rh_0), \quad r = \overline{1, N}. \end{aligned}$$

Сумма  $E_{\nu,r}(A(\cdot), P(\cdot), t)$  непрерывна на  $[(r-1)h_0, rh_0]$  и имеет конечный предел

$$\lim_{t \rightarrow rh_0-0} E_{\nu,r}(A(\cdot), P(\cdot), t) = E_{\nu,r}(A(\cdot), P(\cdot), rh_0) \text{ для всех } \nu \in \mathbb{N}, r = \overline{1, N}.$$

Очевидно, что  $E_{*,r}(A(\cdot), P(\cdot), t) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} E_{\nu,r}(A(\cdot), P(\cdot), t)$  является суммой равномерно сходящегося ряда на  $[(r-1)h_0, rh_0]$ , и эта сумма непрерывна на интервале  $[(r-1)h_0, rh_0]$  и имеет конечный предел

$$\lim_{t \rightarrow rh_0-0} E_{*,r}(A(\cdot), P(\cdot), t) = E_{*,r}(A(\cdot), P(\cdot), rh_0), \quad r = \overline{1, N}.$$

Для фиксированного значения параметра  $\lambda_r$ ,  $r = \overline{1, N}$ , из уравнения (3.1) получаем интегральное уравнение Вольтерры второго рода:

$$\begin{aligned} u_r(t) = & \int_{(r-1)h_0}^t [A(s) + B(s)] \lambda_r ds + \int_{(r-1)h_0}^t f(s) ds + \int_{(r-1)h_0}^t A(s) u_r(s) ds + \\ & + \int_{(r-1)h_0}^t B(s) \max \{u_r(\tau) : \tau \in [s-h, s]\} ds, \quad t \in [(r-1)h_0, rh_0], \quad r = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Подставляя правую часть (3.10) в  $u_r(s)$  в (3.10) и повторяя этот процесс  $\nu$  ( $\nu \in \mathbb{N}$ ) раз, получаем следующее представление функции  $u_r(t)$ :

$$u_r(t) = F_{\nu,r}(t) \lambda_r + G_{\nu,r}(u_r, t) + H_{\nu,r}(u_r, t) + K_{\nu,r}(t), \quad t \in [(r-1)h_0, rh_0], \quad r = \overline{1, N}, \quad (3.11)$$

где

$$F_{\nu,r}(t) = E_{\nu,r}(A(\cdot), A(\cdot) + B(\cdot), t), \quad K_{\nu,r}(t) = E_{\nu,r}(A(\cdot), f(\cdot), t), \quad H_{\nu,r}(t) = E_{\nu,r}(A(\cdot), B(\cdot) \max\{u_r(\tau)\}, t),$$

и

$$G_{\nu,r}(u_r, t) = \int_{(r-1)h_0}^t A(s_1) \dots \int_{(r-1)h_0}^{s_{\nu-1}} A(s_\nu) u_r(s_\nu) ds_\nu \dots ds_1, \quad t \in [(r-1)h_0, rh_0], \quad r = \overline{1, N}.$$

Определим  $\lim_{t \rightarrow rh_0-0} u_r(t)$ ,  $r = \overline{1, N}$  из формулы (3.11). Подставляя соответствующие выражения в (3.8), (3.9) и умножая (3.8) слева на  $h_0 > 0$ :  $Nh_0 = T$ , получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно параметров:

$$Q_\nu(h_0) \lambda = -K_\nu(h_0) - G_\nu(u, h_0) - H_\nu(u, h_0), \quad \lambda \in \mathbb{R}^{nN},$$

где  $Q_\nu(h_0) =$

$$\begin{pmatrix} h_0 B_0 & O & O & \dots & O & h_0 C_0(I + F_{\nu,N}(Nh_0)) \\ I + K_{\nu,1}(h_0) & -I & O & \dots & O & O \\ O & I + K_{\nu,2}(2h_0) & -I & \dots & O & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & O & \dots & -I & O \\ O & O & O & \dots & I + K_{\nu,N-1}((N-1)h_0) & -I \end{pmatrix},$$

$I : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  – единичная матрица,  $O : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  – нулевая матрица,

$K_\nu(h_0) = (-h_0 D_0 + h_0 C_0 F_{\nu,N}(Nh_0), K_{\nu,1}(h_0), \dots, K_{\nu,N-1}((N-1)h_0)) \in \mathbb{R}^{nN}$ ,

$G_\nu(u, h_0) = (h_0 C_0 G_{\nu,N}(u_N, Nh_0), G_{\nu,1}(u_1, h_0), \dots, G_{\nu,N-1}(u_{N-1}, (N-1)h_0))$ . Аналогично определяется  $H_\nu(u, h_0)$ .

Мы находим решение  $(\lambda, u(t))$  многоточечной краевой задачи с параметрами (3.1)–(3.5). Предположим, что для заданных  $\nu, h_0$  матрица  $Q_\nu(h_0) : \mathbb{R}^{nN} \rightarrow \mathbb{R}^{nN}$  имеет обратную.

a) Найдем начальное приближение для параметра  $\lambda^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_N^{(0)}) \in \mathbb{R}^{nN}$ , решая систему уравнений  $Q_\nu(h_0)\lambda = -F_\nu(h)$ .

b) Определим компоненты системы функций  $u^{(0)}(t) = (u_1^{(0)}(t), u_2^{(0)}(t), \dots, u_N^{(0)}(t))$  по формулам

$$u_r^{(0)}(t) = F_{\nu,r}(t)\lambda_r^{(0)} + K_{\nu,r}(t), \quad t \in [(r-1)h_0, rh_0], \quad r = \overline{1, N}.$$

c) Найдем следующее приближение параметра  $\lambda^{(1)} = (\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \dots, \lambda_N^{(1)}) \in \mathbb{R}^{nN}$ , решая систему уравнений  $Q_\nu(h_0)\lambda = -K_\nu(h_0) - G_\nu(u^{(0)}, h_0) - H_\nu(u^{(0)}, h_0)$ .

d) Определим компоненты системы функций  $u^{(1)}(t) = (u_1^{(1)}(t), u_2^{(1)}(t), \dots, u_N^{(1)}(t))$  по формулам

$$u_r^{(1)}(t) = F_{\nu,r}(t)\lambda_r^{(1)} + K_{\nu,r}(t) + G_{\nu,r}(u_r^{(0)}, t) + H_{\nu,r}(u_r^{(0)}), \quad t \in [(r-1)h_0, rh_0], \quad r = \overline{1, N}$$

и так далее. Продолжая этот процесс, на  $k$ -м шаге алгоритма мы получаем пару  $(\lambda^{(k)}, u^{(k)}(t))$ ,  $k = 0, 1, \dots$ . Ввиду эквивалентности задач (1.1)–(1.3) и (3.1)–(3.4) получаем, что справедлива следующая теорема:

**Теорема 3.1.** Краевая задача (1.1)–(1.3) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда для заданного  $h_0 > 0 : Nh_0 = T$  ( $N \in \mathbb{N}$ ),  $\chi \in (0, 1]$  существует  $\nu = \nu(h_0, \chi)$  ( $\nu \in \mathbb{N}$ ) такое, что матрица  $Q_\nu(h_0) : \mathbb{R}^{nN} \rightarrow \mathbb{R}^{nN}$  обратима, и выполнены условия теоремы 2.1.

## Заключение

В работе исследованы существование и единственность решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.1) с неизвестной функцией под знаком максимума. Система (1.1) изучается при начальных (1.2) и краевых (1.3) условиях. Метод сжимающих отображений используется для доказательства единственной разрешимости задачи (1.1)–(1.3) в пространстве  $BD([0, \omega], \mathbb{R}^n)$ . Практический способ решения задачи (1.1)–(1.3) с помощью метода параметризации сводится к исследованию разрешимости системы уравнений (3.1)–(3.4). Построен алгоритм решения задачи (3.1)–(3.4).

## Финансирование

Данное исследование поддержано Министерством высшего и среднего специального образования, науки и инновационного развития Республики Узбекистан (грант F-FA-2021-424).

## Вклад автора

Все авторы внесли равный вклад в написание этой статьи. Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

## Список литературы

- [1] Abramov, A. A.: *On the transfer of boundary conditions for systems of ordinary linear differential equations (a variant of the dispersive method)*. USSR Computat. Math. and Math. Phys. **1** (3), 617–622 (1962).
- [2] Agarwal, Ravi P.: *Boundary value problems for higher order differential equations*. World Scientific, Singapore, Philadelphia. (1986), 307 p.
- [3] Agarwal, Ravi P., Gupta, R. C.: *Essentials of ordinary differential equations*. McGraw-Hill Book Co., Singapore, New York. (1991), 467 p.
- [4] Agarwal, Ravi P.: *Focal boundary value problems for differential and difference equations*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. (1998), 289 p.
- [5] Agarwal, Ravi P., Grace, S. R., O'Regan, D.: *Oscillation theory for second order Linear differential equations*. Kluwer Academic Publishers, The Netherlands. (2002), 672.
- [6] Agarwal, Ravi P., Lakshmikantham, V.: *Uniqueness and nonuniqueness criteria for ordinary differential equations*. World Scientific, Singapore. (1993), 312.

- [7] Agarwal, Ravi P., O'Regan, D.: An introduction to ordinary differential equations. Springer Science+Business Media LLC, New York. (2008), ix+314.
- [8] Dzhumabayev, D. S.: *Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation*. USSR Computat. Math. and Math. Phys. **29** (1), 34–46 (1989).
- [9] Keller, H.: Numerical methods for two-point boundary value problems. Waltham, Blaisdell. (1968), 184.
- [10] Кигурадзе И. Т.: *Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений*. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. ВИНТИ АН СССР, Москва. (1987), 3–103.
- [11] Roberts, S. M., Shipman, J. S.: Two-point boundary-value problems: Shooting methods. Elsevier, New York. (1972), 269.
- [12] Ronto, M., Samoilenko, A. M.: Numerical-analytic methods for investigation of periodic solutions. World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong. (2000), 453.
- [13] Yuldashev, T. K.: *Periodic solutions for an impulsive system of nonlinear differential equations with maxima*. Nanosystems: Physics. Chemistry. Mathematics. **13** (2), 135–141 (2022). <https://doi.org/10.17586/2220-8054-2022-13-2-135-141>
- [14] Yuldashev, T. K.: *Periodic solutions for an impulsive system of integro-differential equations with maxima*. Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. **26** (2), 368–379 (2022). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1917>
- [15] Yuldashev, T. K., Abduvahobov, T. A.: *On a  $(\omega, c)$ -periodic solution for an impulsive system of second-order differential equation with product of two nonlinear functions and mixed maxima*. Uzbekistan Journal of Mathematics and Computer Science. **1** (1), 20–32 (2025). <https://doi.org/10.56143/ujmcs.112032>
- [16] Yuldashev, T. K., Fayziyev, A. K.: *Integral condition with nonlinear kernel for an impulsive system of differential equations with maxima and redefinition vector*. Lobachevskii Journal of Mathematics. **43** (8), 2332–2340 (2022). <https://doi.org/10.1134/S1995080222110312>
- [17] Yuldashev, T. K., Fayziyev, A. K.: *On a nonlinear impulsive system of integro-differential equations with degenerate kernel and maxima*. Nanosystems: Physics. Chemistry. Mathematics. **13** (1), 36–44 (2022). <https://doi.org/10.17586/2220-8054-2022-13-1-36-44>
- [18] Yuldashev, T. K., Fayziyev, A. K.: *Inverse problem for a second order impulsive system of integro-differential equations with two redefinition vectors and mixed maxima*. Nanosystems: Physics. Chemistry. Mathematics. **14** (1), 13–21 (2023). <https://doi.org/10.17586/2220-8054-2023-14-1-13-21>
- [19] Yuldashev, T. K., Apakov, Y. P., Zhuraev, A. K.: *Boundary value problem for third order partial integro-differential equation with a degenerate kernel*. Lobachevskii Journal of Mathematics. **42** (6), 1317–1327. (2021)
- [20] Assanova, A. T.: *On a nonlocal boundary-value problem for systems of impulsive hyperbolic equations*. Ukrainian Mathematical Journal. **65** (3), 349–365 (2013). <https://doi.org/10.1007/s11253-013-0782-x>.
- [21] Assanova, A. T.: *Solvability of a nonlocal problem for a hyperbolic equation with integral conditions*. Electronic Journal of Differential Equations. **2017** (170), 1–12 (2017).
- [22] Assanova, A. T.: *An integral-boundary value problem for a partial differential equation of second order*. Turkish Journal of Mathematics. **43** (4), 1967–1978 (2019). <https://doi.org/10.3906/mat-1903-111>.
- [23] Assanova, A. T., Bakirova, E. A., Kadirbayeva, Z. M., Uteshova, R. E.: *A computational method for solving a problem with parameter for linear systems of integro-differential equations*. Computational and Applied Mathematics. **39** (3), Art.no. 248 (2020). <https://doi.org/10.1007/s40314-020-01298-1>.
- [24] Assanova, A. T.: *On the solvability of nonlocal problem for the system of Sobolev-type differential equations with integral condition*. Georgian Mathematical Journal. **28** (1), 49–57 (2021). <https://doi.org/10.1515/gmj-2019-2011>.
- [25] Assanova, A. T.: *A generalized integral problem for a system of hyperbolic equations and its applications*. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics. **52** (6), 1513–1532 (2023). <https://doi.org/10.15672/hujms.1094454>.
- [26] Assanova, A. T., Mynbayeva, S. T.: *New general solution to a quasilinear Fredholm integro-differential equation and its application*. Lobachevskii Journal of Mathematics **44** (10), 4231–4239 (2023). <https://doi.org/10.1134/S1995080223100062>.
- [27] Dzhumabaev, D. S.: *On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integrodifferential equations*. J. of Comp. and Applied Math. **294**, 342–357 (2016).
- [28] Dzhumabaev, D. S.: *Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation*. USSR Comput. Math. Math. Phys. **29** (1), 34–46 (1989).
- [29] Dzhumabaev, D. S., Dzhumabaev, A. D., Assanova, A. T.: *Properties of a partial Fredholm integro-differential equations with nonlocal condition and algorithms*. Mediterranean Journal of Mathematics **21** (6), Art. No. 169 (2024). <https://doi.org/10.1007/s00009-024-02712-2>.
- [30] Tleulessova, A. B.: *On the correct solvability of a two-point boundary value problem with impulsive action*. Almaty Mat. Zhurn. **4** (3), 87–95 (2005).
- [31] Tleulessova, A. B.: *On the unique solvability of a two-point boundary value problem with impulsive action*. Almaty, Mat. Zhurn. **4** (4), 93–102 (2004).
- [32] Temesheva, S. M., Dzhumabaev, D. S., Kabdrakhova, S. S.: *On one algorithm to find a solution to a linear two-point boundary value problem*. Lobachevskii Journal of Mathematics. **42** (3), 606–612 (2021). <https://doi.org/10.1134/S1995080221030173>
- [33] Yuldashev, T. K., Fayziyev, A. K.: *Periodic solutions of impulsive system of equations with a nonlinear function under the sign of a second-order differential and maxima*. Lobachevskii Journal of Mathematics. **46** (2), 658–671 (2025). <https://doi.org/10.1134/S1995080225600256>

## Two-point boundary value problem for a system of functional-differential equations with maxima

T. K. Yuldashev\*, M. A. Tleubergenova, A. K. Tankeyeva, A. Molybaikyzy

## Abstract

This article considers the questions of two-point boundary value problem for a system of first-order ordinary differential equations with maxima. The parametrization method is using. The convergence conditions are obtained and the algorithms of solving are built. The necessary and sufficient coefficient conditions for the well-posedness of considered problem are established. The method of contracted mapping is used in the proof of unique solvability of functional-integral equations in the space  $BD([0, \omega], \mathbb{R}^n)$ .

## Affiliations

Yuldashev Tursun Kamaldinovich

**Address:** Tashkent State Transport University, Dept. of Higher Mathematics, 100169, Tashkent, Uzbekistan.

**e-mail:** tursun.k.yuldashev@gmail.com

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0002-9346-5362>

Tleubergenova Madina Almukhanovna

**Address:** K. Zhubanov Aktobe Regional University, Dept. of Mathematics, Aktobe, Kazakhstan

**e-mail:** madina\_1970@mail.ru

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0002-5572-2305>

Tankeyeva Aigerim Kiyevna

**Address:** K. Zhubanov Aktobe Regional University, Dept. of Mathematics, Aktobe, Kazakhstan

**e-mail:** aigerimtankeyeva@gmail.com

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0002-3897-5909>

Molybaikyzy Altynay

**Address:** Kazakh National Women's Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan

**e-mail:** altynaimolybai@gmail.com

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0009-0008-2452-5932>



# Структуросохраняющая схема для двухфазной конвективно–реакционно–диффузионной системы

А. Элмуродов и А. Сотволдиев

## Аннотация

В данной работе предложена новая явная численная схема, сохраняющая структуру, для двухфазной конвективно–реакционно–диффузионной системы с динамически эволюционирующей межфазной границей. Для решения и свободной границы получены априорные оценки в нормах Гёльдера, что позволяет доказать существование и единственность классического решения, а также исследовать его качественные свойства. Проведён сравнительный анализ трёх численных подходов: неявной противоточной схемы, схемы Кранка–Николсона и предложенной явной схемы. Численные эксперименты подтверждают робастность и устойчивость нового метода, в том числе в режимах с преобладающей адвекцией и сильно нелинейными реакционными членами. Предложенная схема обеспечивает физически корректные результаты и может быть эффективно использована для моделирования процессов, управляемых движущимися интерфейсами, возникающих, в частности, при остеointegrации вокруг зубных имплантатов, биологической инвазии и фазовых переходах с резкой границей.

*Ключевые слова:* задача со свободной границей, адвекция, реакция, диффузия, структуросохраняющий метод, устойчивость, численное моделирование.

*Предметная классификация AMS (2020):* Основная: 35B45 ; Дополнительная: 35K20; 35K57; 35K59.

## 1. Введение

Уравнения конвекции–реакции–диффузии занимают ключевое место в математическом моделировании широкого круга сложных процессов в физике, химии, биологии и инженерных науках. В последние годы они активно используются для описания пространственного распределения видов в экологии [1], [2], [3], [4],[5], динамики концентраций в химических реакциях [6], [7], [8], распространения сигналов в биологических тканях [9], а также, сравнительно недавно, для моделирования эволюции тканей вокруг биомедицинских имплантатов [10], [11]. Подобные модели применяются и при исследовании ряда других родственных процессов. В общем одномерном случае уравнение конвекции–реакции–диффузии с нелинейным реакционным членом может быть записано в виде

$$\partial_t w = \nabla \cdot (\mathbf{D} \nabla w) - \mathbf{c} \cdot \nabla w + f(w),$$

где  $w$  обозначает концентрацию вещества или плотность популяции,  $\mathbf{c}$  — скорость адвекции (массового переноса),  $\mathbf{D}$  — тензор диффузии, а  $f(w)$  — нелинейный реакционный член, описывающий локальную кинетику процесса.

В настоящей работе рассматривается двухфазная система конвекции–реакции–диффузии, в которой два различных компонента занимают дополняющие друг друга пространственные области, разделённые подвижной

межфазной границей  $s(t)$ . Полная математическая модель имеет вид

$$u_t - u_{xx} - c_1 u_x = u(a_1 - b_1 u), \quad (x, t) \in D_1, \quad (1.1)$$

$$v_t - v_{xx} - c_2 v_x = v(a_2 - b_2 v), \quad (x, t) \in D_2, \quad (1.2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad -\ell \leq x \leq s(0) = 0, \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad s(0) = 0 \leq x \leq \ell, \quad (1.3)$$

$$u(-\ell, t) = \varphi_1(t), \quad u(s(t), t) = v(s(t), t) = 0, \quad v(\ell, t) = \varphi_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.4)$$

$$\dot{s}(t) = -\alpha u_x(s(t), t) + \beta v_x(s(t), t), \quad s(0) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (1.5)$$

Здесь области определения заданы как  $D_1 = \{(x, t) : 0 < t \leq T, -\ell < x < s(t)\}$  и  $D_2 = \{(x, t) : 0 < t \leq T, s(t) < x < \ell\}$ . Параметры системы удовлетворяют условиям  $a_i, b_i, \alpha, \beta > 0$ ,  $c_i \in \mathbb{R}$ . Граничные функции  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  принадлежат классу  $C^{1+\gamma/2}([0, T])$  и являются строго положительными, а начальные профили  $u_0$  и  $v_0$  предполагаются гладкими и согласованными с граничными условиями:

$$\begin{cases} u_0(0) = 0, & u_0 \in C^{2+\gamma}([-\ell, 0]), \\ u_0(x) > 0, & x \in [-\ell, 0), \quad u_0(-\ell) = \varphi_1(0), \end{cases} \quad \begin{cases} v_0(0) = 0, & v_0 \in C^{2+\gamma}([0, \ell]), \\ v_0(x) > 0, & x \in (0, \ell], \quad v_0(\ell) = \varphi_2(0). \end{cases}$$

Функции  $u(x, t)$  и  $v(x, t)$  интерпретируются как концентрации двух веществ либо плотности двух взаимодействующих популяций, например инвазивного и аборигенного видов. Параметры  $c_1$  и  $c_2$  задают скорости адвекции,  $a_1, a_2$  — коэффициенты роста,  $b_1, b_2$  — интенсивности внутривидовой конкуренции, а  $\alpha$  и  $\beta$  являются коэффициентами пропорциональности в условиях Стефана. Начальные функции  $u_0(x)$  и  $v_0(x)$  являются гладкими и положительными, что согласуется с физической постановкой задачи.

На практике многие физические и биологические системы не развиваются в рамках единой однородной фазы. Напротив, они формируются в различных областях, разделённых интерфейсом, положение которого изменяется со временем. Характерным примером служит процесс остеоинтеграции вокруг зубных имплантатов, широко обсуждаемый как в клинических, так и в модельных исследованиях. В этом случае титановый имплантат выступает в роли пассивной, не реагирующей фазы, тогда как прилегающая костная ткань остаётся метаболически активной и динамически адаптивной. Взаимодействие между этими средами локализовано вблизи подвижной границы, скорость которой определяется биофизическими механизмами обратной связи [10].

Подобная двухфазная структура не является исключением. Она возникает и в моделях роста опухолей, где злокачественная ткань вытесняет здоровую [12], а также в классических задачах фазовых переходов, например при замерзании воды, когда фронт фазового перехода распространяется вдоль резкой подвижной границы [13].

С математической точки зрения такие процессы относятся к классу задач со свободной границей, в частности к моделям стефановского типа, в которых скорость движения интерфейса не задаётся априори, а определяется потоками соответствующих переменных состояния. Эта связь отражает физическую или биологическую природу движения границы и является принципиально важной для корректного описания динамики системы.

Численное моделирование двухфазных систем конвекции–реакции–диффузии представляет собой нетривиальную задачу. Во-первых, положение свободной границы должно пересчитываться на каждом временном шаге, что исключает использование фиксированной пространственной сетки. Во-вторых, нелинейные реакционные члены, например логистический член  $w(a - bw)$ , в рамках стандартных численных схем могут приводить к потере неотрицательности решения, возникновению не физических осцилляций и даже к численной неустойчивости [14]. Наконец, несмотря на то что каждая фаза описывается собственным уравнением в частных производных, они связаны между собой нелинейными условиями на интерфейсе, что требует согласованного и глобально корректного численного подхода.

В связи с этим в последние годы значительное внимание уделяется структуросохраняющим, а в частности, сохраняющим неотрицательность численным методам [15], [16], [17], [18], [19]. Цель таких подходов заключается не только в аппроксимации точного решения, но и в строгом соблюдении фундаментальных физических

ограничений, включая неотрицательность концентраций, естественные верхние оценки плотностей популяций и корректную асимптотику при выходе системы на стационарные режимы.

Получение точных аналитических решений для систем подобного типа, как правило, невозможно, поскольку уже наличие подвижной границы существенно усложняет задачу. Вместе с тем корректное описание движения интерфейса является принципиально важным, поскольку без него любая модель быстро теряет физическую достоверность.

Исходя из этого, в настоящей работе используется стратегия отслеживания фронта, в рамках которой рассматриваются три численных подхода: неявная противоточная схема, схема Кранка–Николсона и новая явная схема, предлагаемая в статье. Последняя специально сконструирована для сохранения неотрицательности решения и структурных свойств исходной модели. Основная цель работы состоит не только в повышении вычислительной эффективности, но и в разработке численных схем, которые остаются физически корректными, устойчивыми и согласованными с фундаментальными свойствами непрерывной задачи.

## 2. Априорные оценки

В этом разделе устанавливаются априорные оценки в гёlderовых нормах, необходимые для доказательства глобальной разрешимости рассматриваемой задачи. Ключевую роль в дальнейшем анализе играет принцип максимума для параболических уравнений (см., например, [19]).

Одной из основных трудностей при построении нелокальной теории нелинейных задач является получение подходящих оценок для первых производных решения по пространственной переменной. Для преодоления этой сложности в литературе предложен ряд различных подходов.

В настоящей работе мы используем методику, изложенную в [6], [5], [20], для получения необходимых *a priori* оценок и следуем обозначениям и соглашениям, принятым в [21], [22].

**Лемма 2.1.** Пусть тройка  $(s(t), u(x, t), v(x, t))$  является классическим решением системы (1.1)–(1.5).

Определим положительные константы  $N_1$  и  $N_2$  по формулам  $N_1 = \max \left\{ \sup_{-\ell \leq x \leq 0} \left( \frac{u_0(x)}{-x} \right), \frac{a_1^2}{b_1 c_1} \right\}$ ,  $N_2 = \max \left\{ \sup_{0 \leq x \leq \ell} \left( \frac{v_0(x)}{x} \right), \frac{a_2^2}{b_2 c_2} \right\}$ . Если начальные условия удовлетворяют ограничениям  $0 \leq u_0(x) \leq \frac{a_1}{b_1}$ ,  $0 \leq v_0(x) \leq \frac{a_2}{b_2}$ , то существуют положительные константы  $M_1 = \frac{a_1}{b_1}$ ,  $M_2 = \frac{a_2}{b_2}$  и  $M_3 = \alpha N_1 + \beta N_2$ , не зависящие от  $T$ , такие что справедливы оценки

$$0 < u(x, t) \leq M_1 \quad \text{при } (x, t) \in D_1, \quad 0 < v(x, t) \leq M_2 \quad \text{при } (x, t) \in D_2, \quad 0 < \dot{s}(t) \leq M_3, \quad 0 \leq t \leq T.$$

*Доказательство.* Начнём с применения параболического принципа максимума к уравнениям (1.1)–(1.2). Реакционные члены  $f_1(u) = u(a_1 - b_1 u)$  и  $f_2(v) = v(a_2 - b_2 v)$  удовлетворяют условиям  $f_i(0) = 0$ , причём каждая функция  $f_i$  липшицева. Поскольку  $u_0(x), v_0(x) \geq 0$ , а также выполнены граничные условия  $u(s(t), t) = v(s(t), t) = 0$ ,  $u(-\ell, t) = \varphi_1(t) \geq 0$ ,  $v(\ell, t) = \varphi_2(t) \geq 0$ , из принципа максимума (см., например, [19, Theorem 2]) следует, что

$$u(x, t) \geq 0 \quad \text{в } D_1, \quad v(x, t) \geq 0 \quad \text{в } D_2.$$

Если дополнительно  $u_0(0) = v_0(0) = 0$  и  $u_0, v_0 \not\equiv 0$ , то по сильному принципу максимума получаем

$$u(x, t) > 0 \quad \text{в } D_1, \quad v(x, t) > 0 \quad \text{в } D_2, \quad t > 0.$$

Для получения верхних оценок введём вспомогательную функцию  $\omega(x, t) = \begin{cases} u(x, t), & (x, t) \in D_1, \\ v(x, t), & (x, t) \in D_2, \end{cases}$  для

которой реакционный член имеет вид  $f(x, t, \omega) = \omega(a_i - b_i \omega)$  ( $i = 1, 2$ ). Поскольку  $\underline{\omega} = 0$  и  $\bar{\omega} = \frac{a_i}{b_i}$  являются

соответственно под- и надрешением, то из принципа максимума следует

$$0 < u(x, t) \leq \frac{a_1}{b_1} = M_1, \quad (x, t) \in D_1, \quad 0 < v(x, t) \leq \frac{a_2}{b_2} = M_2, \quad (x, t) \in D_2.$$

Далее, для оценки градиентов вблизи свободной границы рассмотрим функцию

$$U(x, t) = N_1(s(t) - x) - u(x, t),$$

где  $N_1 > 0$  – константа, подлежащая выбору. Тогда  $U$  удовлетворяет

$$\begin{cases} U_t - U_{xx} - c_1 U_x \geq c_1 N_1 - \frac{a_1^2}{b_1} \geq 0, \\ U(x, 0) = N_1(-x) - u_0(x) \geq 0, \\ U(-\ell, t) = N_1(s(t) + \ell) - \varphi_1(t) \geq 0, \\ U(s(t), t) = 0. \end{cases}$$

Следовательно, по принципу максимума  $U(x, t) \geq 0$  в  $D_1$ , откуда  $u(x, t) \leq N_1(s(t) - x)$ ,  $-\ell \leq x \leq s(t)$ . Переходя к левой производной при  $x = s(t)$ , получаем  $-N_1 \leq u_x(s(t), t) < 0$ .

Аналогичные рассуждения для второй фазы дают  $0 < v_x(s(t), t) \leq N_2$ .

Наконец, из условия на свободной границе (1.5) следует

$$0 < \dot{s}(t) \leq \alpha N_1 + \beta N_2 = M_3,$$

что завершает доказательство. □

Для получения верхних оценок для  $u_x$ ,  $v_x$  и гёльдеровских норм  $|u|_Q^{(2+\gamma)}$  и  $|v|_Q^{(2+\gamma)}$  предварительно сведём подвижные области к фиксированной. Следуя [6], [19], введём замену переменных

$$\text{для } D_1: \quad \tau = t, \quad y = \frac{x + \ell}{\ell + s(t)}, \quad \text{для } D_2: \quad \tau = t, \quad y = \frac{x - \ell}{\ell - s(t)}.$$

Для левой фазы отображение  $\tau = t, y = \frac{x + \ell}{\ell + s(t)}$  переводит движущуюся область  $(-\ell, s(t))$  в фиксированный интервал  $(0, 1)$ . В результате обе области переходят в фиксированный цилиндр  $Q = \{(y, \tau) : 0 < y < 1, 0 < \tau < T\}$ .

Полагая  $U(y, \tau) = u(x, t)$ , из формулы цепочки получаем

$$u_t = U_\tau - \frac{y s'(t)}{\ell + s(t)} U_y, \quad u_x = \frac{1}{\ell + s(t)} U_y, \quad u_{xx} = \frac{1}{(\ell + s(t))^2} U_{yy}.$$

Определим новые неизвестные  $U(y, \tau) = u(x, t)$  и  $V(y, \tau) = v(x, t)$ . Подставляя эти выражения в уравнения (1.1), (1.2) и приводя подобные, получаем квазилинейные параболические задачи вида

$$\begin{cases} U_\tau = A_1(\tau)U_{yy} + F_1(U, U_y), & (y, \tau) \in Q, \\ U(y, 0) = U_0(y), & 0 \leq y \leq 1, \\ U(1, \tau) = 0, \quad U(0, \tau) = \varphi_1(\tau), \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\begin{cases} V_\tau = A_2(\tau)V_{yy} + F_2(V, V_y), & (y, \tau) \in Q, \\ V(y, 0) = V_0(y), & 0 \leq y \leq 1, \\ V(0, \tau) = 0, \quad V(1, \tau) = \varphi_2(\tau). \end{cases} \quad (2.2)$$

Здесь преобразованные начальные данные имеют вид  $U_0(y) = u_0(y(\ell + s(t)) - \ell)$ ,  $V_0(y) = v_0(y(\ell - s(t)) + \ell)$ , а коэффициенты задаются формулами  $A_1(\tau) = \frac{4}{(\ell + s(\tau))^2}$ ,  $A_2(\tau) = \frac{4}{(\ell - s(\tau))^2}$ ,  $F_1(U, U_y) = \left[ \frac{2c_1(\ell + s(\tau)) - 2s(\tau)(x + \ell)}{(\ell + s(\tau))^2} \right] U_y + U(a_1 - b_1 U)$ ,  $F_2(V, V_y) = \left[ \frac{-2c_2(\ell - s(\tau)) - 2s(\tau)(x - \ell)}{(\ell - s(\tau))^2} \right] V_y + V(a_2 - b_2 V)$ .

По лемме 2.1 имеем  $0 < u \leq M_1$ ,  $0 < v \leq M_2$ ,  $0 < \dot{s}(t) \leq M_3$ . Кроме того, так как  $s(t) \in [0, s_{\max})$  при  $s_{\max} < \ell$ , величины  $\ell \pm s(t)$  строго положительны. Следовательно, коэффициенты  $A_i$  и  $F_i$  равномерно ограничены в области  $Q$ . Для любого  $\delta \in (0, 1)$  обозначим внутреннюю подобласть  $Q_\delta = \{(y, \tau) : \delta \leq y \leq 1 - \delta, \delta \leq \tau \leq T\}$ .

**Теорема 2.1.** Пусть  $U(y, \tau)$  является классическим решением задачи (2.1). Тогда существует константа  $M_4 = M_4(M_1, \delta) > 0$ , не зависящая от  $T$ , такая что

$$|U_y(y, \tau)| \leq M_4, \quad (y, \tau) \in Q_\delta.$$

Если, кроме того,  $U|_{\partial_p Q} = 0$  на параболической границе  $\partial_p Q = \{\tau = 0\} \cup \{y = 0\} \cup \{y = 1\}$ , то оценка справедлива во всей области  $Q$ :

$$|U_y(y, \tau)| \leq M_4(M_1, A_{10}), \quad (y, \tau) \in Q,$$

где  $A_{10} = \min\{A_1\} > 0$ .

*Доказательство.* Поскольку функция  $U(y, \tau)$  ограничена константой  $M_1$ , а коэффициенты  $A_1$  и  $F_1$  равномерно ограничены в области  $Q$ , из внутренней оценки градиента для квазилинейных параболических уравнений (см., например, [22, Theorem 2.1]) следует

$$|U_y(y, \tau)| \leq M_4, \quad (y, \tau) \in Q_\delta.$$

Чтобы распространить оценку на границу, введём функцию  $W(y, \tau) = U(y, \tau) - U_0(y)$ . Тогда  $W$  удовлетворяет

$$\begin{cases} W_\tau = A_1 W_{yy} + G_1(W, W_y), \\ W(y, 0) = 0, \quad W(0, \tau) = 0, \quad W(1, \tau) = 0, \end{cases}$$

где  $G_1 = F_1(U, U_y) - A_1(U_0)_{yy}$ .

Так как  $U_0(y) \in C^{2+\gamma}([0, 1])$ , то  $(U_0)_{yy}$  ограничена, и, следовательно, функция  $G_1$  также ограничена в  $Q$ . Применяя глобальную оценку градиента для параболических уравнений ([22, Chapter III, Theorem 4.1]), заключаем, что  $U_y$  ограничена во всей области  $Q$ . Аналогичный аргумент применим к функции  $V(y, \tau)$ .  $\square$

Возвращаясь к исходным переменным, из оценок для  $U_y$  и  $V_y$  получаем

$$|u_x(x, t)| \leq C_1 M_4, \quad |v_x(x, t)| \leq C_2 M_4,$$

для всех  $(x, t)$  из внутренних подобластей  $D_1^\delta$  и  $D_2^\delta$ , отделённых от начального момента времени и фиксированных границ  $x = \pm \ell$ .

Для вывода гёльдеровских оценок более высокого порядка рассмотрим, например, уравнение для  $v$ :

$$v_t = v_{xx} + q(v, v_x), \quad q(v, v_x) = v(a_2 - b_2 v) + c_2 v_x.$$

Из леммы 2.1 и теоремы 2.1 следует, что  $|v| \leq M_2$  и  $|v_x| \leq M_4$ . Следовательно, для некоторой константы  $R = R(M_2, c_2) > 0$  имеем

$$|q(v, v_x)| \leq R(v_x^2 + 1).$$

**Теорема 2.2.** Пусть  $v \in L^2(D_2)$  и его слабые производные удовлетворяют условиям  $v_{xx}, v_{tx} \in L^2(D_2)$ . Тогда существует константа  $M_5 = M_5(M_2, R) > 0$  такая, что

$$|v|_{D_2^\delta}^{(1+\gamma/2, 1+\gamma)} \leq M_5.$$

Более того, если линеаризованное уравнение

$$\tilde{a}(y, \tau)w_{yy} + \tilde{b}(y, \tau)w_y + \tilde{c}(y, \tau)w - w_\tau = \tilde{f}(y, \tau)$$

имеет гёльдеровски непрерывные коэффициенты, удовлетворяющие

$$|\tilde{a}|_Q^{(\gamma)} + |\tilde{b}|_Q^{(\gamma)} + |\tilde{c}|_Q^{(\gamma)} + |\tilde{f}|_Q^{(\gamma)} < \infty, \quad \tilde{a} \geq a_0 > 0,$$

и если  $w = 0$  на параболической границе, то (см. [22, Theorem 5.3])

$$|w|_Q^{(2+\gamma)} \leq C \left( |\tilde{f}|_Q^{(\gamma)} + \max_Q |w| \right) = M_7.$$

*Доказательство.* Применяя указанную оценку к функциям  $U(y, \tau)$  и  $V(y, \tau)$ , получаем

$$|U|_Q^{(2+\gamma)} \leq M_7, \quad |V|_Q^{(2+\gamma)} \leq M_7.$$

Переходя к исходным переменным, имеем

$$|u|_{D_1}^{(2+\gamma)} \leq CM_7, \quad |v|_{D_2}^{(2+\gamma)} \leq CM_7,$$

где константа  $C$  зависит только от  $\ell$ ,  $M_3$  и  $\gamma$ , но не зависит от  $T$ . Тем самым необходимые априорные оценки для  $u_x, v_x$  и гёльдеровских норм  $|u|^{(2+\gamma)}, |v|^{(2+\gamma)}$  установлены.  $\square$

Регулярность свободной границы  $s(t)$  непосредственно следует из условия Стефана

$$s'(t) = -\alpha u_x(s(t), t) + \beta v_x(s(t), t),$$

вместе с априорными оценками градиента, полученными в лемме 2.1 и теореме 2.1. Действительно, производные  $u_x$  и  $v_x$  равномерно ограничены и гёльдеровски непрерывны вплоть до свободной границы, то есть  $u_x, v_x \in C^{\gamma/2, \gamma}(\bar{D}_i)$ ,  $i = 1, 2$ . Следовательно, правая часть условия Стефана принадлежит классу  $C^{\gamma/2}([0, T])$ , откуда  $s \in C^{1+\gamma/2}([0, T])$ .

Такой уровень регулярности согласуется с классическими результатами для одномерных задач со свободной границей стефановского типа (см., например, [21, 22]) и является достаточным для корректности преобразованных параболических задач.

*Замечание 2.1.* Для построения и анализа предлагаемой численной схемы более высокая регулярность свободной границы не требуется.

### 3. Единственность решения

Для установления единственности классического решения задачи (1.1)–(1.5) рассмотрим интегральное представление свободной границы  $s(t)$  (см. [19]):

$$\begin{aligned} s(t) = & \beta \int_{s(t)}^{\ell} v(\xi, t) d\xi - \beta \iint_{D_2} v(a_2 - b_2 v) d\xi d\tau + \alpha \int_{-\ell}^{s(t)} u(\xi, t) d\xi - \alpha \int_{-\ell}^0 u_0(\xi) d\xi \\ & + \beta \int_0^{\ell} v_0(\xi) d\xi - \alpha \iint_{D_1} u(a_1 - b_1 u) d\xi d\tau - \beta c_2 \int_0^t v(\ell, \tau) d\tau - \alpha c_1 \int_0^t u(-\ell, \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (3.1)$$

**Теорема 3.1.** Пусть начальные и граничные условия заданы в указанном выше виде и выполнены предположения леммы 2.1. Тогда классическое решение задачи (1.1)–(1.5) является единственным.

*Доказательство.* Предположим, что существуют два классических решения  $(s_1(t), u_1(x, t), v_1(x, t))$  и  $(s_2(t), u_2(x, t), v_2(x, t))$ . Введём функции  $y(t) = \min\{s_1(t), s_2(t)\}$ ,  $h(t) = \max\{s_1(t), s_2(t)\}$ .

Поскольку оба решения удовлетворяют тождеству (3.1), вычитая соответствующие равенства, получаем оценку

$$\begin{aligned}
 |s_1(t) - s_2(t)| &\leq \alpha \int_{-\ell}^{y(t)} |u_1(\xi, t) - u_2(\xi, t)| d\xi + \beta \int_{y(t)}^{\ell} |v_1(\xi, t) - v_2(\xi, t)| d\xi \\
 &+ \alpha \int_0^t \int_{-\ell}^{y(\tau)} |u_1(a_1 - b_1 u_1) - u_2(a_1 - b_1 u_2)| d\xi d\tau + \alpha \int_0^t \int_{y(\tau)}^{h(\tau)} |u_i(a_1 - b_1 u_i)| d\xi d\tau \\
 &+ \beta \int_0^t \int_{y(\tau)}^{\ell} |v_1(a_2 - b_2 v_1) - v_2(a_2 - b_2 v_2)| d\xi d\tau + \beta \int_0^t \int_{y(\tau)}^{h(\tau)} |v_i(a_2 - b_2 v_i)| d\xi d\tau, \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

где в промежуточной области между  $y(t)$  и  $h(t)$  полагаем

$$(u_i(x, t), v_i(x, t)) = \begin{cases} (u_1(x, t), v_1(x, t)), & \text{если } s_2(t) < s_1(t), \\ (u_2(x, t), v_2(x, t)), & \text{если } s_2(t) > s_1(t). \end{cases}$$

Далее введём функции разности  $U(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ ,  $V(x, t) = v_1(x, t) - v_2(x, t)$ . Они удовлетворяют следующим краевым задачам:

$$\begin{cases} U_t - U_{xx} - c_1 U_x + A_1(x, t) U = 0, & (x, t) \in D_1^*, \\ U(x, 0) = 0, & -\ell \leq x \leq 0, \quad U(-\ell, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ |U(y(t), t)| \leq M_4 \max_{0 \leq \tau \leq t} |s_1(\tau) - s_2(\tau)|, & 0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\begin{cases} V_t - V_{xx} - c_2 V_x + A_2(x, t) V = 0, & (x, t) \in D_2^*, \\ V(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq \ell, \quad V(\ell, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ |V(y(t), t)| \leq M_5 \max_{0 \leq \tau \leq t} |s_1(\tau) - s_2(\tau)|, & 0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (3.4)$$

где  $A_1(x, t) = a_1 - b_1(u_1 + u_2)$ ,  $A_2(x, t) = a_2 - b_2(v_1 + v_2)$ , а константы  $M_4 = \max_{D_1} |u_x|$ ,  $M_5 = \max_{D_2} |v_x|$  ограничены в силу леммы 2.1 и теоремы 2.1.

Поскольку указанные выше уравнения линейны и имеют ограниченные коэффициенты, из параболического принципа максимума (см. [19]) следует, что

$$|U(x, t)| \leq N_1 \max_{0 \leq \tau \leq t} |s_1(\tau) - s_2(\tau)|, \quad |V(x, t)| \leq N_2 \max_{0 \leq \tau \leq t} |s_1(\tau) - s_2(\tau)|, \quad (3.5)$$

где  $N_1 > 0$  и  $N_2 > 0$  зависят только от начальных данных и параметров системы.

Далее оценим слагаемые в (3.2), используя оценку (3.5). В частности, для первого интеграла имеем

$$\int_{-\ell}^{y(t)} |U(\xi, t)| d\xi \leq N_1 (\ell + y(t)) \max_{0 \leq \tau \leq t} |s_1(\tau) - s_2(\tau)| \leq 2\ell N_1 \max_{0 \leq \tau \leq t} |s_1(\tau) - s_2(\tau)|.$$

Аналогично, каждое из остальных слагаемых в (3.2) оценивается величиной, пропорциональной  $\max_{0 \leq \tau \leq t} |s_1(\tau) - s_2(\tau)|$ . В итоге получаем интегральное неравенство

$$|s_1(t) - s_2(t)| \leq N_3 \int_0^t \max_{0 \leq \tau \leq \sigma} |s_1(\tau) - s_2(\tau)| d\sigma,$$

где  $N_3 > 0$  не зависит от  $T$ .

Применяя лемму Гронуолла, заключаем, что  $\max_{0 \leq t \leq T} |s_1(t) - s_2(t)| = 0$ , откуда  $s_1(t) \equiv s_2(t)$ .

Подставляя это равенство в (3.3)–(3.4), получаем однородные граничные условия, и, вновь используя принцип максимума, приходим к выводу, что  $U \equiv 0$  и  $V \equiv 0$ .

Следовательно, оба классических решения полностью совпадают, и решение задачи (1.1)–(1.5) является единственным. Доказательство проводится в рамках методики, использованной в [5], [20].  $\square$

#### 4. Существование решения

Для доказательства существования классического решения задачи (1.1)–(1.5) используем априорные оценки, полученные в предыдущих разделах. Применяя подходящую замену переменных, свободная граница отображается на фиксированную область, что приводит к эквивалентным переформулированным системам (2.1)–(2.2).

**Теорема 4.1.** Пусть выполнены априорные оценки, установленные в лемме 2.1 и теореме 2.2. Тогда задача (1.1)–(1.5) допускает классическое решение, удовлетворяющее соотношениям

$$u \in C^{2+\gamma, 1+\gamma/2}(\overline{D}_1), \quad v \in C^{2+\gamma, 1+\gamma/2}(\overline{D}_2), \quad s \in C^{1+\gamma/2}([0, T]).$$

*Доказательство.* Доказательство основано на итерационной процедуре. В качестве начального приближения для свободной границы положим  $s^{(0)}(t) \equiv 0$ . Пусть для некоторого  $k \geq 0$  функция  $s^{(k)}(t)$  уже построена. Тогда при фиксированной  $s^{(k)}(t)$  решаем задачи (2.1)–(2.2) и находим функции  $U^{(k+1)}$  и  $V^{(k+1)}$ , удовлетворяющие граничным условиям, соответствующим  $s^{(k)}(t)$ . После этого свободная граница обновляется по формуле

$$\dot{s}^{(k+1)}(t) = -\alpha U_y^{(k+1)}(1, t) + \beta V_y^{(k+1)}(-1, t), \quad s^{(k+1)}(0) = 0.$$

Из леммы 2.1 и теоремы 2.2 следует, что последовательности  $\{U^{(k)}\}$ ,  $\{V^{(k)}\}$  и  $\{s^{(k)}\}$  равномерно ограничены в гёльдеровских нормах. В частности, существуют положительные константы  $N_i$  ( $i = 4, 5, 6$ ), не зависящие от номера итерации  $k$  и от  $T$ , такие что

$$|U^{(k)}|_Q^{(2+\gamma)} \leq N_4, \quad |V^{(k)}|_Q^{(2+\gamma)} \leq N_5, \quad |s^{(k)}|_{[0, T]}^{(1+\gamma/2)} \leq N_6.$$

Здесь константы  $N_i$  зависят только от начальных данных и фиксированных параметров задачи  $\ell, a_i, b_i, c_i, \alpha, \beta$  и  $\gamma$ , но не зависят от  $k$  и  $T$ .

В силу теоремы Арцела–Асколи и компактности вложений в гёльдеровских пространствах можно выделить сходящиеся подпоследовательности  $\{U^{(k)}\}$ ,  $\{V^{(k)}\}$  и  $\{s^{(k)}\}$  такие, что

$$U^{(k)} \rightarrow U, \quad V^{(k)} \rightarrow V, \quad s^{(k)} \rightarrow s$$

равномерно на компактных подмножествах. Переход к пределу в уравнениях и граничных условиях обосновывается стандартными методами функционального анализа (см., например, [22, Chapter V]).

Таким образом, предельная тройка  $(U, V, s)$  образует классическое решение преобразованной задачи. Возвращаясь к исходным переменным с помощью обратного преобразования, получаем классическое решение  $(u, v, s)$  исходной задачи со свободной границей (1.1)–(1.5).

Наконец, поскольку все априорные оценки являются равномерными по  $T$ , решение может быть продолжено пошагово по времени, что обеспечивает глобальное существование для любого  $T > 0$ . Следовательно, благодаря независимости априорных оценок от  $T$ , решение задачи не только локально существует и единственно, но и допускает глобальное продолжение на произвольные промежутки времени.

Тем самым установлено, что система со свободной границей (1.1)–(1.5) обладает глобальным классическим решением. Полученный результат служит строгим математическим обоснованием для численных экспериментов, представленных ниже, поскольку физическая корректность численных результатов может быть гарантирована лишь при наличии корректно поставленной задачи, обладающей существующим и единственным решением.  $\square$

## 5. Численные методы

Двухфазная система адвекции–реакции–диффузии (1.1)–(1.5) является нелинейной и содержит подвижную свободную границу стефановского типа. В связи с этим при построении численных схем необходимо обеспечить устойчивость, согласованность аппроксимации и сохранение ключевых качественных свойств непрерывной задачи, прежде всего неотрицательности решения.

Пусть пространственный интервал  $[-\ell, \ell]$  аппроксимируется равномерной сеткой с шагом  $h = \frac{2\ell}{M}$ , а временной интервал  $[0, T]$  разбивается на шаги длины  $k = \frac{T}{N}$ . Узлы сетки определяются как  $x_i = -\ell + ih$ , где  $i = 0, 1, \dots, M$ ;  $t^n = nk$ , где  $n = 0, 1, \dots, N$ . Численные приближения обозначим следующим образом:

$$u_i^n \approx u(t^n, x_i), \quad x_i < s^n, \quad v_i^n \approx v(t^n, x_i), \quad x_i > s^n, \quad s^n \approx s(t^n),$$

где  $x_{i_s} \leq s^n < x_{i_s+1}$ .

### 5.1. Явная структуросохраняющая схема

Для левой фазы ( $x_i < s^n$ ) вводится явная конечно-разностная схема

$$u_i^{n+1} = \frac{u_i^n + k \left( \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} + c_1 \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h} + a_1 u_i^n \right)}{1 + kb_1 u_i^n}, \quad i = 1, \dots, i_s - 1. \quad (5.1)$$

Для правой фазы ( $x_i > s^n$ ) схема имеет вид

$$v_i^{n+1} = \frac{v_i^n + k \left( \frac{v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n}{h^2} + c_2 \frac{v_{i+1}^n - v_i^n}{h} + a_2 v_i^n \right)}{1 + kb_2 v_i^n}, \quad i = i_s + 2, \dots, M - 1. \quad (5.2)$$

Граничные и интерфейсные условия задаются следующим образом  $u_0^{n+1} = \varphi_1(t^{n+1})$ ,  $v_M^{n+1} = \varphi_2(t^{n+1})$ ,  $u_{i_s}^{n+1} = v_{i_s+1}^{n+1} = 0$ .

Положение свободной границы обновляется с использованием дискретного условия Стефана

$$s^{n+1} = s^n + k(-\alpha u_x(s^n, t^n) + \beta v_x(s^n, t^n)), \quad (5.3)$$

где односторонние пространственные производные аппроксимируются второго порядка точности с помощью лагранжевой экстраполяции.

### 5.2. Условие устойчивости типа CFL

Поскольку схемы (5.1)–(5.2) являются явными, для обеспечения устойчивости и монотонности требуется выполнение условия типа CFL на шаг по времени. Предполагается, что

$$k \leq \frac{h^2}{2 + |c_i|h}, \quad i = 1, 2. \quad (5.4)$$

Во всех численных экспериментах используется соотношение  $k = O(h^2)$ , которое удовлетворяет условию (5.4).

Кратко обоснуем сохранение неотрицательности численного решения. Пусть

$$u_i^n \geq 0, \quad v_i^n \geq 0 \quad \text{для всех } i, \quad \varphi_1(t) \geq 0, \quad \varphi_2(t) \geq 0.$$

Из формулы (5.1) при выполнении условия (5.4) следует, что все коэффициенты в числителе являются неотрицательными, а знаменатель удовлетворяет неравенству  $1 + kb_1 u_i^n > 0$ . Следовательно,  $u_i^{n+1} \geq 0$ . Аналогичные рассуждения применимы к схеме (5.2), откуда  $v_i^{n+1} \geq 0$ .

По индукции по временным слоям  $n$  получаем, что численное решение остаётся неотрицательным для всех  $n$ . Таким образом, предложенная схема является сохраняющей неотрицательность и согласуется с принципом максимума для непрерывной задачи.

## 6. Предлагаемая численная схема

Классические численные методы, такие как противоточная схема и схема Кранка–Николсона, при применении к нелинейным реакционным системам со свободной границей нередко сталкиваются с серьёзными трудностями. В частности, в подобных задачах они могут приводить к не физическим результатам, включая появление отрицательных концентраций или паразитных осцилляций, что существенно снижает достоверность вычисленного решения. Данная проблема приобретает особенно критический характер в биологических и биомедицинских моделях, где неотрицательность решений имеет прямой физический смысл. В связи с этим разработка структуросохраняющих, а именно сохраняющих неотрицательность, численных схем является принципиально важной.

В этом разделе предлагается новая явная структуросохраняющая численная схема для двухфазной системы адвекции–реакции–диффузии с подвижной границей, навеянная подходом, предложенным Ченом, Шарпантье и Кожухаровым [23]. Предлагаемая схема естественным образом сохраняет фундаментальные физические свойства модели  $0 \leq u \leq \frac{a_1}{b_1}$  и  $0 \leq v \leq \frac{a_2}{b_2}$ , гарантируя неотрицательность и ограниченность решения на всех временных шагах. Кроме того, схема корректно аппроксимирует стационарные состояния и, благодаря своей явной форме, обладает высокой вычислительной эффективностью.

Ключевая идея состоит в перераспределении части нелинейного реакционного члена в знаменатель схемы, что обеспечивает сохранение неотрицательности даже в явной постановке. Это позволяет обрабатывать диффузионные и адвективные члены явным образом, в то время как нелинейный реакционный член учитывается в полурациональной форме: его линейная часть включается аддитивно, а нелинейная часть переносится в знаменатель. Такой баланс сохраняет физическую структуру исходных уравнений без потери вычислительной простоты.

Для левой области ( $x_i < s^{n+1}$ ) предлагаемая схема имеет вид

$$u_i^{n+1} = \frac{u_i^n + k \left[ \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} + c_1 \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h} + a_1 u_i^n \right]}{1 + kb_1 u_i^n}, \quad i = 1, \dots, i_s - 1. \quad (6.1)$$

Аналогично, для правой области ( $x_i > s^{n+1}$ ) схема записывается в виде

$$v_i^{n+1} = \frac{v_i^n + k \left[ \frac{v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n}{h^2} + c_2 \frac{v_{i+1}^n - v_i^n}{h} + a_2 v_i^n \right]}{1 + kb_2 v_i^n}, \quad i = i_s + 2, \dots, M - 1. \quad (6.2)$$

Граничные условия задаются следующим образом:

$$u_0^{n+1} = \varphi_1(t^{n+1}), \quad v_M^{n+1} = \varphi_2(t^{n+1}), \quad u_{i_s}^{n+1} = v_{i_s+1}^{n+1} = 0. \quad (6.3)$$

Поскольку функции  $u$  и  $v$  разрывны на свободной границе  $x = s^{n+1}$ , условия  $u_{i_s}^{n+1} = v_{i_s+1}^{n+1} = 0$  вводятся для корректного отражения физического разделения двух фаз. Положение свободной границы обновляется в соответствии с общим условием Стефана, заданным формулой (5.3).

Следующая теорема устанавливает согласованность предлагаемой схемы с непрерывной дифференциальной моделью.

**Теорема 6.1.** Пусть  $u(x, t)$  является достаточно гладким решением уравнения (1.1), причём  $u \in C^{2,1}$ . Тогда численная схема (6.1) имеет первый порядок точности по времени и второй порядок точности по пространству. В частности, при  $k = \mathcal{O}(h^2)$  локальная погрешность аппроксимации удовлетворяет оценке

$$u_t = u_{xx} + c_1 u_x + a_1 u - b_1 u^2 + \mathcal{O}(k) + \mathcal{O}(h^2).$$

*Доказательство.* Для анализа погрешности аппроксимации разложим дискретные величины в (6.1) в ряды Тейлора:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + ku_t + \frac{k^2}{2}u_{tt} + \dots, \quad u_{i\pm 1}^n = u_i^n \pm hu_x + \frac{h^2}{2}u_{xx} \pm \frac{h^3}{6}u_{xxx} + \dots$$

Подставляя эти разложения в правую часть (6.1) и раскладывая знаменатель по формуле  $1 + kb_1u_i^n = 1 + kb_1u_i^n + \mathcal{O}(k^2)$ , в пределе при  $k, h \rightarrow 0$  получаем

$$u_t = u_{xx} + c_1u_x + a_1u - b_1u^2 + \mathcal{O}(k) + \mathcal{O}(h^2),$$

что воспроизводит исходное непрерывное уравнение. Тем самым схема обладает первым порядком точности по времени и вторым порядком по пространству, что согласуется с классическими конечно-разностными аппроксимациями параболических уравнений. Влияние граничных членов в данном локальном анализе не учитывается; устойчивость схемы подтверждена численно в последующих экспериментах.  $\square$

В данном разделе также анализируются устойчивость и свойства сохранения неотрицательности предлагаемой явной схемы. В отличие от многих классических методов, требующих жёстких ограничений на шаги по времени и пространству, настоящий метод остаётся устойчивым и физически корректным при всех практически значимых параметрах дискретизации.

Устойчивость проверяется с помощью стандартного анализа фон Неймана, а сохранение неотрицательности доказывается методом математической индукции.

**Теорема 6.2.** *Предлагаемая численная схема (6.1)–(6.2) является безусловно устойчивой, то есть условие устойчивости выполняется при любых  $k \rightarrow 0$  и  $h \rightarrow 0$ .*

*Доказательство.* Для исследования устойчивости линеаризуем систему адвекции–реакции–диффузии в окрестности стационарного состояния. Пусть  $u_i^n \approx \bar{u} + \epsilon_i^n$ , где  $\bar{u} = \frac{a_1}{b_1}$  — положение равновесия, а  $\epsilon_i^n$  — малая возмущающая добавка. Подставляя это представление в (6.1) и отбрасывая нелинейные по  $\epsilon_i^n$  члены, получаем линеаризованную схему

$$\epsilon_i^{n+1} = \frac{\epsilon_i^n + k \left[ \frac{\epsilon_{i+1}^n - 2\epsilon_i^n + \epsilon_{i-1}^n}{h^2} + c_1 \frac{\epsilon_i^n - \epsilon_{i-1}^n}{h} + (a_1 - 2b_1\bar{u})\epsilon_i^n \right]}{1 + kb_1\bar{u}}.$$

Поскольку  $a_1 - 2b_1\bar{u} = -a_1 < 0$ , реакционный член оказывает демпфирующее воздействие. Аналогичные рассуждения справедливы и для правой фазы при  $\bar{v} = \frac{a_2}{b_2}$ .

Полагая модальное решение в виде  $\epsilon_i^n = \xi^n e^{i\theta ih}$ , получаем множитель усиления

$$|\xi| = \left| \frac{1 + k \left[ -\frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{\theta h}{2}\right) - ic_1 \frac{\sin(\theta h)}{h} + (a_1 - 2b_1\bar{u}) \right]}{1 + kb_1\bar{u}} \right|.$$

Поскольку модуль числителя не превосходит модуль знаменателя, заключаем, что  $|\xi| \leq 1$  при любых  $k > 0$  и  $h > 0$ . Следовательно, схема является безусловно устойчивой и сохраняет численную монотонность даже при относительно больших временных шагах.  $\square$

**Теорема 6.3.** *Пусть начальные условия удовлетворяют  $u_i^0 \geq 0$  и  $v_i^0 \geq 0$ , а граничные условия таковы, что  $\varphi_1(t) \geq 0$  и  $\varphi_2(t) \geq 0$ . Тогда численные приближения, получаемые по схемам (6.1)–(6.3), остаются неотрицательными для всех пространственных индексов  $i$  и всех временных уровней  $n$ , то есть  $u_i^n \geq 0$ ,  $v_i^n \geq 0$ .*

*Доказательство.* Доказательство проводится методом математической индукции. Предположим, что  $u_i^n \geq 0$  на некотором временном слое  $t^n$ . Тогда из (6.1) следует

$$u_i^{n+1} = \frac{u_i^n + k(\text{неотрицательные слагаемые})}{1 + kb_1 u_i^n}.$$

Поскольку знаменатель удовлетворяет неравенству  $1 + kb_1 u_i^n > 0$ , а все слагаемые в числителе неотрицательны, заключаем, что  $u_i^{n+1} \geq 0$ . Аналогичные рассуждения применимы к  $v_i^{n+1}$ . Тем самым схема сохраняет неотрицательность решения на каждом временном шаге, что гарантирует физическую корректность численных результатов и предотвращает появление не физических отрицательных концентраций в биологических и химических приложениях.  $\square$

**Замечание.** Следует отметить, что хотя анализ фон Неймана даёт формальную проверку устойчивости, безусловное сохранение неотрицательности обеспечивает ещё более сильную практическую гарантию робастности метода. Благодаря своей явной форме и структуросохраняющим свойствам предлагаемая схема обеспечивает одновременно численную устойчивость и физическую согласованность без необходимости введения дополнительных ограничений на параметры дискретизации. Подобные неотрицательно-сохраняющие явные схемы в настоящее время считаются современным стандартом при численном исследовании нелинейных диффузионно–реакционных систем (см., например, [23]).

## 7. Численный пример

Пространственная область  $[-\ell, \ell]$  дискретизируется равномерной сеткой с шагом  $\Delta x = h = \frac{2\ell}{M}$ , а временной интервал  $[0, T]$  разбивается на  $N$  равных частей с шагом по времени  $\Delta t = k = \frac{T}{N}$ .

В этом разделе приводятся вычислительные эксперименты, демонстрирующие точность, устойчивость и эффективность предлагаемой явной структуросохраняющей схемы. Рассматриваемая тестовая задача описывает двухфазную систему адвекции–реакции–диффузии, моделирующую процесс остеоинтеграции вокруг зубного имплантата. В данной постановке левая область соответствует костной ткани, правая область представляет имплантат, а подвижный интерфейс интерпретируется как граница взаимодействия между двумя средами.

Вычислительная область выбирается в виде пространственного интервала  $[-\ell, \ell] = [-1, 1]$  и временного интервала  $[0, T]$  при  $T = 2$ .

Физические и модельные параметры задаются следующим образом  $a_1 = a_2 = 1$  коэффициенты роста,  $b_1 = b_2 = 1$  коэффициенты внутривидовой конкуренции,  $c_1 = 0.5$  адвекция вправо,  $c_2 = -0.3$  адвекция влево,  $\alpha = \beta = 0.1$  коэффициенты скорости свободной границы,  $\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = 1$  граничные условия Дирихле.

Начальные условия задаются в виде

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & -1 \leq x \leq 0, \\ 0, & x > 0, \end{cases} \quad v_0(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - x^2, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Эти начальные профили удовлетворяют как условию согласования на интерфейсе ( $u(0, 0) = v(0, 0) = 0$ ), так и требованию неотрицательности ( $u_0, v_0 > 0$  внутри соответствующих областей).

Используется сетка с  $M = 200$  пространственными узлами и  $N = 400$  шагами по времени, что соответствует  $h = 0.01$  и  $k = 0.005$ . Для сравнения были протестированы три численных метода: (i) неявная противоточная схема (5.1)–(5.2), (ii) схема Кранка–Николсона (5.3)–(5.4), (iii) предлагаемая структуросохраняющая явная схема (6.1)–(6.2).

Предлагаемый метод во всех временных слоях сохранял неотрицательность, то есть  $u_i^n \geq 0$  и  $v_i^n \geq 0$ , что в непрерывной постановке соответствует  $u(x, t) \geq 0$  и  $v(x, t) \geq 0$ .

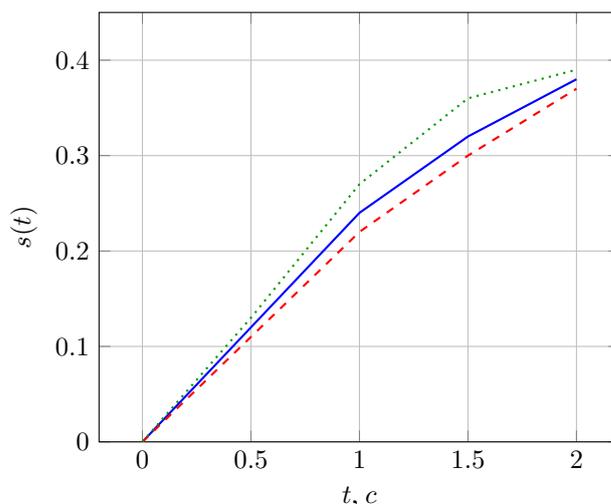
Для исследования сходимости были выполнены дополнительные расчёты на уточнённых пространственных сетках. В качестве эталонного решения использовалось высокоточное численное решение, полученное при  $M = 800$  узлах.

Сходимость оценивалась в норме  $L^\infty$  путём сравнения решений, вычисленных на более грубых сетках, с эталонным решением. Полученные результаты подтверждают первый порядок точности по времени и второй порядок точности по пространству, что согласуется с теоретическим анализом. Свободная граница  $s(t)$  эволюционировала гладко и монотонно и к конечному моменту времени достигала приблизительно значения  $s(2) \approx 0.38$ . Неявная противоточная схема также сохраняла неотрицательность, однако была вычислительно более затратной и давала  $s(2) \approx 0.37$ .

Физическая корректность движения интерфейса проверялась посредством контроля неотрицательности численного решения и монотонности свободной границы. Во всех расчётах выполнялись условия  $u(x, t) \geq 0$ ,  $v(x, t) \geq 0$  и  $s'(t) > 0$ , что согласуется с теоретическими результатами леммы 2.1. Кроме того, численная аппроксимация скорости интерфейса оказалась согласованной с условием Стефана, что указывает на физически осмысленное распространение интерфейса без паразитных осцилляций.

В отличие от этого, схема Кранка–Николсона при  $t \gtrsim 1.2$  порождала малые отрицательные колебания с минимальным значением  $u_{\min} \approx -0.03$ , что нарушает физическую интерпретацию модели. Вследствие этого скорость интерфейса, полученная по данной схеме, демонстрировала немонотонное поведение во времени.

На рисунке 1 показана динамика свободной границы  $s(t)$  для всех трёх схем. Только предложенный структуросохраняющий метод последовательно обеспечивал неотрицательность и монотонное продвижение интерфейса на всём промежутке моделирования.



— Предлагаемая явная схема — — — Неявная противоточная схема ..... Схема Кранка–Николсона

Рис. 1. Эволюция свободной границы  $s(t)$  для различных численных схем.

Полученные результаты полностью согласуются с физической интерпретацией процесса: интерфейс всегда движется в сторону области имплантата, что соответствует непрерывному росту ткани ( $\dot{s}(t) > 0$ ).

Предлагаемая явная схема демонстрирует высокую вычислительную эффективность и отличную устойчивость, сохраняя при этом физическую и биологическую согласованность решения.

Для оценки точности предлагаемой схемы использовалось эталонное решение, полученное при  $M = 800$  узлах. Сравнение вычислительной стоимости и точности различных методов приведено в таблице 1.

*Замечание 7.1. Предлагаемая схема обладает наименьшим временем вычислений благодаря полностью явной структуре. В отличие от неё, как неявная противоточная схема, так и метод Кранка–Николсона требуют*

**Таблица 1.** Сравнение численных схем по вычислительным затратам и точности.

| Схема                 | Время расчёта (с) | Средняя ошибка ( $L^\infty$ ) |
|-----------------------|-------------------|-------------------------------|
| Предлагаемая явная    | 1.2               | $2.1 \times 10^{-3}$          |
| Неявная противоточная | 8.7               | $1.8 \times 10^{-3}$          |
| Кранк–Николсон        | 6.5               | $1.5 \times 10^{-3}$          |

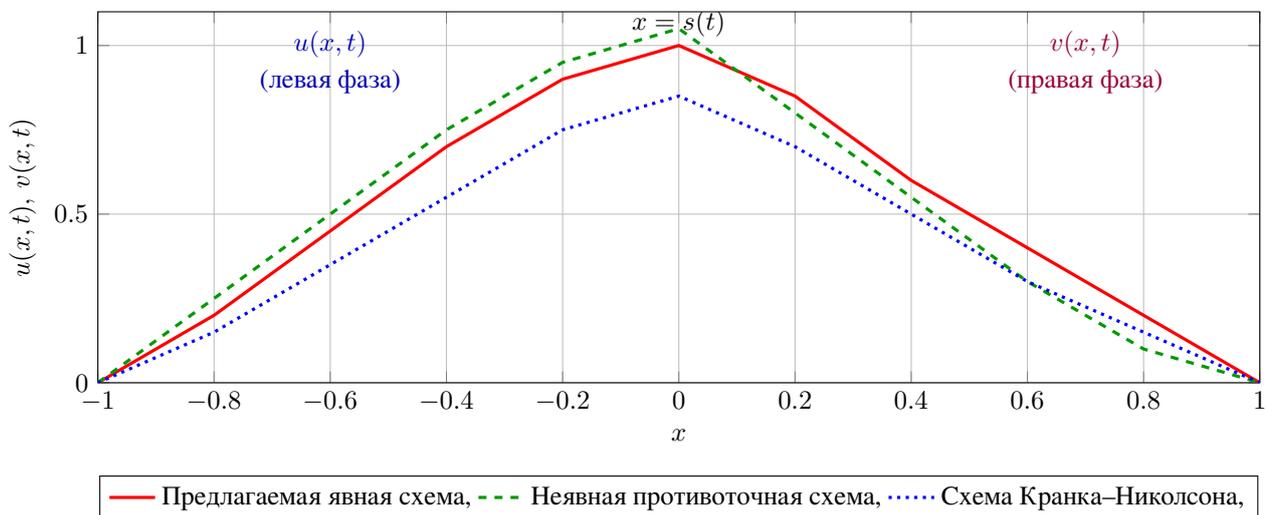
на каждом шаге по времени решения нелинейной системы (как правило, с использованием итераций Ньютона), что существенно увеличивает вычислительные затраты.

Дополнительные вычислительные эксперименты подтверждают робастность предлагаемой схемы при различных наборах параметров. При увеличении интенсивности адвекции ( $c_1 = 2$ ,  $c_2 = -1.5$ ) противоточная схема оставалась условно устойчивой, тогда как схема Кранка–Николсона порождала сильные осцилляции и в итоге теряла физическую корректность. Предлагаемый структуросохраняющий метод, напротив, сохранял устойчивость и точность при всех рассмотренных настройках.

Аналогично, при усилении нелинейности реакционного члена ( $b_1 = b_2 = 5$ ) только предлагаемый метод корректно сходил к равновесному значению ( $u \rightarrow 0.2$ ), тогда как другие схемы демонстрировали паразитные переразбросы.

На рисунке 2 показана эволюция профиля  $u(x, t)$ . Предлагаемая схема сохраняет логистическую верхнюю оценку ( $u \leq 1$ ), обеспечивает гладкость вблизи подвижного интерфейса  $x = s(t)$  и не порождает искусственных осцилляций. В то же время метод Кранка–Николсона после  $t \approx 1.2$  давал нефизические отрицательные значения ( $u_{\min} \approx -0.03$ ), нарушая ограничение неотрицательности, тогда как противоточная схема, оставаясь устойчивой, приводила к более медленному продвижению фронта и заметной диффузионной сглаженности профиля.

Сравнение профилей  $u$  и  $v$ , полученных с использованием трёх численных схем



**Рис. 2.** Сравнение профилей  $u$  и  $v$ , полученных различными численными схемами. Предлагаемая явная схема (красная) сохраняет гладкость и неотрицательность вблизи подвижного интерфейса  $x = s(t)$ , тогда как метод Кранка–Николсона (зеленый) демонстрирует осцилляции, а противоточная схема (синяя) обладает большей диффузионностью.

Численные эксперименты наглядно показывают, что предлагаемая структуросохраняющая схема безусловно сохраняет неотрицательность, обеспечивает физически реалистичные результаты и остаётся вычислительно эффективной благодаря явной форме. Даже при сильной адвекции ( $c_1 = 2$ ,  $c_2 = -1.5$ ) или при усиленной

нелинейности реакционного члена метод не демонстрирует не физических осцилляций и численной неустойчивости.

В противоположность этому, схема Кранка–Николсона порождает выраженные осцилляции с  $|u| > 1.2$ , нарушая физические ограничения, тогда как противоточная схема, хотя и остаётся устойчивой, заметно занижает динамику интерфейса. Эти результаты подтверждают, что предложенный подход является робастным и эффективным численным инструментом для моделирования реалистичных биологических и физических процессов, включая остеоинтеграцию вблизи зубных имплантатов, экологическую инвазию и явления фазовых переходов.

## 8. Заключение

В данной работе разработаны математически строгие и вычислительно эффективные численные методы для двухфазной системы адвекции–реакции–диффузии со свободной границей. На основе априорных оценок доказаны ограниченность и неотрицательность решения, а также получены верхние и нижние оценки скорости движения подвижного интерфейса. Эти результаты послужили надёжной теоретической основой для доказательства существования и единственности классического решения рассматриваемой задачи.

В последующем анализе были подробно исследованы три численных подхода. Хотя классические неявная противоточная схема и схема Кранка–Николсона обладают определёнными преимуществами с точки зрения точности и устойчивости, при применении к нелинейным реакционным системам со свободной границей они выявляют существенные недостатки, такие как потеря неотрицательности, высокая вычислительная стоимость и появление не физических осцилляций.

Для устранения этих ограничений была предложена новая структуросохраняющая явная схема. Она безусловно сохраняет неотрицательность, корректно сходится к равновесным состояниям и остаётся устойчивой даже при наличии сильной адвекции и выраженных нелинейных реакционных эффектов. Благодаря явной форме схема обладает высокой вычислительной эффективностью. Численные эксперименты подтвердили робастность и надёжность предлагаемого метода, продемонстрировав, что он воспроизводит физически и биологически осмысленные результаты. В частности, схема успешно применена для моделирования процессов остеоинтеграции вокруг зубных имплантатов, фронтов экологической инвазии и динамики фазовых переходов.

В дальнейшем планируется распространить предложенный подход на многомерные задачи, учесть пространственно неоднородные коэффициенты и стохастические возмущения, а также реализовать методы адаптивного уточнения сетки. Кроме того, разработанная методология может быть эффективно адаптирована к другим нелинейным системам, таким как модели Брюсселятора и ФитцХью–Нагумо.

В целом, проведённое исследование подчёркивает ключевую роль структуросохраняющих подходов при численном решении задач со свободной границей, описываемых нелинейными параболическими системами. Предложенный метод представляет собой надёжный и эффективный вычислительный инструмент, пригодный для широкого круга современных научных и прикладных задач.

## Благодарность

Авторы выражают искреннюю благодарность Дж. О. Тахирову за постановку задачи и ценные рекомендации на всех этапах исследования. Его содержательные советы, профессиональная поддержка и постоянное внимание сыграли ключевую роль в преодолении возникавших трудностей и успешном завершении данной работы.

## Список литературы

- [1] Du, Y. and Lin, Z.G.: *Spreading-vanishing dichotomy in the diffusive logistic model with a free boundary*. SIAM J. Math. Anal., **42**, 377–405 (2010).
- [2] Elmurodov, A. N. and Sotvoldiyev, A. I. : *A diffusive Leslie–Gower type Predator-Prey Model with two different free boundaries*. Lobachevskii J.Math. **44**, 4254–4270 (2023).
- [3] Friedman, A. : *Free boundary problems in biology*. Philos. Trans. A. Math. Phys. Eng. Sci. Sep 13; 373(2050):20140368. (2015). <https://doi:10.1098/rsta.2014.0368>.
- [4] Rasulov, M. S. and Elmurodov, A. N.: *A free boundary problem for a Predator-Prey System*. Lobachevskii J.Math. **44**, 2898–2909 (2023).
- [5] Takhirov, J. O.: *A free boundary problem for a reaction-diffusion equation appearing in biology*. Indian J. Pure Appl. Math., **50**(1): 95-112, March (2019).
- [6] Elmurodov, A. N. : *Two-phase problem with a free boundary for systems of parabolic equations with a nonlinear term of convection*. Vestnik KRAUNC. Fiziko-Matematicheskie Nauki, **36**(3), 110–122 (2021).
- [7] Takhirov, J. O. and Elmurodov, A. N. : *About mathematical model with a free boundary of water basins pollutions*. Uzbek Math. J. **64** (4), 149–160 (2020). <https://DOI:10.29229/uzmj.2020-4-16>
- [8] Tyson, J. J., Chen, C. K. and Novak, B.: *Sniffers, buzzers, toggles and blinkers: dynamics of regulatory and signaling pathways in the cell*. Curr. Opin. Cell Biol.**15** (2), 221-231 (2003). [https://doi.org/10.1016/S0955-0674\(03\)00017-6](https://doi.org/10.1016/S0955-0674(03)00017-6)
- [9] Byrne, H. M., Preziosi, L. : *Modelling solid tumour growth using the theory of mixtures*. Math. Med. Biol.**20**(4):341-66 (2003). <https://DOI:10.1093/imammb/20.4.341>
- [10] Wu, Z. and Zhao, J.: *Two-phase free boundary problems for reaction-diffusion systems*. J. Differ. Equ., **272**, 1–35 (2021).
- [11] Shahid, N., Ahmedet, N. and Baleanu, D.: *Novel numerical analysis for nonlinear advection–reaction–diffusion systems*. Comp. Math. Appl. **18**(1):112-125 (2020). <https://DOI:10.1515/phys-2020-0011>
- [12] Friedman, A., Reitich, F. : *Analysis of a mathematical model for the growth of tumors*. J. Math. Biol. **38**(3):262–84. (1999). <https://doi:10.1007/s002850050149>
- [13] Caffarelli, L. A., Friedman, A. : *Continuity of the temperature in the Stefan problem*. Indiana University Mathematics Journal, **28**(1), 53–70 (1979).
- [14] Mickens, R. E. : *Advances in the Applications of Nonstandard Finite Difference Schemes*, 2005 World Scientific, Singapore, (2005). <https://DOI:10.1142/5884>
- [15] Anguelov, R., Lubuma, J. M.-S. : *Contributions to the mathematics of the nonstandard finite difference method*. Numer. Methods Partial Differential Equations, **17** (5), pp. 518-543 (2001). <https://DOI:10.1002/num.1025>
- [16] Chen-Charpentier, B. M., Kojouharov, H. V. : *Unconditionally positive finite difference scheme for advection–reaction–diffusion equations*. J. Comput. Appl. Math.(2016).
- [17] Friedman, A. *Variational Principles and Free-Boundary Problems*, Wiley-Interscience, New York (1982).
- [18] Cannon, J. R. : *The One-Dimensional Heat Equation*. Addison-Wesley. (1984).
- [19] Elmurodov, A.N.: *The two-phase Stefan problem for parabolic equations*. Uzbek Mathematical Journal, **4**, pp.54-64 (2019). <https://DOI:10.29229/uzmj.2019-4-6>
- [20] Elmurodov, A.N. and Rasulov, M.S.: *On a Uniqueness of Solution for a Reaction-Diffusion Type System with a Free Boundary*. Lobachevskii Journal of Mathematics, **43**, 2099–2106 (2022).
- [21] Kruzhkov, S.N.: *Nonlinear parabolic equations in two independent variables*. Trans. Moscow Math. Soc., **16**, 355–373 (1967).
- [22] Ladyzenskaja, O.A., Solonnikov, V.A. and Ural'ceva, N.N.: *Linear and Quasi-Linear Equations of Parabolic Type*, Nauka, Moscow (1968).
- [23] Chen, G., Charpentier, M., Kojouharov, H. V.: *A positivity-preserving finite difference scheme for a class of nonlinear parabolic equations*. Journal of Computational and Applied Mathematics, **346**, 137–148 (2019).

## Structure-preserving scheme for two-phase convection reaction diffusion system

A.Elmurodov and A.Sotvoldiyev

### Abstract

In this paper, we introduce a novel structure-preserving explicit numerical scheme for a two-phase convection reaction diffusion system featuring a dynamically evolving interface. A priori estimates in Hölder norms are established for both the solution and the free boundary, which allow us to prove the existence and uniqueness of a classical solution and to analyze its qualitative properties. We also present a comparative study of three numerical approaches: the upwind implicit method, the Crank–Nicolson scheme, and the proposed explicit scheme. Numerical experiments demonstrate the robustness and stability of the new method, even in regimes dominated by strong advection and highly nonlinear reaction terms. The proposed scheme provides physically reliable results and is suitable for modeling interface-driven processes

arising in applications such as osseointegration around dental implants, biological invasion, and sharp-interface phase transition phenomena.

### **Keywords**

free boundary problem, advection, reaction, diffusion, structure-preserving method, stability, numerical simulation.

### **Affiliations**

A.Elmurodov

**Address:** Tashkent State University of Economics, Dept. of Higher and applied mathematics, Tashkent-Uzbekistan.

**e-mail:** elmurodov8111@mail.ru

**ORCID ID:**0009-0006-7485-4385

A.Sotvoldiyev

**Address:** Tashkent State University of Economics, Dept. of Higher and applied mathematics, Tashkent-Uzbekistan.

**e-mail:** akmal.sotvoldiyev@mail.ru

**ORCID ID:**0000-0002-9380-5355

# Asymptotic Properties of the Wilcoxon-Mann-Whitney Statistics

Shomurodov Nozmbek \* To'rayev Alimardon

## ABSTRACT

Random variables seen in many practical problems of statistical physics, quantum field theory, and reliability theory are associated connected random variables. This article focuses on nonparametric estimates for statistics constructed by associated random variables. It proves a theorem for a sequence of stationary associated random variables with two identical marginal distributions.

*Keywords:* associated; statistics; stationary; sequence.

## 1. INTRODUCTION

It is well-known that independent random variables have been extensively studied in science. However, in nature and technology, random variables are often dependent. Therefore, the study of dependent random variables, specifically associated random variables, under certain conditions, and demonstrating their applications in practical problems has been the focus of many prominent experts. In this field, renowned mathematicians such as Newman, Prakasa Rao, Harris, Fortuin, Lebowitz, Hoeffding, Wilcoxon, Mann, Whitney, and their students have achieved fundamental results. Currently, with the development of several directions in mathematical statistics, the importance of the theory of associated random variables has significantly increased, which is well-known among specialists. The topic of this master's thesis is dedicated to gathering future-relevant results on associated random variables, which have been relatively less studied compared to dependent variables, and to studying nonparametric estimators for statistics constructed based on associated variables.

### 1.1. Preliminaries

**Definition 1.1.** Let  $(X, Y)$  be a random vector with  $E[X^2] < \infty$  and  $E[Y^2] < \infty$ . Define

$$H(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) - P(X \leq x)P(Y \leq y). \quad (1.1)$$

Recall the Hoeffding identity [8]:

$$\text{cov}(X, Y) = \int_{\mathbb{R}^2} H(x, y) dx dy. \quad (1.2)$$

This identity was extended to the multivariate case by Block and Fang (1988) using the concept of cumulants for random vectors. Yu (1993) generalized Newman's (1984) earlier work by extending the covariance identity to

absolutely continuous functions of the components of the random vector  $X$ . Cuesta-Molina (1992) generalized the Hoeffding identity to semi-monotonic functions  $K(\cdot)$  in the following form:

$$K(x', y') - K(x, y') - K(x', y) + K(x, y) \geq 0 \quad [9]$$

for all  $x \leq x'$  and  $y \leq y'$ . This was proven as:

$$E[K(X, Y)] - E[K(X^*, Y^*)] = \int_{\mathbb{R}^2} H(x, y)K(dx, dy),$$

where  $X^*$  and  $Y^*$  are independent random variables with the same marginal distributions as  $X$  and  $Y$ , respectively. These results were further generalized by Yu (1993), Cuesta-Molina (1992), and Prakasa Rao (1998) to the multivariate case. Cuadras (2002) showed that if  $\alpha(x)$  and  $\beta(y)$  are functions with finite variation, then:

$$\text{cov}(\alpha(X), \beta(Y)) = \int_{\mathbb{R}^2} H(x, y)\alpha(dx)\beta(dy).$$

This result is a special case of (1.2.). From this, we can see that  $\text{cov}(X_1, X_n) \rightarrow 0$  as  $n \rightarrow \infty$ . In particular, we have:

$$\sup_n |\text{cov}(X_1, X_n)| < \infty.$$

Using the association property of  $X_1, \dots, X_n$ , we observe that  $\text{cov}(X_1, X_n) > 0$  and obtain:

$$0 \leq \text{cov}(X_1, X_j) = [\text{cov}(X_1, X_j)]^{2/3} [\text{cov}(X_1, X_j)]^{1/3} \leq [\sup \text{cov}(X_1, X_n)]^{2/3} [\text{cov}(X_1, X_j)]^{1/3}.$$

Therefore,

$$\sum_{j=2}^n \text{cov}(X_1, X_j) \leq [\sup \text{cov}(X_1, X_n)]^{2/3} \sum_{j=2}^n [\text{cov}(X_1, X_j)]^{1/3} < \infty. \quad (1.3)$$

Let  $R_1, R_2, \dots, R_n$  be the ranks of  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . The Wilcoxon signed-rank statistic is defined as...

## 2. Main part

Let  $\{X_n, n \geq 1\}$  be a sequence of stationary random variables. We can express  $T$  as a linear combination of two U-statistics (Hettmansperger (1984)):

$$T = nU_n^{(1)} + \binom{n}{2}U_n^{(2)}, \quad (2.1)$$

where

$$\begin{aligned} nU_n^{(1)} &= \sum_{i=1}^n \phi(X_i), \\ \binom{n}{2}U_n^{(2)} &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \psi(X_i, X_j), \end{aligned} \quad (2.2)$$

and

$$\psi(x, y) = I(x + y > 0). \quad (2.3)$$

For a stationary sequence  $\{X_n, n \geq 1\}$ , we have:

$$E(U_n^{(2)}) = \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{1 \leq i < j \leq n} P_{ij} = \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{j=2}^n (n-j+1)p_{1,j},$$

where  $p_{ij} = P[X_i + X_j > 0]$ . Define:

$$\begin{aligned} \theta &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, y) dF(x) dF(y), \\ \theta &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, y) dF(x) dF(y) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} F(-x) dF(x), \\ \psi_1(x_1) &= E(\psi(x_1, x_2)) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x_1, x_2) dF(x_2) = 1 - F(-x_1). \end{aligned}$$

Then,

$$h^{(1)}(x_1) = \psi_1(x_1) - \theta, \tag{2.4}$$

and

$$h^{(2)}(x_1, x_2) = \psi(x_1, x_2) - \psi_1(x_1) - \psi_1(x_2) + \theta = \psi(x_1, x_2) + F(-x_1) + F(-x_2) - 2 + \theta. \tag{2.5}$$

The Hoeffding decomposition (H-decomposition) for  $U_n^{(2)}$  is given by (Lee (1990)):

$$U_n^{(2)} = \theta + 2H_n^{(1)} + H_n^{(2)}, \tag{2.6}$$

where  $H_n^{(j)}$  is the  $j$ -th degree U-statistic based on the kernel  $h^{(j)}$ ,  $j = 1, 2$ :

$$H_n^{(j)} = \frac{1}{\binom{n}{j}} \sum h^{(j)}(X_{i_1}, \dots, X_{i_j}), \tag{2.7}$$

with the sum taken over all subsets  $1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq n$  of  $\{1, \dots, n\}$ .

### 2.1. Variance Decomposition

Here, the sum is taken over all subsets  $\{1, \dots, n\}$  for  $1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq n$ . Considering the H-decomposition, we obtain the following:

$$\text{Var}(U_n^{(2)}) = 4\text{Var}(H_n^{(1)}) + \text{Var}(H_n^{(2)}) + 4\text{Cov}(H_n^{(1)}, H_n^{(2)}). \tag{2.8}$$

Now, consider the following equality (Dewan and Prakasa Rao (2001)):

$$\text{Var}(H_n^{(1)}) = \frac{1}{n} \left( \sigma_1^2 + 2 \sum_{j=2}^{\infty} \sigma_{1j}^2 \right) + o\left(\frac{1}{n}\right), \tag{2.9}$$

where

$$\sigma_1^2 = \text{Var}(F(-X_1)),$$

$$\sigma_{1j}^2 = \text{Cov}(F(-X_1), F(-X_{1+j})). \tag{2.10}$$

Using Newman's inequality and (1.3), we can write:

$$\sum_{j=2}^{\infty} \sigma_{1j}^2 = \sum_{j=2}^{\infty} \text{Cov} (F(-X_1), F(-X_{1+j})) < \infty.$$

Additionally,

$$\text{Var} \left( H_n^{(2)} \right) = \binom{n}{2}^{-2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \sum_{1 \leq k < l \leq n} \text{Cov} \{ h^{(2)}(X_i, X_j), h^{(2)}(X_k, X_l) \},$$

where

$$\begin{aligned} \text{Cov} \{ h^{(2)}(X_i, X_j), h^{(2)}(X_k, X_l) \} &= \text{Cov} \{ \psi(X_i, X_j), \psi(X_k, X_l) \} + \\ &+ \text{Cov} \{ \psi(X_i, X_j), F(-X_k) \} + \text{Cov} \{ \psi(X_i, X_j), F(-X_l) \} + \\ &+ \text{Cov} \{ \psi(X_k, X_l), F(-X_k) \} + \text{Cov} \{ \psi(X_k, X_l), F(-X_l) \} + \\ &+ \text{Cov} \{ F(-X_k), F(-X_l) \} + \text{Cov} \{ F(-X_k), F(-X_l) \}. \end{aligned}$$

Using Newman's (1980) inequality, we obtain: Using Newman's (1980) inequality, we obtain:

$$|\text{Cov} (F(-X_k), F(-X_l))| \leq \sup_x (f(x))^2 \text{Cov} (X_k, X_l). \quad (2.11)$$

Due to the boundedness of the density function, the following result from Bagai and Prakasa Rao (1991) holds:

$$\begin{aligned} &|\text{Cov} (\psi(X_i, X_j), \psi(X_k, X_l))| = \\ &= |P [X_i + X_j > 0, X_k + X_l > 0] - P [X_i + X_j > 0] P [X_k + X_l > 0]| \leq \\ &\leq C [\text{Cov} (X_i + X_j, X_k + X_l)]^{1/3} = \\ &= C [\text{Cov} (X_i, X_k) + \text{Cov} (X_j, X_k) + \text{Cov} (X_i, X_l) + \text{Cov} (X_j, X_l)]^{1/3}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Let  $Z = X_i + X_j$ . Then,  $\psi(X_i, X_j) = I(X_i + X_j > 0) = I(Z > 0)$ . Note that this function has a jump at  $z = 0$ . From equation (2.12), we can conclude that:

$$\begin{aligned} &|\text{Cov} (\psi(X_i, X_j), F(X_k))| = \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} (P [X_i + X_j \leq 0, X_k \leq x] - P [X_i + X_j \leq 0] P [X_k \leq x]) dF(x) \right| \leq \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |P [X_i + X_j \leq 0, X_k \leq x] - P [X_i + X_j \leq 0] P [X_k \leq x]| dF(x) \leq \\ &\leq C \int_{-\infty}^{\infty} [\text{cov}(X_i + X_j, X_k)]^{1/3} dF(x) = C [\text{cov}(X_i + X_j, X_k)]^{1/3} = \\ &= C [\text{cov}(X_i, X_k) + \text{cov}(X_j, X_k)]^{1/3}. \end{aligned}$$

Using equations (2.11), (2.12), and (2.13) in equation (2.10), we obtain the following:

$$\begin{aligned} & \left| \text{cov} \{h^{(2)}(X_i, X_j), h^{(2)}(X_k, X_l)\} \right| \leq \\ & \leq C [\text{cov}(X_i, X_k) + \text{cov}(X_j, X_k) + \text{cov}(X_i, X_l) + \text{cov}(X_j, X_l)]^{\frac{1}{3}} + \\ & + [\text{cov}(X_i, X_k) + \text{cov}(X_j, X_k)]^{\frac{1}{3}} + [\text{cov}(X_i, X_l) + \text{cov}(X_j, X_l)]^{\frac{1}{3}} + \\ & + [\text{cov}(X_k, X_i) + \text{cov}(X_l, X_i)]^{\frac{1}{3}} + [\text{cov}(X_k, X_j) + \text{cov}(X_l, X_j)]^{\frac{1}{3}} + \\ & + \text{cov}(X_i, X_k) + \text{cov}(X_j, X_k) + \text{cov}(X_i, X_l) + \text{cov}(X_j, X_l) \leq \\ & \leq C [\text{cov}(X_i, X_k) + \text{cov}(X_j, X_k) + \text{cov}(X_i, X_l) + \text{cov}(X_j, X_l)]^{\frac{1}{3}} + \\ & + [\text{cov}(X_k, X_i) + \text{cov}(X_l, X_i)]^{\frac{1}{3}} + [\text{cov}(X_k, X_j) + \text{cov}(X_l, X_j)]^{\frac{1}{3}} + \\ & = C [\text{cov}(X_i, X_k) + \text{cov}(X_j, X_k) + \text{cov}(X_i, X_l) + \text{cov}(X_j, X_l)]^{\frac{1}{3}} + \\ & = [\text{cov}(X_k, X_i) + \text{cov}(X_l, X_i)]^{\frac{1}{3}} + [\text{cov}(X_k, X_j) + \text{cov}(X_l, X_j)]^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

$$r = (|i - k|) + r(|j - k|) + r(|i - l|) + r[|j - l|]$$

$$\sum r(k) < \infty.$$

Therefore, from Serfling's (1968) theorem, we obtain as  $n \rightarrow \infty$

$$\text{operatorname{var}}(H_n^{(2)}) = o\left(\frac{1}{n}\right). \tag{2.13}$$

Using the Cauchy-Schwarz inequality, the following follows

$$\text{cov}(H_n^{(1)}, H_n^{(2)}) = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Using equations (2.8), (2.9), (2.16), and (2.17), we can write

$$\text{var}(U_n^{(2)}) = 4 \left[ \sigma_1^2 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_{1j}^2 \right] + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

To obtain the limit distribution of the U-statistic, we introduce the following theorem.

**Theorem 2.1.** *Let  $\{X_n, n \geq 1\}$  be a sequence of associated random variables. Suppose*

$$\sum_{k=1}^{\infty} r(k) < \infty \text{ holds. Then, as } n \rightarrow \infty,$$

$$n^{1/2} (U_n^{(2)} - \theta) \xrightarrow{e} N(0, 1)$$

where  $\sigma_U^2 = \sigma_1^2 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_{1j}^2$ .

Proof. Here, we also use relations (2.2)–(2.12), and make appropriate modifications in the remaining relations: Using Newman’s (1980) inequality, we obtain

$$|\text{cov}(F(-X_i), F(-X_k))| \leq \sup_x (f(x))^2 \text{cov}(X_i, X_k). \quad (2.14)$$

Due to the boundedness of the density function, the following result follows from Bagai and Prakasa Rao’s (1991) theorem:

$$\begin{aligned} & |\text{cov}(\psi(X_i, X_j), \psi(X_k, X_l))| = \\ & = |P[X_i + X_j > 0, X_i + X_k > 0] - P[X_i + X_j > 0] P[X_i + X_k > 0]| \leq \\ & \leq Cr(|i - l|). \end{aligned}$$

Let  $Z = X_i + X_j$ . Note that the function  $\psi(X_i, X_j) = I(X_i + X_j > 0) = I(z > 0)$  has a discontinuity at  $z = 0$ . Now, from equation (2.12), it follows that

$$\begin{aligned} & |\text{cov}(\psi(X_i, X_j), F(X_k))| = \\ & = \left| \int_{-\infty}^{\infty} (P[X_i + X_j \leq 0, X_k \leq x] - P[X_i + X_j \leq 0] P[X_k \leq x]) dF(x) \right| \leq \\ & \leq \int_{-\infty}^{\infty} |P[X_i + X_j \leq 0, X_k \leq x] - P[X_i + X_j \leq 0] P[X_k \leq x]| dF(x) \leq \\ & = C[r(|i - k|) + r(|j - k|)]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Using equations (2.14) and (2.15) in equation (2.12) we obtain

$$\begin{aligned} & \left| \text{cov}(h^{(2)}(X_i, X_j), h^{(2)}(X_k, X_l)) \right| \leq \\ & = r(|i - k|) + r(|j - k|) + r(|i - l|) + r(|j - l|). \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} r(k) < \infty.$$

From this and Serfling’s (1968) theorem, we obtain as  $n \rightarrow \infty$

$$\text{var}(H_n^{(2)}) = o\left(\frac{1}{n}\right). \quad (2.16)$$

Using the Cauchy-Schwarz inequality, the following follows

$$\text{cov}(H_n^{(1)}, H_n^{(2)}) = o\left(\frac{1}{n}\right). \quad (2.17)$$

Using equations (2.8), (2.9), (2.16), and (2.17), we can write

$$\text{var}(U_n^{(2)}) = 4 \left[ \sigma_1^2 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_{1j}^2 \right] + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

### 3. Conclusion

It is well-known that independent random variables have been sufficiently studied in science. However, in nature and technology, random variables are often dependent. Therefore, the study of dependent variables, specifically associated random variables, under certain conditions, and demonstrating their applications in practical problems has been the focus of many prominent experts. The topic of this master's thesis is dedicated to gathering future-relevant results on associated random variables, which have been relatively less studied compared to dependent variables, and to studying nonparametric estimators for statistics constructed based on associated variables.

### References

- [1] Bagai, I. and Prakasa Rao, B.L.S. Estimation of the survival function for stationary associated processes, *Statist. Probab. Lett.*, 12, 385-391.(1991)
- [2] Baek, Jong Li., Park, Sung Tae., Chung, Sung Mo. and Seo, Hye Young. On the almost sure convergence of weighted sums of negatively associated random variables, *Commun. Korean Math. Soc.*, 20, 539-546. (2005).
- [3] Bagai, I. and Prakasa Rao, B.L.S. Kernel-type density and failure rate estimation for associated sequences, *Ann. Inst. Statist. Math.*, 47, 253-266.(1995)
- [4] Birkel, T. On the convergence rate in the central limit theorem for associated processes, *Ann. Probab.*, 16, 1689-1698.(1988b)
- [5] Bulinski, A.V. Rates of convergence in the central limit theorem for fields of associated random variables, *Theor. Probab. Appl.*, 40, 136-144.(1995)
- [6] Matula, P. On almost sure limit theorems for positively dependent random variables, *Statist. Probab. Lett.*, 74, 59-66.(2005)
- [7] Newman, C.M. and Wright, A.L. Associated random variables and martingale inequalities, *Z. Wahrsch. Theorie und Verw. Gebiete*, 59, 361-371. (1982)
- [8] Hoeffding, W. Masstabinvariante Korrelations-theorie, *Schr. Math. Inst. University Berlin*, 5, 181-233. (1940)
- [9] Queseda- Molina, J.J. A generalization of an identity of Hoeffding and some applications, *J. Ital. Statist. Soc.*, 3, 405-411.(1992)

### Affiliations

SHOMURODOV NOZIMBEK

**ADDRESS:** Tashkent State Transport University, Tashkent.

**E-MAIL:** nozimshoh007@gmail.com

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0009-0005-2748-4484>

TURAEV ALIMARDON

**ADDRESS:** Tashkent State Transport University, Tashkent.

**E-MAIL:** alimardontoxirovich0413@gmail.com

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0002-0584-9738>

# Задача со свободной границей для уравнения нелинейной диффузии

Расулов Мирожиддин Собиржонович\* Умирхонов Масудхон Турахон угли

## Аннотация

В данной работе рассматривается задача типа Стефана с двумя свободными границами для нелинейного уравнения теплопроводности в одномерном случае. Исследование нелинейных задач со свободными границами методом, основанным на построении априорных оценок. В связи с этим сначала устанавливаются некоторые начальные априорные оценки для решения рассматриваемой задачи. Затем задача сводится к задаче с фиксированной границей через замену переменных. Полученная задача имеет зависящие от времени и положения в пространстве коэффициенты с нелинейными слагаемыми. Далее построены априорные оценки типа Шаудера для решения уравнения с нелинейными слагаемыми и закрепленной границей. На основе полученных оценок установлена разрешимость исходной задачи.

*Ключевые слова:* квазилинейное параболическое уравнение; свободная граница; априорные оценки; теорема существования и единственности.

*Предметная классификация AMS (2020):* 35K20, 35K59, 35R35

## 1. Введение

Уравнения нелинейной диффузии с условиями свободной границы представляют собой важный класс математических моделей, широко используемых для описания процессов в физике, биологии, химии и технике. Эти уравнения характеризуются нелинейной зависимостью потока от градиента искомой величины, а свободная граница добавляет дополнительную сложность, связанную с динамическим изменением области, в которой происходит диффузия. Такие задачи возникают, например, при моделировании распространения тепла в средах с фазовыми переходами, фильтрации жидкостей в пористых средах, распространения биологических популяций или химических реакций с подвижными границами.

В настоящее время изучение задач со свободной границей интенсивно ведется с различных сторон (экспериментальных, численных и теоретических), предмет постоянно находит новые основания для приложений, продолжают возникать новые фундаментальные теоретические вопросы. Эти разработки, в частности, требуют новых аналитических и численных методов, а также усовершенствования существующих алгоритмов и инструментов для решения чрезвычайно сложных задач [7, 14, 21]. В работах широко изучались новые классы задач Стефана, которые возникают при моделировании природных процессов, включающие уравнения нелинейной диффузии с двумя подвижными границами [5, 6, 9, 15, 16, 19].

Во многих исследованиях термин диффузия является линейным [8]. Однако в целом на диффузию также влияет плотность компонентов, что, в свою очередь, приводит к нелинейной диффузии [1, 2, 22, 20]. Например, в работе

[18] авторы исследовали задачу со свободной границей для уравнения реакция-диффузия с нелинейным членом диффузии.

В этой работе рассмотрим краевую задачу для квазилинейного параболического уравнения с двумя неизвестными границами:

$$a(u)u_t = (d(u)u_x)_x, \quad (t, x) \in D, \quad (1.1)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad h(0) \leq x \leq s(0), \quad (1.2)$$

$$u(t, s(t)) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.3)$$

$$u(t, h(t)) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.4)$$

$$s'(t) = -\mu u_x(t, s(t)), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.5)$$

$$h'(t) = -\mu u_x(t, h(t)), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.6)$$

где  $D = \{(t, x) : 0 < t \leq T, h(t) < x < s(t)\}$ ;  $x = h(t)$  и  $x = s(t)$  – свободные (неизвестные) границы, которые определяются вместе с функцией  $u(t, x)$ .

Относительно данных задачи предполагаются выполненными следующие условия:

- a).  $a(u) \geq a_0 > 0$ ,  $a_0 = const$  и  $a(u) \in C^\gamma(D)$ ,  $0 < \gamma < 1$ ;
- b).  $d(u) \geq d_0 > 0$ ,  $d_0 = const$  и  $d(u) \in C^{1+\gamma}(D)$ ;
- c).  $s_0, \mu$  – положительные постоянные;
- d).  $u_0(x) > 0$ ,  $h_0 < x < s_0$ ;  $h(0) = h_0 = -s_0$ ,  $s(0) = s_0$ ;  $u'_0(h_0) > 0$ ,  $u_0(h_0) = 0$ ,  $u'_0(s_0) < 0$ ,  $u_0(s_0) = 0$ ;  
 $\lim_{x \rightarrow s_0} \frac{u_0(x)}{s_0 - x} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow h_0} \frac{u_0(x)}{x - h_0} = 0$ .

Задача (1.1)-(1.6) может рассматриваться как модель, описывающая распространение тепла или вещества с двойными свободными границами  $x = h(t)$  и  $x = s(t)$  в одномерной среде обитания где задаются граничные условия первого рода:  $u(t, h(t)) = 0 = u(t, s(t))$ . В общем случае, как концентрация вещества  $u(t, x)$  означает движение в наружу вдоль неизвестных границ с течением времени. Предполагается, что скорость движения свободных границ пропорциональна нормированным градиентам концентрации вещества на этих границах, то есть

$$s'(t) = -\mu u_x(t, s(t)), \quad h'(t) = -\mu u_x(t, h(t)),$$

что соответствует классическому условию Стефана. Подробнее об физической интерпретации данного условия можно найти в работах [3, 4, 13].

Задача (1.1)-(1.6) исследована в работе [16] для случая  $d(u) = const$ .

## 2. Априорные оценки

В этом разделе установим некоторые априорные оценки шаудеровского типа, которые будут использованы при доказательстве глобальной разрешимости задачи.

Сначала с помощью метода, основанного на построения априорных оценок определим ограничения на параметры задачи, при которых она глобально разрешима. Первая, основополагающая оценка, дает ту начальную информацию, отправляясь от которой можно получать шаг за шагом, двигаясь вверх по шкале банаховых пространств, все более полные и точные сведения об изучаемом решении.

**Теорема 2.1.** Пусть функции  $(s(t), h(t), u(t, x))$  являются решением задачи (1.1)-(1.6). Тогда справедливы следующие оценки:

$$0 < u(t, x) \leq M_1, \quad (t, x) \in \bar{D}, \quad (2.1)$$

$$0 < s'(t), \quad 0 < -h'(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.2)$$

Кроме того, если  $\frac{d}{dx}d(u) > 0$ , то

$$s'(t) \leq M_2, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.3)$$

$$-h'(t) \leq M_3, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.4)$$

где положительные константы  $M_1, M_2, M_3$  не зависят от  $T$ .

*Доказательство.* Из задачи (1.1)-(1.6) по принципу максимума получим оценку (2.1).

Область  $D$  условно разделим на две части

$$D_1 = \{(t, x) : 0 < t \leq T, 0 < x < s(t)\}, \quad D_2 = \{(t, x) : 0 < t \leq T, h(t) < x < 0\}.$$

Рассмотрим задачу для  $u(t, x)$  в области  $D_1$

$$\begin{cases} a(u) u_t = (d(u)u_x)_x, & (t, x) \in D_1, \\ u(0, x) = u_0(x), & 0 \leq x \leq s_0, \\ u(t, 0) > 0, & 0 \leq t \leq T, \\ u(t, s(t)) = 0, & 0 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (2.5)$$

С учетом условий (1.3) и положительности функции  $u(t, x)$  в области  $D$ , находим  $u_x(t, s(t)) \leq 0$ . Следовательно, из (1.5) получим  $s'(t) > 0$ .

Теперь оценим снизу  $u_x(t, s(t))$ . Для этого в задаче (2.5) произведем замену

$$v(t, x) = u(t, x) + N_1(x - s(t))$$

и получим

$$\begin{cases} a(v) v_t - d(v)v_{xx} - \left(\frac{d}{dx}d(u)\right) v_x = -\left(a(v) s'(t) + \frac{d}{dx}d(u)\right) N_1, & (t, x) \in D_1, \\ v(0, x) = u_0(x) + N_1(x - s_0), & 0 \leq x \leq s_0, \\ v(t, 0) = u(t, 0) - N_1 s(t), & 0 \leq t \leq T, \\ v(t, s(t)) = 0, & 0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

За счет выбора  $N_1 \geq \left\{ \max_x \frac{u_0(x)}{s_0 - x}, \frac{M_1}{s_0} \right\}$  всюду в  $D_1$  имеем  $v(t, x) \leq 0$ . Отсюда

$$u(t, x) \leq N_1(s(t) - x), \quad 0 \leq x \leq s(t).$$

Следовательно,  $v_x(t, s(t)) = u_x(t, s(t)) + N_1 \geq 0$ . Тогда из условия Стефана (1.5) имеем  $s'(t) \leq \mu N_1 \equiv M_2$  в  $0 \leq t \leq T$ .

А теперь докажем неравенство (2.4). Рассматривается задача

$$\begin{cases} a(u) u_t = (d(u)u_x)_x, & (t, x) \in D_2, \\ u(0, x) = u_0(x), & h_0 \leq x \leq 0, \\ u(t, 0) > 0, & 0 \leq t \leq T, \\ u(t, h(t)) = 0, & 0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

С учетом условий  $u(t, h(t)) = 0$  и  $u(t, x) > 0$ , находим  $u_x(t, h(t)) > 0$ . Осталось показать, что  $h'(t) \geq -M_3$  для  $0 \leq t \leq T$ . Для этого введем функцию

$$w(t, x) = u(t, x) - N_2(x - h(t)) \quad (2.6)$$

получим задачу

$$\begin{cases} a(w) w_t - d(w)w_{xx} - \left(\frac{d}{dx}d(u)\right) w_x = \left(a(w) h'(t) + \frac{d}{dx}d(u)\right) N_2, & (t, x) \in D_2, \\ w(0, x) = u_0(x) - N_2(x - h_0), & h_0 \leq x \leq 0, \\ w(t, 0) = u(t, 0) + N_2 h(t), & 0 \leq t \leq T, \\ w(t, h(t)) = 0, & 0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

Так как  $h'(t) < 0$ , то  $a(w)w_t - d(w)w_{xx} - \left(\frac{d}{dx}d(u)\right)w_x < 0$  в  $D_2$ . Тем самым функция  $w(t, x)$  не может достигать положительного максимума внутри области  $D_2$ . Если  $N_2 \geq \max\left\{\max_x \frac{u_0(x)}{x-h_0}, \frac{M_1}{-h_0}\right\}$ , то легко добиться неположительности  $w(t, x)$  на левой границе и в начальной момент времени. Таким образом,  $w(t, x)$  неположительна в  $\bar{D}_2$ . Но тогда  $w_x(t, h(t)) \leq 0$ . Следовательно, с учетом (2.6) находим  $u_x(t, x) \leq N_2$ , что эквивалентно  $h'(t) \geq -\mu N_2 \equiv M_3$ .  $\square$

Теперь используя результаты работы [10] получим оценки для  $|u_x|$  и  $|u|_{1+\gamma}$ . Для этого преобразуем независимые переменные

$$t = t, \quad y = \frac{2s_0x}{s(t) - h(t)} - \frac{s(t) + h(t)}{s(t) - h(t)}s_0.$$

Тогда области  $D$  соответствует область  $Q = \{(t, y) : 0 < t < T, -s_0 < y < s_0\}$ , а ограниченная функция  $v(t, y) = u(t, x)$  является решением начально-краевой задачи

$$v_t = A(t, y, v)v_{yy} + B(t, y, v, v_y), \quad (t, y) \in Q, \tag{2.7}$$

$$v(0, y) = v_0(y), \quad -s_0 \leq y \leq s_0, \tag{2.8}$$

$$v(t, s_0) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{2.9}$$

$$v(t, -s_0) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{2.10}$$

где  $A(t, y, v) = \frac{d(v)}{a(v)}\rho(t)$ ,  $B(t, y, v, v_y) = \varphi(t)v_y + \frac{d'(v)}{a(v)}\rho(t)v_y^2$ ,  $\rho(t) = \frac{4s_0^2}{(s(t)-h(t))^2}$ ,

$$\varphi(t) = \frac{s'(t) - h'(t)}{s(t) - h(t)} \left( y + \frac{s(t) + h(t)}{s(t) - h(t)} \right) + \frac{s'(t)h(t) + s(t)h'(t)}{(s(t) - h(t))^2} 2s_0,$$

$$s'(t) = -\frac{2s_0\mu}{s(t) - h(t)}v_y(t, s_0), \quad h'(t) = -\frac{2s_0\mu}{s(t) - h(t)}v_y(t, -s_0).$$

Здесь и далее для функциональных пространств и норм в них мы будем придерживаться следующих обозначений. Пусть функция  $v(t, y)$  определена на некотором множестве  $\Omega$ ; для любого числа  $\gamma \in (0, 1)$ , и положим что

$$|v|_\gamma^\Omega = \sup_\Omega |v(t, y)| + \sup_{(t,y) \in \Omega, (\tau,\xi) \in \Omega} \frac{|v(t, y) - v(\tau, \xi)|}{(|t - \tau| + |y - \xi|^2)^{\gamma/2}},$$

$$|v|_{1+\gamma}^\Omega = |v|_\gamma^\Omega + |v_y|_\gamma^\Omega,$$

$$|v|_{2+\gamma}^\Omega = |v|_{1+\gamma}^\Omega + |v_{yy}|_\gamma^\Omega + |v_t|_\gamma^\Omega.$$

Будем говорить, что  $v \in C^q$  ( $q = 0, \gamma, 1 + \gamma, 2 + \gamma$ ), если  $|v|_q < \infty$  (т.е. соответствующая норма конечна).

При условии d). без ограничений общности можно предполагать, что  $v_0(x) = 0$ .

**Теорема 2.2.** Пусть функция  $v(t, y)$  непрерывна в  $\bar{Q}$  вместе с производной  $v_y$  и удовлетворяет уравнению (2.7) всюду в  $\bar{Q}$ , за исключением, может быть, точек  $y = 0$ ; предположим, что ограниченные функции  $A(t, y, v)$ ,  $B(t, y, v, p)$  для  $(t, y) \in \bar{Q}$ ,  $|v| \leq M_1$  и произвольных  $p$  удовлетворяют условиям

$$A(t, y, v) \geq A_0 > 0, \quad \frac{|B(t, y, v, p)|}{A(t, y, v)} \leq K(p^2 + 1), \quad K > 0. \tag{2.11}$$

Тогда

$$|v_y(t, y)| \leq M_4(M_1, A_0, K, \delta), \quad (t, y) \in Q^\delta. \tag{2.12}$$

Если  $A_1 = \max_{\bar{Q}} A$  в области  $\{(t, y) \in \bar{Q}, |v| \leq M_1, |p| \leq M_4\}$  то

$$|v|_{\frac{2}{3}}^{Q^{2\delta}} \leq M_5(M_1, M_4, A_1, K, \delta). \tag{2.13}$$

И если еще известно, что функция  $v(t, y)$  обладает обобщенными производными  $v_{ty}, v_{yy} \in L_2(Q)$ , то существует такое  $\gamma = \gamma(M_1, M_4, A_1, K, \delta)$ , что

$$|v|_{1+\gamma}^{Q^{2\delta}} \leq M_6(M_1, A_0, A_1, K, \delta), \quad 0 < \gamma < 1, \quad (2.14)$$

Если  $v|_{\Gamma(t=0, y=\pm s_0)} = 0$ , то оценки (2.12)-(2.14) справедливы и в  $\bar{Q}$ . Здесь  $Q^\delta = \{(t, y) : 0 < \delta \leq t \leq T, \delta - s_0 \leq y \leq \delta + s_0\}$ ,  $\Gamma(t=0, y=\pm s_0)$  – параболическая граница.

*Доказательство.* Так как установлены оценки  $|u| \leq M_1, |s'(t)| \leq M_2, |h'(t)| \leq M_3$ , то в силу теорем 1, 3 работы [10] справедливы внутренние оценки (2.12)-(2.14).

Теперь перейдем оценки вплоть до границ для  $|v_y|$ . Так как  $v|_{y=\pm s_0} = 0$ , поэтому продолжим функцию  $v(t, y)$  через боковые стороны прямоугольника  $Q$  по правилу

$$v(t, y) = \omega(t, 2s_0 + y), \quad -3s_0 \leq y \leq -s_0, \quad (2.15)$$

$$v(t, y) = \omega(t, y - 2s_0), \quad s_0 \leq y \leq 3s_0. \quad (2.16)$$

Предполагаем, что коэффициенты уравнения (2.7) продолжены по  $y$  по закону (2.15), (2.16). Новая функция (сохраним за ней обозначение  $u(t, y)$ ) во всех точках прямоугольников  $R_\pm = \{(t, y) : 0 \leq t \leq T, |y \pm \frac{3}{2}s_0| \leq \frac{3}{2}s_0\}$  имеет непрерывную производную и удовлетворяет продолженному уравнению вида (2.7) т.е

$$\omega_t = A(t, 2s_0 + y, \omega, \omega_y) \omega_{yy} + B(t, 2s_0 + y, \omega, \omega_y), \quad -3s_0 < y < -s_0,$$

и

$$\omega_t = A(t, y - 2s_0, \omega, \omega_y) \omega_{yy} + B(t, y - 2s_0, \omega, \omega_y), \quad s_0 < y < 3s_0$$

с теми же самыми свойствами, что и в условиях теоремы 2.2. Теперь получим оценку для  $|v_y|$  в прямоугольниках, объединение которых содержит  $Q$ . Так как получение внутренних оценок основано на принципе максимума, то утверждения теоремы полностью сохраняются, когда функция  $v(t, y)$  непрерывна в  $Q$ , имеет непрерывную производную  $v_y(t, y)$  и удовлетворяет уравнению (2.7) в  $Q$  всюду за исключением точек конечного числа прямых  $y = const$ .

Переходим теперь к доказательству оценки  $|v|_{1+\gamma}^{\bar{Q}}$ . После того как оценены нормы  $|v_y|_{\gamma}^{\bar{Q}}$  уравнение (2.7) можно рассматривать как линейное уравнение

$$v_t = \bar{A}(t, y) v_{yy} + \bar{B}(t, y)$$

с ограниченными и непрерывными по Гельдеру коэффициентами и использовать для оценок и прочих качественных исследований его решений соответствующие теоремы по линейным уравнениям о линейных уравнениях.

Чтобы получить оценку вплоть до границы, как и выше, продолжим  $v(t, y)$  по правилу (2.15), (2.16). Далее, для решения продолженного уравнения имеют место внутренние априорные оценки вида (2.14), в прямоугольниках, охватывающих прямоугольник  $Q$ . При этом применяются результаты работы ([10] теорема 3) по Гельдеровости обобщенного решения. Следовательно, получаем оценку (2.14) в  $\bar{Q}$ .  $\square$

А оценки для старших производных получим по результатам для линейных уравнений:

**Теорема 2.3.** Пусть коэффициенты уравнения

$$\tilde{a}(t, y) v_{yy} + \tilde{b}(t, y) v_y + \tilde{c}(t, y) v - v_t = \tilde{f}(t, y), \quad (t, y) \in Q, \quad (2.17)$$

удовлетворяют условиям Гельдера

$$|\tilde{a}|_{\gamma}^{\bar{Q}} + |\tilde{b}|_{\gamma}^{\bar{Q}} + |\tilde{c}|_{\gamma}^{\bar{Q}} + |\tilde{f}|_{\gamma}^{\bar{Q}} < \infty, \quad \tilde{a}(t, y) \geq a_0 > 0.$$

Пусть  $v(t, y)$  есть решения уравнения (2.17) с  $v|_{\Gamma(t=0, y=\pm s_0)} = 0, |v|_{2+\gamma}^{\bar{Q}} < +\infty$  и  $M = \max_{\bar{Q}} |v(t, y)|$ . Тогда

$$|v|_{2+\gamma}^{\bar{Q}} \leq C \left( |\tilde{f}|_{\gamma}^{\bar{Q}} + M \right) \equiv M_7. \quad (2.18)$$

### 3. Единственность и существования решения

Для доказательства единственности решения используем идеи работы [17].

Выводим интегральное представление эквивалентное к (1.1). Перепишем (1.1) в виде

$$(\varphi(u))_t = (d(u)u_x)_x \quad (3.1)$$

где  $\varphi(u) = \int_0^u a(\xi) d\xi$ .

Интегрируя уравнение (3.1) по области  $D$  с учетом условий (1.2)-(1.6) имеем

$$s(t) - h(t) = 2s_0 + \frac{\mu}{d(0)} \int_{-s_0}^{s_0} \varphi(u_0(\xi)) d\xi - \frac{\mu}{d(0)} \int_{h(t)}^{s(t)} \varphi(u(t, \xi)) d\xi. \quad (3.2)$$

**Теорема 3.1.** При выполнении условий теоремы 2.1 решение задачи (1.1)-(1.6) единственно

*Доказательство.* Пусть  $(h_1(t), s_1(t), u_1(t, x))$  и  $(h_2(t), s_2(t), u_2(t, x))$  являются решениями задачи (1.1)-(1.6) и, кроме того,

$$y_1(t) = \min(s_1(t), s_2(t)), \quad z_1(t) = \min(h_1(t), h_2(t)),$$

$$y_2(t) = \max(s_1(t), s_2(t)), \quad z_2(t) = \max(h_1(t), h_2(t)).$$

Тогда, с учетом (3.2), имеем

$$|s_1(t) - s_2(t)| + |h_1(t) - h_2(t)| \leq \frac{\mu}{d(0)} \int_{z_1(t)}^{z_2(t)} |\varphi(u_i)| d\xi + \frac{\mu}{d(0)} \int_{y_1(t)}^{y_2(t)} |\varphi(u_i)| d\xi + \frac{\mu}{d(0)} \int_{z_2(t)}^{y_1(t)} |\varphi(u_1) - \varphi(u_2)| d\xi \quad (3.3)$$

где  $u_i$  ( $i = 1, 2$ ) – решения между  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$  (соответственно  $z_1(t)$  и  $z_2(t)$ ).

По теореме 2.1 получаем

$$|u_1(t, y_1(t)) - u_2(t, y_1(t))| \leq N_1 |s_1(t) - s_2(t)|$$

и

$$|u_1(t, z_1(t)) - u_2(t, z_1(t))| \leq N_2 |h_1(t) - h_2(t)|.$$

Рассмотрим функцию  $U(t, x) = u_1(t, x) - u_2(t, x)$ . Тогда для  $U(t, x)$  получим уравнение с ограниченными коэффициентами и задачу

$$\begin{cases} b_1(t, x)U_t = b_2(t, x)U_{xx} + b_3(t, x)U_x + b_4(t, x)U, & (t, x) \in D, \\ U(0, x) = 0, & -s_0 \leq x \leq s_0, \\ U(t, y_1(t)) \leq N_1 \max_{0 \leq \eta \leq t} |s_1(\eta) - s_2(\eta)|, & t \geq 0, \\ U(t, z_1(t)) \leq N_2 \max_{0 \leq \eta \leq t} |h_1(\eta) - h_2(\eta)|, & t \geq 0, \end{cases}$$

где коэффициенты уравнения непрерывные и ограниченные функции.

Отсюда по принципу максимума

$$|U(t, x)| \leq N_1 \max_{0 \leq \eta \leq t} |s_1(\eta) - s_2(\eta)| + N_2 \max_{0 \leq \eta \leq t} |h_1(\eta) - h_2(\eta)|.$$

В силу ограниченности функций  $u(t, x)$ ,  $a(u)$ ,  $a'(u)$  оценим составляющие формулы (3.3):

$$I_1 = \frac{\mu}{d(0)} \int_{z_1(t)}^{z_2(t)} |\varphi(u_i)| d\xi \leq M_7 |z_2(t) - z_1(t)| \max_{0 \leq \eta \leq t} |h_1(\eta) - h_2(\eta)| \leq M_7 \max_{0 \leq \eta \leq t} |h_1(\eta) - h_2(\eta)|^2,$$

$$I_2 = \frac{\mu}{d(0)} \int_{y_1(t)}^{y_2(t)} |\varphi(u_i)| d\xi \leq M_8 |y_2(t) - y_1(t)| \max_{0 \leq \eta \leq t} |s_1(\eta) - s_2(\eta)| \leq M_8 \max_{0 \leq \eta \leq t} |s_1(\eta) - s_2(\eta)|^2,$$

$$I_3 = \frac{\mu}{d(0)} \int_{z_2(t)}^{y_1(t)} |\varphi(u_1) - \varphi(u_2)| d\xi.$$

Далее, используя идеи и результат [9, 18], доказательство теоремы завершается. □

### Существование решения.

**Теорема 3.2.** Пусть выполнены условия теоремы 2.2. Тогда существует в  $D$  решение  $u(t, x) \in C^{2+\gamma}(\bar{D})$ ,  $s(t) \in C^{1+\gamma}([0, T])$ ,  $h(t) \in C^{1+\gamma}([0, T])$  задачи (1.1)-(1.6).

*Доказательство.* Для доказательства разрешимости нелинейной задачи можно воспользоваться различными теоремами из теории нелинейных уравнений, учитывая, что для нее справедлива теорема единственности классического решения. Воспользуемся принципом Лере-Шаудера [12], установленным по априорным оценкам  $|\cdot|_{1+\gamma}$  для всех возможных решений нелинейных задач, и теоремой о разрешимости в классах Гёльдера для линейных задач.

Более подробное изложение методики можно найти, например, в (Раздел VI, [11]; Раздел VII, [12]). □

### Список литературы

- [1] Adriana C. Briozzo.: *Free boundary problem governed by a non-linear diffusion-convection equation with Neumann condition* Jour. of Math. Anal. and Appl., **54** (2), 129461 (2025)
- [2] Adriana C. Briozzo, Tarzia, D.: *A free boundary problem for a diffusion-convection equation*. Int. J. Non-Linear Mech. **120**, 103394 (2020). <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2019.103394>
- [3] Cannon, J. R.: *The One-Dimensional Heat Equation*. Cambridge: CUP, (1984). 500 pp.
- [4] Crank, J.: *Free and Moving Boundary Problem*. Oxford (1984). 425 pp.
- [5] Du, Y., Lin Zh.: *Spreading-vanishing dichotomy in the diffusive logistic model with a free boundary*. SIAM J. Math. Anal. **42**, 377-405 (2010). <https://doi.org/10.1137/090771089>
- [6] Du, Y., Li, B.: *Spreading and vanishing in nonlinear diffusion problems with free boundaries*. J. Eur. Math. Soc. **17**, 2673-2724 (2015). <https://doi.org/10.4171/JEMS/568>
- [7] Friedman, A.: *Free boundary problems arising in biology*. Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B **23** (1), 193-202 (2016). <https://doi.org/10.3934/dcdsb.2018013>
- [8] Gupta, S. C.: *The Classical Stefan Problem: Basic concepts, modelling and analysis with quasi-analytical solutions and methods*. Elsevier (2017). 717 pp.
- [9] Gu, H., Lin, Z. G., Lou, B. D.: *Long time behavior for solutions of Fisher-KPP equation with advection and free boundaries*. J. Funct. Anal. **269**, 1714-1768 (2015). <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2015.07.002>
- [10] Kruzhkov, S. N.: *Nonlinear parabolic equations with two independent variables*. Tr. Mosk. Mat. Obs. **16**, 329-346 (1967). (In Russian)
- [11] Friedman, A.: *Partial Differential Equations of Parabolic Type*. Mir, Moscow (1964). 428 pp. (In Russian)
- [12] Ladyzhenskaya, O. A., Solonnikov, V. A., Uraltseva, N. N.: *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*. Nauka, Moscow (1967). 736 pp. (In Russian)
- [13] Meirmanov, A.: *Stefan Problem*. Nauka, Novosibirsk (1986). 240 pp. (In Russian)
- [14] Meirmanov, A. M., Galtsev, O. V., Galtseva, O. A.: *On the existence of a classical solution in the whole time for a free boundary problem*. Sib. Math. J. **60** (2), 419-428 (2019). <https://doi.org/10.1134/S0037446619020137>
- [15] Pan, H., Xu, R., Hu, B.: *A free boundary problem with two moving boundaries modeling grain hydration*. Nonlinearity **31**, 3591-3616 (2018). <https://doi.org/10.1088/1361-6544/aabf04>

- [16] Rasulov, M. S.: *Problem for a quasilinear parabolic equation with two free boundaries*. Uzbek Math. J. **2**, 89-102 (2019). <https://doi.org/10.29229/uzmj.2019-2-11>
- [17] Takhirov, J. O.: *A free boundary problem for a reaction-diffusion equation in biology*. Indian J. Pure Appl. Math. **50**, 95-112 (2019). <https://doi.org/10.1007/s13226-019-0309-8>
- [18] Takhirov, J. O., Rasulov, M. S.: *Problem with free boundary for systems of equations of reaction-diffusion type*. Ukr. Math. J. **69**, 1968-1980 (2018). <https://doi.org/10.1007/s11253-018-1481-4>
- [19] Takhirov J. O., Rasulov M. S., Norov A. Q.: *On a Mathematical Model with a Free Boundary of the Dynamics of Diffuse Infection with an Immune Response*. Lobachevskii Journal of Mathematics **45** (8), 3986-3996 (2024).
- [20] Takhirov, Zh. O., Turaev, R. N.: *Nonlocal Stefan problem for a quasilinear parabolic equation*. Vestn. Samar. Gos. Tekh. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki **60** (28), 8-16 (2012). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1010> (In Russian)
- [21] Takhirov J. O., Umirkhonov M. T.: *On a free boundary problem for the relaxation transfer equation*. Theoretical and Mathematical Physics, **209** (1), 1473–1489 (2021).
- [22] Wang, R., Wang, L., Wang, Zh.: *Free boundary problem of a reaction-diffusion equation with nonlinear convection term*. J. Math. Anal. Appl. **467**, 1233-1257 (2018). <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2018.07.065>

## Free Boundary Problem for a Nonlinear Diffusion Equation

Rasulov Mirojiddin Sobirjonovich and Umirkhonov Masudkhon Turakhon ugli

### Abstract

**In this paper, a Stefan-type problem with two free boundaries for a nonlinear heat equation in the one-dimensional case is considered. The study of nonlinear problems with free boundaries is carried out using a method based on constructing a priori estimates. In this regard, some initial a priori estimates are first established for solving the problem under consideration. Then, the problem is reduced to a problem with a fixed boundary through a change of variables. The resulting problem has time- and position-dependent coefficients with nonlinear terms. Next, a priori estimates of the Schauder type are constructed for solving the equation with nonlinear terms and a fixed boundary. Based on the estimates obtained, the solvability of the original problem is established.**

### Affiliations

Rasulov Mirojiddin Sobirjonovich

**Address:** V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, 9 University str., Tashkent, 100174, Uzbekistan.

Tashkent State University of Transport, 1, Temiryolchilar str., Tashkent, 100071, Uzbekistan.

**e-mail:** rasulovms@bk.ru

**ORCID ID:** 0000-0003-0704-6012

Umirkhonov Masudkhon Turaxon ugli

**Address:** Tashkent State University of Economics, 49, Islom Karimov str., Tashkent, 100066, Uzbekistan.

**e-mail:** m.umixonov@tsue.uz

**ORCID ID:** 0009-0003-9440-3440



# Кратные бифуркации Тьюринга и Андронова-Хопфа в системе "реакция-диффузия"

Юмагулов Марат\* Габдрахманов Роберт

## Аннотация

В статье обсуждаются вопросы исследования локальных бифуркаций в окрестностях пространственно однородных положений равновесия системы "реакция-диффузия" в ограниченной области с однородными краевыми условиями Неймана. Основные результаты касаются изучения задач о бифуркации Тьюринга и бифуркации Андронова-Хопфа в ситуации кратного вырождения линеаризованной системы. В рассматриваемой ситуации коразмерность бифуркации не совпадает с кратностью собственных значений соответствующих линейных операторов, что приводит к существенному усложнению задачи. В статье проведен анализ случаев, приводящих к возникновению кратных бифуркаций, определены условия кратного вырождения, предложены подходы исследования задач об устойчивости и бифуркациях в окрестностях положений равновесия в указанных условиях. Основным результатом является исследование и описание структуры многообразия возникающих при бифуркации решений системы "реакция-диффузия". Обсуждаются также возможные направления развития предложенных результатов в задачах исследования кратных бифуркаций.

*Ключевые слова:* реакция-диффузия, положение равновесия, устойчивость, бифуркация, Тьюринг, Андронова-Хопф

*Предметная классификация AMS (2020):* Primary: 00A00 ; Secondary: 00B00; 00C00; 00D00; 00E00; 00F00.

## 1. Введение и постановки задачи

Изучению систем типа "реакция-диффузия" традиционно посвящается большое количество работ в силу широкой области ее приложений (см., например, [1-5]) и имеющуюся там библиографию). Одним из важнейших направлений исследований таких систем является изучение критических явлений и связанных с ними бифуркаций, приводящих к возникновению в окрестности положений равновесия диссипативных структур (бифуркация Тьюринга) и автоволновых процессов (бифуркация Андронова-Хопфа). Возникновение таких решений связано с тем, что собственные значения соответствующей линеаризованной системы переходят через мнимую ось: через значение  $\lambda = 0$  для диссипативных структур и через значение  $\lambda = i\omega$  (где  $\omega \neq 0$ ) для автоволн.

Волновые числа, соответствующие указанным бифуркациям, часто оказываются такими, что соответствующий линейный оператор будет иметь собственные значения, кратность которых не совпадает с коразмерностью бифуркации. Наличие таких ситуаций существенно усложняет применение стандартных методов исследования бифуркаций. Как правило, известные работы по изучению бифуркаций в системе "реакция-диффузия" направлены на исследований ситуаций, когда кратность собственных значений и коразмерность бифуркаций совпадают (см., например, [4-11]). Вопросы исследования ситуаций, когда кратность собственных значений и коразмерность

бифуркации различны, остаются малоизученной темой. В настоящей работе обсуждаются некоторые аспекты задач о бифуркациях Тьюринга и Андронова-Хопфа в указанных ситуациях.

Основным объектом исследования является система “реакция-диффузия” (см., например, [2-11]), описываемая дифференциальным уравнением

$$\frac{dw}{dt} = A(\mu)w + D\Delta w + h(w), \quad w \in R^N, \quad (1.1)$$

в которой  $A(\mu)$  – матрица Якоби, гладко зависящая от параметра  $\mu$ ,  $D$  – ненулевая матрица диффузии с неотрицательными элементами,  $\Delta$  – оператор Лапласа:  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_m^2}$ , нелинейность  $h(w)$  удовлетворяет соотношению:  $\|h(w)\| = o(\|w\|)$  при  $w \rightarrow 0$ . Уравнение (1.1) изучается в параллелипипеде

$$\Omega = \{x : 0 \leq x_1 \leq \pi, 0 \leq x_2 \leq \pi, \dots, 0 \leq x_m \leq \pi\}.$$

В качестве граничных условий рассматриваются условия Неймана

$$\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial \Omega} = 0. \quad (1.2)$$

Система (1.1)-(1.2) имеет стационарное нулевое решение  $w = 0$ ; оно является решением краевой задачи

$$A(\mu)w + D\Delta w + h(w) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial \Omega} = 0. \quad (1.3)$$

## 2. Основные понятия и обозначения

Через  $L_2(\Omega)$  будем обозначать гильбертово пространство функций  $v(x)$ , определенных на  $\Omega$ , а через  $W_2^2(\Omega)$  – соболевское пространство с нормой

$$\|v(x)\|_{W_2^2} = \left( \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq 2} \|D^\alpha v\|^2 dx \right)^{1/2};$$

здесь  $D^\alpha$  – оператор дифференцирования:  $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}$ ,  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m$ ,  $\|\cdot\|$  – евклидова норма в  $R^n$ . Через  $C(\Omega)$  и  $C^2(\Omega)$  обозначим пространства непрерывных и дважды непрерывно дифференцируемых функций. Определим также множество

$$C_0^2(\Omega) = \left\{ v \in C^2 : \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial \Omega} = 0 \right\}.$$

Оператор Лапласа  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_m^2} : C_0^2 \rightarrow C$  может быть (см., например, [6]) расширен до замкнутого самосопряженного оператора  $\Delta : L_2 \rightarrow L_2$  с областью определения  $G_0$ , образованного замыканием в  $W_2^2$  множества  $C_0^2(\Omega)$ . Спектр оператора  $\Delta$  состоит из изолированных собственных значений  $\lambda = -k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_m^2$  конечной кратности ( $k_i$  – целые неотрицательные числа).

Решениями системы (1.1)-(1.2) будем называть функции  $w(x, t)$ , которые:

- при каждом фиксированном значении  $t$  являются элементами пространства  $W_2^2(\Omega)$ ;
- при каждом фиксированном значении  $x \in \Omega$  являются непрерывно дифференцируемыми по  $t$  функциями;
- удовлетворяют уравнению (1.1) и граничным условиям (1.2) при всех  $t \geq 0$  и  $x \in \Omega$ .

Точку равновесия  $w = v_0(x)$  системы (1.1)-(1.2) называют (см., например, [3, 4]) *устойчивой по Ляпунову*, если для каждого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что если  $\|u_0(x) - v_0(x)\|_{W_2^2} < \delta$ , то решение  $w(x, t)$  системы

(1.1)-(1.2) удовлетворяет неравенству  $\|w(x, t) - v_0(x)\|_{W_2^2} < \varepsilon$  для всех  $t > 0$ ; здесь  $w(x, t)$  – решение задачи Коши для системы (1.1)-(1.2) с начальным условием  $w(x, 0) = u_0(x)$ . Если, кроме того,  $\|w(x, t) - v_0(x)\|_{W_2^2} \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , то точку равновесия  $w = v_0(x)$  называют *асимптотически устойчивой*.

Характер устойчивости нулевой точки равновесия  $w = 0$  системы (1.1)-(1.2) определяются свойствами спектра линейного оператора

$$S(\mu) = A(\mu) + D\Delta : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega), \quad (2.1)$$

с плотной в  $L_2(\Omega)$  областью определения  $G_0$ . Оператор (2.1) является замкнутым, его спектр является дискретным, а именно, состоит из изолированных собственных значений конечной кратности (см., например, [11]). Если все собственные значения оператора (2.1) имеют отрицательные вещественные части, то точка равновесия  $w = 0$  системы (1.1)-(1.2) является асимптотически устойчивой. Если же этот оператор имеет собственное значение с положительной вещественной частью, то точка равновесия  $w = 0$  будет неустойчивой. Соответственно, если оператор (2.1) при некотором  $\mu = \mu_0$  имеет собственное значение с нулевой вещественной частью, то значение  $\mu_0$  будет точкой бифуркации.

Будем говорить, что значение  $\mu = \mu_0$  является *точкой бифуркации Тьюринга* системы (1.1)-(1.2), если оператор  $S(\mu_0)$  имеет собственное значение  $\lambda = 0$ , а остальные его собственные значения имеют отрицательные вещественные части.

Будем говорить, что значение  $\mu = \mu_0$  является *точкой бифуркации Андронова-Хопфа* системы (1.1)-(1.2), если оператор  $S(\mu_0)$  имеет пару чисто мнимых собственных значений  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$ , а остальные его собственные значения имеют отрицательные вещественные части.

*Remark 2.1.* Требование, чтобы остальные собственные значения оператора  $S(\mu_0)$  имели отрицательные вещественные части, связано со следующим обстоятельством. Если допустить, что оператор  $S(\mu_0)$  имеет собственное значение с положительной вещественной частью, то возникающие при бифуркации диссипативные структуры или автоволны будут заведомо неустойчивы. Отметим, в частности, что обязательным условием обоих видов бифуркаций является требование, чтобы матрица  $A(\mu_0)$  была устойчивой. Обсуждение соответствующих вопросов приведено в [7, 12].

Отметим справедливость следующих утверждений (см., например, [10, 11]).

**Lemma 2.1.** *Бифуркация Тьюринга для системы (1.1)-(1.2) возможна только при  $N \geq 2$ .*

**Lemma 2.2.** *Бифуркация Андронова-Хопфа для системы (1.1)-(1.2) возможна только при  $N \geq 3$ .*

### 3. Вспомогательные матрицы

Ниже квадратную вещественную матрицу  $B$  будем называть *устойчивой*, если все ее собственные значения имеют отрицательные вещественные части.

Множество собственных значений оператора (2.1) совпадает с множеством собственных значений матриц

$$B_\kappa(\mu) = A(\mu) - (k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_m^2) D, \quad (3.1)$$

где  $k_j$  – целые неотрицательные числа, а через  $\kappa$  обозначен мультииндекс  $\kappa = (k_1, k_2, \dots, k_m)$ . Если все эти матрицы являются устойчивыми, то и точка равновесия  $w = 0$  будет асимптотически устойчивым решением системы (1.1)-(1.2). Если же хотя бы одна из матриц (3.1) имеет собственное значение с положительной вещественной частью, то точка равновесия  $w = 0$  будет неустойчивой.

Понятия бифуркаций Тьюринга и Андронова-Хопфа полезно переформулировать с использованием матриц (3.1). Определим числа

$$\rho_\kappa = k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_m^2. \quad (3.2)$$

Будем говорить, что значение  $\mu = \mu_0$  является *точкой бифуркации Тьюринга* системы (1.1)-(1.2), если:

T1) при некотором мультииндексе  $\kappa_0 = (k_1, k_2, \dots, k_m)$  матрица  $B_0 = B_{\kappa_0}(\mu_0)$  имеет собственное значение  $\lambda = 0$ , а остальные собственные значения матрицы  $B_0$  имеют отрицательные вещественные части;

T2) матрицы  $B_{\kappa}(\mu_0)$  при  $\kappa \neq \kappa_0$  являются устойчивыми.

Будем говорить, что значение  $\mu = \mu_0$  является *точкой бифуркации Андронова-Хопфа* системы (1.1)-(1.2), если:

H1) при некотором мультииндексе  $\kappa_0 = (k_1, k_2, \dots, k_m)$  матрица  $B_0 = B_{\kappa_0}(\mu_0)$  имеет пару чисто мнимых собственных значений  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$ , а остальные собственные значения матрицы  $B_0$  имеют отрицательные вещественные части;

H2) матрицы  $B_{\kappa}(\mu_0)$  при  $\kappa \neq \kappa_0$  являются устойчивыми.

Сценарий бифуркации Тьюринга связан с тем, что при переходе параметра  $\mu$  через значение  $\mu_0$  в системе (1.1) в окрестности точки равновесия  $w = 0$  возникают ненулевые пространственно неоднородные точки равновесия  $w = w(x, \mu)$ . Соответственно, сценарий бифуркации Андронова-Хопфа связан с тем, что при переходе параметра  $\mu$  через значение  $\mu_0$  в системе (1.1) в окрестности точки равновесия  $w = 0$  возникают нестационарные периодические решения  $w = w(x, t, \mu)$ .

#### 4. Свойства множества чисел (3.2)

Сравнение приведенных определений точек бифуркаций, основанных на свойствах определенного равенством (2.1) оператора  $S(\mu)$  и определенных равенствами (3.1) матриц  $B_{\kappa}(\mu)$ , приводит к следующему вопросу. Пусть  $\lambda_0$  – собственное значение матрицы  $B_{\kappa_0}(\mu_0)$  при некотором мультииндексе  $\kappa_0 = (k_1, k_2, \dots, k_m)$ . Тогда  $\lambda_0$  будет собственным значением и оператора  $S(\mu_0)$ . Но будут ли одинаковы и кратности этого собственного значения для обоих операторов?

С целью обсуждения этого вопроса введем обозначения:

- $Z_+$  – множество целых неотрицательных чисел;
- $Z_0(m)$  – множество чисел вида (3.2);
- $Z_1(m)$  – множество чисел, состоящее из тех  $\rho \in Z_0(m)$ , для которых существует единственный мультииндекс  $\kappa = (k_1, k_2, \dots, k_m)$  такой, что  $\rho = k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_m^2$ ;
- $Z_2(m)$  – множество чисел, состоящее из тех  $\rho \in Z_0(m)$ , для которых существуют два или более мультииндексов  $\kappa = (k_1, k_2, \dots, k_m)$  таких, что  $\rho = k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_m^2$ ;
- $Z(m) = \{\rho : \rho = mj^2, j = 0, 1, 2, \dots\}$ .

По построению имеем:

$$Z_1(m) \cup Z_2(m) = Z_+, \quad Z_1(m) \cap Z_2(m) = \emptyset, \quad Z(m) \subset Z_0(m).$$

Далее верны следующие включения:

$$Z_1(m) \subset Z(m), \tag{4.1}$$

$$Z_0(m) \neq Z_+ \text{ для } 1 \leq m \leq 3, \quad Z_0(m) = Z_+ \text{ для } m \geq 4. \tag{4.2}$$

Равенство в (4.2) следует из теоремы Лагранжа о представимости любого натурального числа в виде суммы четырех квадратов.

Обсудим свойства множеств  $Z_1(m)$  и  $Z_2(m)$  для различных  $m$ . Имеем:

$$m = 1 \Rightarrow Z_1(m) = Z(m) = \{0, 1, 4, 9, \dots, k^2, \dots\}, \quad Z_2(m) = \emptyset;$$

$$m = 2 \Rightarrow Z_1(m) = \{0, 2, 8, 18, 32, 72, 98, 128, 162, \dots\}, \quad Z_2(m) = \{1, 3, 4, 5, \dots\};$$

$$m = 3 \Rightarrow Z_1(m) = \{0, 3, 12, \dots\}, \quad Z_2(m) = \{1, 2, 4, 5, \dots\};$$

$$m \geq 4 \Rightarrow Z_1(m) = \{0\}; \quad Z_2(m) = Z_+ / \{0\} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

Приведенные свойства множеств  $Z_1(m)$  и  $Z_2(m)$  показывают, что если матрица  $B_{\kappa_0}(\mu_0)$  имеет собственное значение кратности  $l$ , а другие матрицы  $B_{\kappa}(\mu_0)$  при  $\kappa \neq \kappa_0$  не имеют собственного значения  $\lambda_0$ , то оператор  $S(\mu_0)$  также имеет собственное значение  $\lambda_0$ , кратность которого совпадает с кратностью  $l$  (кратностью  $rl$ ), если  $\rho \in Z_1(m)$  (если  $\rho \in Z_2(m)$  и  $\rho$  представимо  $r$  различными способами).

Отсюда следует, что верны следующие утверждения

**Theorem 4.1.** Пусть  $\rho_0 \in Z_1(m)$  и пусть  $\kappa_0$  – соответствующий единственный мультииндекс. Пусть  $\lambda_0$  – собственное значение матрицы (3.1) при мультииндексе  $\kappa_0$ . Пусть, наконец, матрицы (3.1) при других мультииндексах не имеют собственного значения  $\lambda_0$ . Тогда оператор (2.1) имеет собственное значение  $\lambda_0$  той же алгебраической и геометрической кратности, что и матрица (3.1) при мультииндексе  $\kappa_0$ .

**Theorem 4.2.** Пусть  $\rho_0 \in Z_2(m)$  и пусть ему соответствуют в точности два разных мультииндекса  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$ . Пусть  $\lambda_0$  – собственное значение матрицы (3.1) при мультииндексе  $\kappa_1$  (или, что то же самое, при мультииндексе  $\kappa_2$ ), алгебраическая и геометрическая кратности которого равны  $\nu$  и  $\varkappa$  соответственно. Пусть, наконец, матрицы (3.1) при других мультииндексах не имеют собственного значения  $\lambda_0$ . Тогда оператор (2.1) имеет собственное значение  $\lambda_0$ , алгебраическая и геометрическая кратности которого равны  $2\nu$  и  $2\varkappa$  соответственно.

Аналогичные утверждения имеют место и в ситуациях, когда числу  $\rho_0 \in Z_2(m)$  соответствуют более двух различных мультииндексов.

В силу теорем 4.1 и 4.2 в задаче о бифуркациях кратность собственных значений оператора (2.1) и коразмерность соответствующих бифуркаций при  $m \geq 2$  могут не совпадать. Для иллюстрации этого факта рассмотрим случай  $m = 2$ . Пусть при некотором мультииндексе  $\kappa_0 = (k_1, k_2)$  таком, что  $k_1 \neq k_2$  (тогда  $\rho = k_1^2 + k_2^2 \in Z_2(m)$ ), матрица  $B_0 = B_{\kappa_0}(\mu_0)$  имеет простое собственное значение  $\lambda = 0$ . Пусть остальные собственные значения матрицы  $B_0$  и всех других матриц  $B_{\kappa}(\mu_0)$  при  $\kappa \neq \kappa_0$  и  $|\kappa| \neq k_1^2 + k_2^2$ , имеют отрицательные вещественные части. Тогда  $\mu_0$  – точка бифуркации Тьюринга системы (1.1)-(1.2). При этом коразмерность бифуркации равна одному. Но кратность собственного значения  $\lambda = 0$  оператора  $S(\mu_0)$  будет больше или равна двум.

Отметим, что при  $m = 1$  кратность собственных значений оператора (2.1) и коразмерность соответствующих бифуркаций совпадают.

## 5. Основные утверждения

Обсудим задачу о бифуркациях в системе (1.1)-(1.2) в случае, когда кратность собственных значений оператора  $S(\mu_0)$  и коразмерность бифуркации не совпадают. Ограничимся рассмотрением задачи о бифуркации Тьюринга. Для задачи о бифуркации Андронова-Хопфа рассуждения аналогичны.

Для простоты будем рассматривать систему (1.1)-(1.2) при  $m = 2$ . Другими словами, будем рассматривать систему (1.1)-(1.2) вида

$$\frac{dw}{dt} = A(\mu)w + D\Delta w + h(w), \quad w \in R^N, \quad \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial \Omega} = 0, \quad (5.1)$$

относительно неизвестной функции  $w = w(x, y, t)$ . Здесь  $\Delta$  – оператор Лапласа:  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ , а  $\Omega$  – квадрат:  $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}$ .

Матрицы (3.1) здесь примут вид

$$B_{\kappa}(\mu) = A(\mu) - (k^2 + l^2)D, \quad (5.2)$$

где  $k$  и  $l$  – целые неотрицательные числа, а через  $\kappa$  обозначен мультииндекс  $\kappa = (k, l)$ .

Пусть  $\mu_0$  – точка бифуркации Тьюринга системы (5.1), а именно, пусть выполнено условие:

P1 матрица  $B_0 = B_{\kappa_1}(\mu_0)$  при некотором мультииндексе  $\kappa_1 = (k_0, l_0)$  имеет простое собственное значение  $\lambda = 0$ , причем  $\rho = k_0^2 + l_0^2 \in Z_2(m)$ ,  $k_0 \neq l_0$ , и числу  $\rho$  соответствуют в точности два разных мультииндекса  $\kappa_1 = (k_0, l_0)$  и  $\kappa_2 = (l_0, k_0)$ . Пусть остальные собственные значения матрицы  $B_0$  и всех других матриц  $B_\kappa(\mu_0)$  при  $\kappa \neq \kappa_1$  и  $\kappa \neq \kappa_2$  имеют отрицательные вещественные части.

Пусть  $e_0$  и  $e_0^*$  – это собственные векторы матрицы  $B_0$  и транспонированной матрицы  $B_0^*$ , соответствующие простому собственному значению  $\lambda = 0$ . Эти векторы можно нормировать в соответствии с равенством

$$(e_0, e_0^*) = 1. \quad (5.3)$$

В силу условия P1 оператор  $S(\mu_0)$ , определенный равенством (2.1), имеет собственное значение  $\lambda = 0$  кратности 2. Соответствующими собственными функциями оператора  $S(\mu_0)$  и сопряженного оператора  $S^*(\mu_0)$  будут функции

$$\begin{cases} u_0(x, y) = e_0 \cos k_0 x \cos l_0 y; & u_0^*(x, y) = e_0^* \cos k_0 x \cos l_0 y; \\ v_0(x, y) = e_0 \cos l_0 x \cos k_0 y; & v_0^*(x, y) = e_0^* \cos l_0 x \cos k_0 y. \end{cases} \quad (5.4)$$

Эти функции можно нормировать в соответствии с равенствами

$$(u_0, u_0^*)_{L_2} = (v_0, v_0^*)_{L_2} = 1, \quad (u_0, v_0^*)_{L_2} = (v_0, u_0^*)_{L_2} = 0.$$

Обозначим через  $E^c$  двумерное подпространство в  $L_2(\Omega)$ , базисом которого являются функции  $u_0$  и  $v_0$ .

Наряду с (5.1) будем рассматривать также расширенную систему

$$\begin{cases} w_t' = A(\mu)w + D\Delta w + h(w), \\ \mu_t' = 0, \end{cases} \quad (5.5)$$

Положим  $\Lambda = \{\mu : \mu \in R^1\}$ . Определим два линейных пространства

$$H = \{(w, \mu) : w \in L_2, \mu \in \Lambda\}, \quad E_\mu^c = \{(w, \mu) : w \in E^c, \mu \in \Lambda\};$$

$E_\mu^c$  является трехмерным подпространством пространства  $H$ .

В соответствии в теореме о центральном многообразии (см., например, [13]) при выполнении условия P1 система (5.5) в пространстве  $H$  имеет трехмерное гладкое многообразие  $U$ , обладающее свойствами:

- 1) многообразие  $U$  содержит точку  $(0, \mu_0)$ ;
- 2) многообразие  $U$  касается подпространства  $E_\mu^c$  в точке  $(0, \mu_0)$ ;
- 3) многообразие  $U$  содержит все точки равновесия и периодические орбиты системы (5.5), лишь бы их траектории располагались в малой окрестности точки  $(0, \mu_0)$ . Многообразие  $U$  называют центральным многообразием системы (5.5).

В соответствии с общей теорией бифуркаций [13], возникающие при выполнении условия P1 бифуркационные решения системы (5.1) образуют (локально в окрестности точки  $(0, \mu_0)$ ) двумерное гладкое многообразие  $U_c$ , располагающееся на многообразии  $U$ . Многообразие  $U_c$  можно представить как семейство непрерывных ветвей бифуркационных решений системы (5.1), которые можно описать следующими параметрически заданными функциями

$$\begin{cases} w = w(x, y, \varepsilon) = \varepsilon e_1(x, y) + \varepsilon^2 e_2(x, y) + \dots, \\ \mu = \mu(\varepsilon) = \mu_0 + \varepsilon \mu_1 + \varepsilon^2 \mu_2 + \dots, \end{cases} \quad (5.6)$$

где  $\varepsilon$  – вспомогательный малый параметр. При этом в качестве функции  $e_1(x, y)$  могут быть использованы любые ненулевые функции из  $E^c$ , т.е. функции вида

$$e_1(x, y) = C_1 u_0(x, y) + C_2 v_0(x, y),$$

в котором  $C_1$  и  $C_2$  ( $C_1^2 + C_2^2 > 0$ ) – постоянные.

Обсудим вопрос о построении семейства бифуркационных решений (5.6). Для простоты рассуждений будем считать, что нелинейность  $h(w)$  в системе (5.1) имеет вид

$$h(w) = h_3(w) + h_4(w), \quad (5.7)$$

где  $h_3(w)$  является однородным полиномом третьей степени (тогда  $h_3(\lambda w) \equiv \lambda^3 h_3(w)$ ),  $h_4(w)$  удовлетворяет условию:  $h_4(w) = O(\|w\|^4)$  при  $w \rightarrow 0$ . Общий случай (когда нелинейность  $h(w)$  начинается с квадратичных слагаемых) приводит к более сложным формулам и поэтому здесь рассматриваться не будет.

**Theorem 5.1.** Пусть выполнено условие P1. Пусть

$$(A'(\mu_0)e_0, e_0^*) \neq 0; \quad (5.8)$$

здесь  $A'(\mu)$  – производная матрицы  $A(\mu)$ . Тогда система (5.1) имеет непрерывную ветвь бифуркационных решений вида

$$\begin{cases} w = w(x, y, \varepsilon) = \varepsilon u_0(x, y) + O(\varepsilon^3), \\ \mu = \mu(\varepsilon) = \mu_0 + \varepsilon^2 \mu_2 + O(\varepsilon^3), \end{cases} \quad (5.9)$$

в котором

$$\mu_2 = -\frac{(h(e_0), e_0^*)}{16(A'(\mu_0)e_0, e_0^*)}. \quad (5.10)$$

Приведенное утверждение позволяет получить только одну из непрерывных ветвей (5.6). Главной асимптотикой (по степеням малого параметра  $\varepsilon$ ) этой ветви является функция  $\varepsilon u_0(x, y)$ . Естественен вопрос о получении остальных ветвей бифуркационных решений (5.6).

Рассмотрим набор функций

$$\begin{cases} e_1(x, y) = C_1 u_0(x, y) + C_2 v_0(x, y); & e_1^*(x, y) = C_1^* u_0^*(x, y) + C_2^* v_0^*(x, y); \\ e_2(x, y) = C_1 v_0(x, y) - C_2 u_0(x, y); & e_2^*(x, y) = C_1^* v_0^*(x, y) - C_2^* u_0^*(x, y), \end{cases} \quad (5.11)$$

в которых  $C_1, C_2, C_1^*, C_2^*$  – вещественные константы. Эти функции можно нормировать в соответствии с равенствами

$$(e_1, e_1^*)_{L_2} = (e_2, e_2^*)_{L_2} = 1, \quad (e_1, e_2^*)_{L_2} = (e_2, e_1^*)_{L_2} = 0.$$

**Theorem 5.2.** В условиях теоремы 5.1 система (5.1) имеет непрерывную ветвь бифуркационных решений вида

$$\begin{cases} w = w(x, y, \varepsilon) = \varepsilon e_1(x, y) + O(\varepsilon^3), \\ \mu = \mu(\varepsilon) = \mu_0 + \varepsilon^2 \mu_2 + O(\varepsilon^3), \end{cases} \quad (5.12)$$

в которой  $\mu_2$  определяется равенством (5.10).

Таким образом, семейство непрерывных ветвей бифуркационных решений (5.6) системы (5.1) может быть представлено в виде (5.12), в котором значение  $\mu_2$  не зависит от выбора функции  $e_1(x, y)$ . В этой связи отметим, что в задаче о бифуркациях одним из основных является вопрос о направленности бифуркаций, т.е. вопрос о том, при каких значениях параметра возникают бифуркационные решения. Из теорем 5.1 и 5.2 следует, что верна

**Theorem 5.3.** Пусть в условиях теоремы 5.1 выполнено неравенство  $\mu_2 > 0$  ( $\mu_2 < 0$ ). Тогда бифуркационные решения системы (5.1) возникают при  $\mu > \mu_0$  (при  $\mu < \mu_0$ ).

## 6. Доказательство теоремы 5.1

Приведем схему доказательства теоремы 5.1 (теорема 5.2 доказывается по той же схеме).

Задача о бифуркации Тьюринга системы (5.1) приводит к необходимости изучения краевой задачи (1.3). Так как матрица  $D$  обратима, то задача (1.3) равносильна нелинейной краевой задаче Неймана

$$\Delta w = -D^{-1}[A(\mu)w + h(w)], \quad \left. \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial \Omega} = 0, \quad (6.1)$$

которая, в свою очередь, равносильна операторному уравнению

$$w = T(\mu)w + b(w), \quad (6.2)$$

в котором

$$T(\mu)w(x, y) = \int_{\Omega} G(x, y, \psi)K(\mu)w(\psi) d\psi, \quad b(w(x, y)) = \int_{\Omega} G(x, y, \psi)D^{-1}h(w(\psi)) d\psi; \quad (6.3)$$

здесь  $K(\mu) = D^{-1}A(\mu)$ ,  $G(x, y, \psi)$  – функция Грина задачи Неймана (6.1), а  $\psi = (\psi_1, \psi_2)$  – двумерная переменная (переменная интегрирования), определяющая квадрат  $\Omega = \{(\psi_1, \psi_2) : 0 \leq \psi_1 \leq \pi, 0 \leq \psi_2 \leq \pi\}$ .

Операторы (6.3) действуют и вполне непрерывны в пространстве  $L_2$ , при этом:

- линейный оператор  $T(\mu_0)$  имеет собственное значение  $\lambda = 1$  кратности 2;
- нелинейный оператор  $b(w)$  с учетом равенства (5.7) представим в виде  $b(w) = b_3(w) + b_4(w)$ .

Задача о бифуркации для операторного уравнения (6.2) имеет ту особенность, что коразмерность бифуркации равна одному, а кратность собственного значения  $\lambda = 1$  оператора  $T(\mu_0)$  равна двум. Поэтому стандартные методы исследования бифуркации задачи не проходят. Предлагается следующая схема построения бифуркационных решений уравнения (6.2). Введем в уравнение (1.3) дополнительный параметр  $\nu$ , а именно, перейдем от однопараметрической задачи (1.3) к рассмотрению двухпараметрической задачи

$$A(\mu)w + D\Delta w + \nu P_1 w + h(w) = 0, \quad \left. \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial \Omega} = 0, \quad (6.4)$$

в которой  $P_1$  – оператор  $P_1 w(x, y) = (w(x, y), u_0^*(x, y))_{L_2} v_0(x, y)$ . При  $\nu = \nu_0 = 0$  задача (6.4) совпадает с задачей (1.3). Таким образом, от однопараметрического уравнения (6.2) перейдем к двухпараметрическому уравнению

$$w = T(\mu, \nu)w + b_3(w) + b_4(w), \quad (6.5)$$

где с учетом равенства (5.7):

$$T(\mu, \nu)w(x, y) = \int_{\Omega} G(x, y, \psi)K(\mu, \nu)w(\psi) d\psi, \quad b_j(w(x, y)) = \int_{\Omega} G(x, y, \psi)D^{-1}h_j(w(\psi)) d\psi \quad (j = 3, 4);$$

здесь  $K(\mu, \nu) = D^{-1}(A(\mu) + \nu P_1 w)$ .

Для анализа двухпараметрического уравнения (6.5) воспользуемся методами исследования многопараметрических бифуркаций [14, 15]. По указанной в этих работах схеме для каждого набора функций вида (5.11) и, в частности, для функций (5.4) однозначно определяется непрерывная ветвь бифуркационных решений уравнения (6.5):

$$\begin{cases} w = w^*(x, y, \varepsilon) = \varepsilon u_0(x, y) + \varepsilon^3 u_2(x, y) + \dots, \\ \mu = \mu(\varepsilon) = \mu_0 + \varepsilon^3 \mu_2 + \dots, \\ \nu = \nu(\varepsilon) = \nu_0 + \varepsilon^3 \nu_2 + \dots, \end{cases} \quad (6.6)$$

где  $\varepsilon$  – вспомогательный малый параметр. В этой ветви коэффициенты функций  $\mu(\varepsilon)$  и  $\nu(\varepsilon)$  однозначно определяются по выбранным функциям (5.4). В работах [14, 15] приводятся и алгоритмы построения коэффициентов формул (6.6). Для завершения доказательства теоремы 5.1 достаточно показать, что двухпараметрическое уравнение (6.5) можно построить таким образом, чтобы в формулах (6.6) получили:  $\nu_2 =$

$\nu_3 = \dots = 0$ . Тогда функции (6.6) будут решениями и однопараметрического уравнения (1.3) и, следовательно, будут бифуркационными решениями исходной системы (5.1).

Ограничимся доказательством того, что для уравнения (6.5) получим  $\nu_2 = 0$ . Для вычисления коэффициентов  $\mu_2$  и  $\nu_2$  воспользуемся приведенными в [15] формулами. Основным здесь является вопрос об обратимости матрицы

$$Q = \begin{bmatrix} (T_\mu(\mu, \nu)u_0(x, y), u_0^*(x, y))_{L_2} & (T_\nu(\mu, \nu)u_0(x, y), u_0^*(x, y))_{L_2} \\ (T_\mu(\mu, \nu)u_0(x, y), v_0^*(x, y))_{L_2} & (T_\nu(\mu, \nu)u_0(x, y), v_0^*(x, y))_{L_2} \end{bmatrix};$$

здесь  $T_\mu(\mu, \nu)$  и  $T_\nu(\mu, \nu)$  – это производные оператора  $T(\mu, \nu)$  по  $\mu$  и  $\nu$  соответственно. Несложные вычисления показывают, что в силу предположения (5.8) эта матрица обратима.

Тогда по указанным в [15] (стр. 10) формулам получим:

$$\begin{bmatrix} \mu_2 \\ \nu_2 \end{bmatrix} = -Q^{-1} \begin{bmatrix} (b_3(u_0(x, y)), u_0^*(x, y))_{L_2} \\ (b_3(u_0(x, y)), v_0^*(x, y))_{L_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(h(e_0), e_0^*) / (16(A'(\mu_0)e_0, e_0^*)) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Другими словами, коэффициент  $\mu_2$  определяется равенством (5.10), а коэффициент  $\nu_2$  является нулевым:  $\nu_2 = 0$ . При этом вычисления показывают, что значение коэффициента (5.10) не зависит от выбора функций (5.11).

## 7. Пример.

В качестве приложения рассмотрим задачу о бифуркации Тьюринга в распределенной модели “брюсселятор” (см., например, [6]), описываемую двумерной системой уравнений

$$\begin{cases} u_t' = (\mu - 1)u + a^2v + d_1\Delta u + u^2v, \\ v_t' = -\mu u - a^2v + d_2\Delta v - u^2v, \end{cases} \quad (7.1)$$

относительно неизвестных функций  $u = u(x, y, t)$  и  $v = v(x, y, t)$ ; здесь  $a$ ,  $\mu$ ,  $d_1$  и  $d_2$  – положительные коэффициенты,  $\Delta$  – оператор Лапласа:  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ . Эту систему будем изучать в квадрате  $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}$  с граничными условиями Неймана  $\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial \Omega} = 0$ .

Система (7.1) представима в виде (5.1) при

$$w = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad A(\mu) = \begin{bmatrix} \mu - 1 & a^2 \\ -\mu & -a^2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}, \quad h(w) = \begin{bmatrix} u^2v \\ -u^2v \end{bmatrix}.$$

Система (7.1) имеет нулевую точку равновесия  $u = v = 0$ . В отсутствие диффузии (т.е. когда  $d_1 = d_2 = 0$ ) эта точка равновесия устойчива, если  $\mu < a^2 + 1$ . При переходе к системе с диффузией (т.е. когда  $d_1 > 0$ ,  $d_2 > 0$ ) положение равновесия  $u = v = 0$  уже может стать неустойчивым и, как следствие, привести к бифуркации Тьюринга.

Матрица (5.2) в рассматриваемом примере имеет вид

$$B_\kappa(\mu) = A(\mu) - (k^2 + l^2)D = \begin{bmatrix} \mu - 1 - (k^2 + l^2)d_1 & a^2 \\ -\mu & -a^2 - (k^2 + l^2)d_2 \end{bmatrix}.$$

Эта матрица при  $k = k_0 = 1$  и  $l = l_0 = 2$  и следующих значениях параметров

$$\mu_0 = 2, \quad a^2 = 2, \quad d_1 = \frac{1}{10}, \quad d_2 = \frac{6}{5},$$

имеет собственные значения  $\lambda_1 = 0$  и  $\lambda_2 = -7, 5$ .

Все условия теоремы 5.1 для рассматриваемой системы (7.1) при указанных значениях параметров выполнены. В качестве собственных векторов  $e_0$  и  $e_0^*$  матрицы  $B_0 = B_{\kappa_0}(\mu_0)$  (где  $\kappa_0 = (1, 2)$ ) и транспонированной матрицы  $B_0^*$ , соответствующих собственному значению  $\lambda_1 = 0$  и нормированных условиями (5.3), можно взять векторы

$$e_0 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad e_0^* = C \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix},$$

где  $C = \frac{1}{15}$ . Несложные вычисления по формуле (5.10) показывают, что  $\mu_2 = -\frac{1}{4}$ . Таким образом, в силу теорем 5.1–5.3 значение  $\mu_0 = 2$  является точкой бифуркации Тьюринга системы (7.1), при этом бифурцирующие решения системы (7.1) возникают при  $\mu < \mu_0 = 2$ .

## Благодарность

We would like to thank ...

## Финансирование

This work is supported by ...

## Наличие данных и материалов

Not applicable.

## Конкурирующие интересы

Авторы заявляют об отсутствии у них конфликта интересов.

## Вклад автора

Все авторы внесли равный вклад в написание этой статьи. Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

## Список литературы

- [1] Свирижев Ю. М. Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии.—М.: Наука, 1987.—368 с.
- [2] Мюррей, Дж Математическая биология. Том 1. Введение—Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика Институт космических исследований, 2009.—776 с. в А. С
- [3] Братусь А. С., Новожилов А. С., Платонов А. П. Динамические системы и модели биологии.—М.: Изд-во Физматлит, 2010.—436 с.
- [4] Магницкий Н. А. Теория динамического хаоса.—М.: URSS, 2011.—320 с.
- [5] Ванг В. К. Диссипативные структуры в реакционно-диффузионных системах. — М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2008.—300 с.
- [6] Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла.—М.: Мир, 1985.—280 с.
- [7] Юмагулов М. Г., Васенина Н. А., Габдрахманов Р И Операторные методы исследования задач об устойчивости и бифуркациях в системе "реакция-диффузия" и их приложения // Дифференциальные уравнения.—2025.—Т. 61, № 4.—С. 545–562.
- [8] Abushahmina G.R., Gusarova N.I., Yumagulov M.G. Lyapunov quantities for Andronov-Hopf bifurcation problem in reaction-diffusion systems// Lobachevskii Journal of Mathematics.—2021.—Vol. 42, № 15.—p. 3567–3573.
- [9] Юмагулов М. Г., Сидельникова Н. А. Системы типа "реакция-диффузия": признаки устойчивости и бифуркаций// Вестник Башкирского университета.—2023.—Т. 28, № 4.—С. 303–309. DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2023.4.1
- [10] Борина М. Ю., Полежаев А. А. Диффузионная неустойчивость в трехкомпонентной модели типа «реакция–диффузия» // Компьютерные исследования и моделирование.—2011.—Т. 3, № 2.—С. 135–146.
- [11] Кузнецов М. Б. Исследование формирования структур Тьюринга под влиянием волновой неустойчивости// Компьютерные исследования и моделирование.—2019.—Т. 11, № 3.—С. 397–412.
- [12] Юмагулов М. Г., Васенина Н. А. Спектральные свойства операторов системы "реакция-диффузия" и признаки бифуркаций// Вестник Пермского университета. Математика, механика, информатика.—2024.—Т. 65, № 2.—С. 17–25. DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2023.4.1

- [13] Шильников Л. П., Шильников Л. П., Тураев Д. В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 2. —М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2009.. — 548 с.
- [14] Юмагулов М. Г. Операторный метод исследования правильной бифуркации в многопараметрических системах // Доклады Академии наук. — 2008. — Т. 423, № 5. — С. 1–4.
- [15] Вышинский А. А., Ибрагимова Л. С., Муртазина С. А., Юмагулов М. Г. Операторный метод приближенного исследования правильной бифуркации в многопараметрических динамических системах // Уфимский математический журнал.—2010.—Т. 2, № 4.—С. 3–26.

## Multiple Turing and Andronov-Hopf Bifurcations in a Reaction-Diffusion System

Yumagulov Marat Gayazovich, Gabdrakhmanov Robert Ilgizovich

### Abstract

**This paper investigates the problem of local bifurcations in the vicinity of spatially homogeneous equilibrium states of reaction-diffusion systems in a bounded domain with homogeneous Neumann boundary conditions. The main results focus on studying Turing bifurcation and Andronov-Hopf bifurcation under conditions of multiple degeneracy in the linearized system. In the considered case the codimension of the bifurcation does not match the multiplicity of eigenvalues of the corresponding linear operators, which significantly complicates the analysis. The paper provides a detailed examination of cases leading to multiple bifurcations, establishes conditions for multiple degeneracy, and develops approaches for studying stability and bifurcations near equilibrium states under these conditions. The key result consists of the investigation and characterization of the solution manifold structure arising from bifurcations in reaction-diffusion systems. Potential directions for extending these results of the study of multiple bifurcations are also discussed.**

### Keywords

**construction; shell; deformation; relaxation; annular plate; stability; viscoelastic.**

### Affiliations

Yumagulov Marat Gayazovich

**Address:** Ufa University of Science and Technology, Department of Differential Equations, 450076, Ufa-Russia.

**e-mail:** yum\_mg@mail.ru

**ORCID ID:**0000-0002-6482-4258

Gabdrakhmanov Robert Ilgizovich

**Address:** Ufa University of Science and Technology, Department of Differential Equations, 450076, Ufa-Russia.

**e-mail:** gabdrahmanov.robert@gmail.com

**ORCID ID:**0000-0002-3454-241X



# Пространства идемпотентных вероятностных мер над $\Pi$ -полными пространствами и отображениями

Ш. Х. Эштемирова

## Аннотация

В настоящей работе исследуется поведение  $\Pi$ -полноты для тихоновских отображений относительно функтора идемпотентных вероятностных мер с конечным носителем. Доказано, что тихоновское отображение является  $\Pi$ -полным тогда и только тогда, когда индуцированное отображение между соответствующими пространствами идемпотентных вероятностных мер является  $\Pi$ -полным. Как следствие, функтор идемпотентных вероятностных мер с конечным носителем как сохраняет, так и отражает  $\Pi$ -полноту отображений. Это даёт удобный критерий проверки  $\Pi$ -полноты с помощью индуцированных отображений и способствует переносу свойств полноты на пространства, построенные функториальными методами. Полученный результат обеспечивает поднятие функтора на категорию, объектами которой являются  $\Pi$ -полные пространства, а морфизмами —  $\Pi$ -полные отображения.

*Ключевые слова:* идемпотентные вероятностные меры, конечный носитель, пространства идемпотентных вероятностных мер, индуцированные отображения, звёздно-конечное открытое покрытие, конечно-компонентное покрытие, совершенная компактификация, компактификация Стоуна–Чеха.

*Предметная классификация AMS (2020):* 54B20, 54C10.

## Введение

Свойства типа полноты и их поведение при компактификациях играют важную роль в общей топологии и теории непрерывных отображений (см., например, [2, 5]). Одним из таких свойств является  $\Pi$ -полнота, введённая в работах Мусаева и Пасынкова [5], представляющая эффективный аппарат для исследования пространств и непрерывных отображений за пределами компактной категории.

Одной из важных задач теории функторов в топологии является выяснение того, какие топологические свойства сохраняются и отражаются функториальными конструкциями. В настоящей работе мы рассматриваем функтор  $I_f$  идемпотентных вероятностных мер с конечным носителем и изучаем  $\Pi$ -полноту в классе тихоновских отображений. Основным результатом статьи устанавливается точный критерий: для тихоновского отображения  $g: X \rightarrow Y$  индуцированное отображение

$$I_f(g): I_f(X) \rightarrow I_f(Y)$$

является  $\Pi$ -полным тогда и только тогда, когда  $\Pi$ -полным является само отображение  $g$ . Тем самым получаем, что функтор  $I_f$  не только сохраняет, но и отражает  $\Pi$ -полноту отображений, что существенно для построения и сравнения категорий, задаваемых условиями полноты.

Переход за пределы компактной категории обычно осуществляется посредством конструкций расширения нормальных функторов на категорию тихоновских пространств. Для идемпотентных вероятностных мер такой переход был реализован, в частности, с использованием подхода Чигогидзе [7] (см. также [9]), где вводится подфунктор  $I_\beta$ , сохраняющий ключевые компактификационные свойства. В настоящей работе мы используем тесно связанный с  $I_\beta$  подфунктор  $I_f$ , что позволяет применять компактификационные аргументы и критерии типа «выкалывания точек» в некомпактной ситуации.

Функториальные конструкции на пространствах идемпотентных вероятностных мер в последние годы привлекают значительное внимание в связи с их тесными связями с идемпотентным анализом и нелинейными функциональными расширениями топологических пространств. В частности, Радул [10] исследовал функторы идемпотентных мер с точки зрения абсолютных ретрактов и мягких отображений, выявив глубокие взаимосвязи между функториальными свойствами и топологической структурой. Эти результаты подчёркивают важность изучения индуцированных отображений, порождаемых функторами идемпотентных мер, за пределами компактной категории.

С другой стороны, в классической теории вероятностных мер геометрические и топологические свойства подпространств, задаваемых конечным носителем, были исследованы Зайтовым [11]. Подобные исследования показывают, что конструкции с конечным носителем естественным образом отражают тонкие топологические свойства исходных пространств. В настоящей работе эта линия исследований продолжается в идемпотентном контексте и показано, что свойства полноты, в частности  $\Pi$ -полнота, корректно переносятся и полностью характеризуются индуцированными отображениями пространств идемпотентных вероятностных мер с конечным носителем.

Ранее было установлено, что для тихоновского пространства  $X$   $\Pi$ -полнота эквивалентна  $\Pi$ -полноте пространства идемпотентных вероятностных мер  $I_\beta(X)$  (см. [13]). Настоящая статья продолжает эту линию исследований и переносит указанную эквивалентность на уровень отображений: мы показываем, что  $\Pi$ -полнота тихоновского отображения  $g$  полностью характеризуется  $\Pi$ -полнотой индуцированного отображения  $I_f(g)$ .

Идемпотентные вероятностные меры возникают в идемпотентном (max-plus) анализе и связаны с функциональными расширениями топологических пространств (см. [6, 9]). С топологической точки зрения пространства идемпотентных вероятностных мер являются естественными «оболочками» исходных пространств, в связи с чем принципиально важно понимать, как при переходе к таким пространствам и индуцированным отображениям ведут себя свойства типа полноты.

Вне компактной категории проверка  $\Pi$ -полноты часто становится существенно более тонкой. Классическим примером служит прямая Соргенфрея  $\mathbb{S}$  и её квадрат  $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$ , который является  $\Pi$ -полным, хотя и не является паракомпактным. Этот пример иллюстрирует, что в некомпактных ситуациях анализ  $\Pi$ -полноты отображений требует аккуратного использования компактификационных методов. Полученный в статье критерий показывает, что функтор  $I_f$  корректно переносит  $\Pi$ -полноту и в типичных некомпактных ситуациях, сводя её исследование к анализу индуцированных отображений.

## 1. Предварительные сведения

В настоящей работе используются понятия и терминология общей топологии в смысле [2, 3], под *пространством* понимается топологическое  $T_1$ -пространство, под *компактом* — хаусдорфово компактное пространство, а под *отображением* — непрерывное отображение.

Семейство подмножеств множества  $X$  называется *звёздно-счётным* (соответственно, *звёздно-конечным*), если каждый его элемент пересекается не более чем со счётным (соответственно, конечным) числом элементов этого семейства. Семейство  $\omega$  подмножеств множества  $X$  *уточняет* семейство  $\Omega$  подмножеств  $X$ , если для каждого элемента  $A \in \omega$  существует элемент  $B \in \Omega$  такой, что  $A \subset B$ . В этом случае также говорят, что  $\omega$  является

уточнением семейства  $\Omega$ .

Для точки  $x \in X$  и натурального числа  $n$  неравенство  $Kp(x, \omega) \leq n$  означает, что не более  $n$  элементов семейства  $\omega$  содержат точку  $x$  [2, p. 270]. Запись  $Kp\omega \leq n$  означает, что  $Kp(x, \omega) \leq n$  для каждой точки  $x \in X$ .

Конечная последовательность подмножеств  $M_0, \dots, M_s$  множества  $X$  называется [5] *цепью* в  $X$ , соединяющей множества  $M_0$  и  $M_s$ , если  $M_{i-1} \cap M_i \neq \emptyset$  для  $i = 1, \dots, s$ . Семейство подмножеств множества  $X$  называется *связанным*, если для любой пары множеств  $M, M' \subset X$  существует цепь в  $X$ , соединяющая  $M$  и  $M'$ . Максимальные связанные подсемейства семейства  $\omega$  называются *компонентами* семейства  $\omega$ .

Звёздно-конечное открытое покрытие пространства  $X$  называется *конечно-компонентным покрытием*, если число элементов каждой компоненты конечно.

Для семейства  $\omega = \{O_\alpha : \alpha \in A\}$  подмножеств пространства  $X$  полагаем

$$[\omega] = [\omega]_X = \{[O_\alpha]_X : \alpha \in A\}.$$

Пусть  $X$  — пространство,  $W$  — его подпространство и  $x \in X \setminus W$ . Говорят, что открытое в  $W$  покрытие  $\omega$  пространства  $W$  *прокалывает* точку  $x$  в  $X$ , если  $x \notin \bigcup [\omega]_X$  [5].

Для пространства Тихонова  $X$  через  $\beta X$  обозначим его компактификацию Стоуна–Чеха (т. е. максимальное компактное расширение).

**Определение 1.1.** [5] Пространство Тихонова  $X$  называется  $\Pi$ -полным, если для каждой точки  $x \in \beta X \setminus X$  существует конечно-компонентное покрытие  $X$ , прокалывающее точку  $x$  в  $\beta X$  (т. е.  $x \notin \bigcup [\omega]_{\beta X}$ ).

Напомним понятие совершенной компактификации. Для топологического пространства  $X$  и его подмножества  $A$  множество

$$Fr_X A = [A]_X \cap [X \setminus A]_X = [A]_X \setminus Int_X A$$

называется *границей* множества  $A$ . Пусть  $vX$  — компактное расширение пространства Тихонова  $X$ . Если  $H \subset X$  — открытое в  $X$  множество, то через  $O(H)$  (или  $O_{vX}(H)$ ) обозначим максимальное (по включению) открытое множество в  $vX$ , удовлетворяющее равенству  $O_{vX}(H) \cap X = H$ . Легко видеть, что

$$O_{vX}(H) = \bigcup_{\substack{\Gamma \in \tau_{vX}, \\ \Gamma \cap X = H}} \Gamma,$$

где  $\tau_{vX}$  — топология пространства  $vX$ .

Компактификация  $vX$  пространства Тихонова  $X$  называется *совершенной относительно открытого множества  $H$  в  $X$* , если выполняется равенство  $[Fr_X H]_{vX} = Fr_{vX} O_{vX}(H)$ . Если компактификация  $vX$  совершенна для каждого открытого множества в  $X$ , то её называют *совершенной компактификацией* пространства  $X$  ([2], p. 232).

Компактификация  $vX$  пространства  $X$  совершенна тогда и только тогда, когда для любых двух непересекающихся открытых множеств  $U_1$  и  $U_2$  в  $X$  выполняется равенство

$$O(U_1 \cup U_2) = O(U_1) \cup O(U_2)$$

[2]. Компактификация Стоуна–Чеха  $\beta X$  пространства Тихонова  $X$  является совершенной компактификацией пространства  $X$ . Равенство  $O(U_1 \cup U_2) = O(U_1) \cup O(U_2)$  выполняется для любой пары открытых множеств  $U_1$  и  $U_2$  в  $X$  тогда и только тогда, когда  $X$  является нормальным пространством, а компактификация  $vX$  совпадает с компактификацией Стоуна–Чеха  $\beta X$ , т. е.  $vX \cong \beta X$ .

Следующий критерий играет ключевую роль при исследовании класса  $\Pi$ -полных пространств [5, Theorem 1.1, pp. 16–17].

**Теорема 1.1.** [4] Пространство Тихонова  $X$  является  $\Pi$ -полным тогда и только тогда, когда для каждой точки  $x \in \beta X \setminus X$  произвольной совершенной компактификации  $bX$  существует открытое покрытие  $\omega$  пространства  $X$  с  $Kp\omega = 1$ , прокалывающее точку  $x$  в  $bX$  (т. е.  $x \notin \bigcup [\omega]_{bX}$ ).

Так как компактификация Стоуна–Чеха  $\beta X$  пространства Тихонова  $X$  является совершенной компактификацией пространства  $X$ , то из теоремы 1.1 вытекает следующее утверждение.

**Следствие 1.1.** *Пространство Тихонова  $X$  является  $\Pi$ -полным тогда и только тогда, когда для каждой точки  $x \in \beta X \setminus X$  существует покрытие  $\omega$  пространства  $X$  с  $Kp\omega = 1$ , прокалывающее точку  $x$  в  $\beta X$ .*

Заметим, что всякое хаусдорфово компактное пространство является  $\Pi$ -полным. Квадрат прямой Соргенфрея (то есть множество действительных чисел с топологией, порождённой множествами вида  $[a, b)$ , где  $-\infty < a < b < +\infty$ ) является  $\Pi$ -полным, но не является паракомпактным пространством (следовательно, не является хаусдорфовым компактным пространством). Пространство  $T(\omega_1)$  всех ординалов, меньших первой несчётной ординали  $\omega_1$ , является нормальным пространством, но не является  $\Pi$ -полным.

Перечислим некоторые известные свойства  $\Pi$ -полных пространств.

1. Замкнутое подмножество  $\Pi$ -полного пространства является  $\Pi$ -полным ([5], р. 19).
2. Если  $f: X \rightarrow Y$  — совершенное отображение и  $Y$  является  $\Pi$ -полным пространством, то  $X$  также является  $\Pi$ -полным ([5], р. 26).

Автор работы [6] рассмотрел функтор  $I: \mathfrak{C}omp \rightarrow \mathfrak{C}omp$  и показал, что он является нормальным. Затем в работе [9], используя конструкцию, предложенную А. Ч. Чигогидзе [7], было получено расширение этого функтора на категорию Тихонова:  $I_\beta: \mathfrak{Tych} \rightarrow \mathfrak{Tych}$ . Здесь символ  $\mathfrak{C}omp$  обозначает категорию компактных хаусдорфовых пространств и их непрерывных отображений, а  $\mathfrak{Tych}$  — категорию тихоновских пространств и их непрерывных отображений. Функториальный подход к расширениям тихоновских пространств был систематически разработан В. В. Федорчуком [8].

Для хаусдорфова компактного пространства  $X$  идемпотентная вероятностная мера на  $X$  определяется [6] как функционал  $\mu: C(X) \rightarrow \mathbb{R}$ , удовлетворяющий следующим условиям:

- 1)  $\mu(c_X) = c$  для каждой постоянной функции  $c_X: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $c \in \mathbb{R}$ . Здесь  $c_X(x) = c$ ;
- 2)  $\mu(c \odot \varphi) = c \odot \mu(\varphi)$ ,  $c \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi \in C(X)$ . Здесь  $c \odot \varphi = c + \varphi$ ;
- 3)  $\mu(\varphi \oplus \psi) = \mu(\varphi) \oplus \mu(\psi)$ ,  $\varphi, \psi \in C(X)$ . Здесь  $\varphi \oplus \psi = \max\{\varphi, \psi\}$ .

Множество всех идемпотентных вероятностных мер на  $X$  обозначается через  $I(X)$ . Оно снабжается топологией  $\tau_p$  поточечной сходимости. Для  $\mu \in I(X)$  множества

$$\langle \mu; \varphi_1, \dots, \varphi_n; \theta \rangle = \{ \nu \in I(X) : |\nu(\varphi_i) - \mu(\varphi_i)| < \theta, i = 1, \dots, n \}$$

образуют базу топологии поточечной сходимости в  $I(X)$  при точке  $\mu$ . Здесь  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in C(X)$ ,  $\theta > 0$ .

Отметим, что функция  $f: X \rightarrow [-\infty, +\infty)$  называется *верхне полунепрерывной*, если для каждой точки  $x \in X$  и для каждого действительного числа  $r$ , удовлетворяющего неравенству  $f(x) < r$ , существует открытое окружение  $U \subset X$  точки  $x$  такая, что  $f(x') < r$  для всех  $x' \in U$ .

Рассмотрим хаусдорфово компактное пространство  $X$  и положим

$$USC_0(X) = \left\{ f: X \rightarrow [-\infty, 0] \mid f \text{ — верхне полунепрерывная функция,} \right. \\ \left. \text{для которой существует точка } x \in X \text{ такая, что } f(x) = 0 \right\}.$$

Для каждой идемпотентной вероятностной меры  $\nu \in I(X)$  существует [1] единственная верхне полунепрерывная функция  $\lambda \in USC_0(X)$  такая, что  $\nu = \bigoplus_{x \in X} \lambda(x) \odot \delta_x$ .

Следовательно, [12]

$$I(X) = \left\{ \bigoplus_{x \in X} \lambda(x) \odot \delta_x : \lambda \in USC_0(X) \right\}.$$

Множество

$$\text{supp } \mu = \{x \in X : \lambda(x) > -\infty\}$$

называется [12] носителем идемпотентной вероятностной меры  $\mu = \bigoplus_{x \in X} \lambda(x) \odot \delta_x$ .

## 2. О совершенной компактификации пространства идемпотентных вероятностных мер

Для пространства Тихонова  $X$  положим [9]

$$I_\beta(X) = \{\mu \in I(X) : \text{supp } \mu \subset X\}.$$

Очевидно, что  $I_\beta(X) \subset I(X)$ . Рассматриваем множество  $I_\beta(X)$  как подпространство пространства  $I(X)$ . Для пространства Тихонова  $X$  пространство  $I_\beta(X)$  также является пространством Тихонова относительно индуцированной топологии.

Для непрерывного отображения  $f : X \rightarrow Y$  пространств Тихонова положим

$$I_\beta(f) = I(f)|_{I_\beta(X)},$$

где  $\beta f : \beta X \rightarrow \beta Y$  — компактификация Стоуна–Чеха отображения  $f$  (она единственна).

Для хаусдорфова компактного пространства  $X$  положим

$$I_f(X) = \left\{ \mu = \bigoplus_{i=1}^n \chi_\mu(x_i) \odot \delta_{x_i} \in I_\omega(X) : \right.$$

$$\left. \text{существует точка } x_{i_0} \in \text{supp } \mu = \{x_1, \dots, x_n\} \right.$$

$$\left. \text{такая, что } \chi_\mu(x_{i_0}) = 0 \text{ и } \chi_\mu(x_i) \leq -\frac{n}{n+1} \text{ при } i \neq i_0 \right\}.$$

Для пространства Тихонова  $X$  полагаем

$$I_f(X) = I_\beta(X) \cap I_f(\beta X).$$

Для точки  $x \in X$  определим множество

$$I_f^x(X) = \left\{ \mu = \bigoplus_{i=1}^n \chi_\mu(x_i) \odot \delta_{x_i} \in I_f(X) : x \in \text{supp } \mu \text{ и } \chi_\mu(x) = 0 \right\}.$$

Легко видеть, что для хаусдорфова компактного пространства  $X$  выполняются следующие свойства:

а)  $I_f^x(X) \cap I_f^y(X) = \emptyset$  тогда и только тогда, когда  $x \neq y$  для каждой пары точек  $x, y \in X$ ;

б)  $I_f(X) = \bigcup_{x \in X} I_f^x(X)$ .

Рассмотрим подмножество  $M \subset X$  и положим

$$\langle M \rangle = \{ \mu \in I_f(X) : \text{существует точка } x \in M \text{ такая, что } \mu \in I_f^x(X) \}.$$

**Предложение 2.1.** Пусть  $M$  — непустое подмножество хаусдорфова компактного пространства  $X$ . Тогда  $I_f^x(X) \subset \langle M \rangle$  тогда и только тогда, когда  $x \in M$ .

**Предложение 2.2.** Для любых непустых подмножеств  $M$  и  $N$  хаусдорфова компактного пространства  $X$  выполняется  $\langle M \rangle \cap \langle N \rangle \neq \emptyset$  тогда и только тогда, когда  $M \cap N \neq \emptyset$ .

**Теорема 2.1.** Пусть  $M$  — непустое подмножество хаусдорфова компактного пространства  $X$ . Тогда  $\langle M \rangle$  открыто в  $I_f(X)$  тогда и только тогда, когда  $M$  открыто в  $X$ . Аналогично,  $\langle M \rangle$  замкнуто в  $I_f(X)$  тогда и только тогда, когда  $M$  замкнуто в  $X$ .

Легко видеть, что для пространства Тихонова  $X$  множество  $I_f(X)$  всюду плотно в  $I_f(\beta X)$ , то есть  $I_f(\beta X)$  является компактификацией пространства  $I_f(X)$ . Сделаем более точное утверждение. Следующая теорема показывает, что функтор  $I_\beta: \mathfrak{Tych} \rightarrow \mathfrak{Tych}$  преобразует попарно непересекающиеся открытые покрытия в попарно непересекающиеся открытые покрытия.

**Теорема 2.2.** Для пространства Тихонова  $X$  пространство  $I_f(\beta X)$  является совершенной компактификацией пространства  $I_f(X)$ .

**Лемма 2.1.** Пусть  $v$  — открытое покрытие пространства Тихонова  $X$  с  $K_p v = 1$ . Тогда семейство

$$I_\beta(v) = \{\langle U \rangle : U \in v\}$$

является открытым покрытием пространства  $I_\beta(X)$  с  $K_p(I_\beta(v)) = 1$ .

Таким образом, получаем следующий замечательный результат.

**Теорема 2.3.** [13] Для пространства Тихонова  $X$  его гиперпространство  $I_\beta(X)$  является  $\Pi$ -полным тогда и только тогда, когда  $X$  является  $\Pi$ -полным.

### 3. $\Pi$ -полнота отображения $I(f)$

Для отображения  $f: X \rightarrow Y$  и подмножества  $H \subset Y$  прообраз  $f^{-1}H$  называется *трубкой* (над  $H$ ).

Напомним, что непрерывное отображение  $f: X \rightarrow Y$  называется [2]  $T_0$ -отображением, если для каждой пары различных точек  $x, x' \in X$ , таких что  $f(x) = f(x')$ , по крайней мере одна из этих точек имеет в  $X$  открытую окрестность, не содержащую другую точку.

Непрерывное отображение  $f: X \rightarrow Y$  называется *вполне регулярным*, если для каждой точки  $x \in X$  и любого замкнутого множества  $F \subset X$ , не содержащего точку  $x$ , существует открытая окрестность  $O$  точки  $f(x)$  такая, что в трубе  $f^{-1}O$  множества  $\{x\}$  и  $F$  функционально разделимы. Вполне регулярное  $T_0$ -отображение называется *тихоновским отображением*.

Очевидно, каждое непрерывное отображение  $f: X \rightarrow Y$  тихоновского пространства  $X$  в топологическое пространство  $Y$  является тихоновским отображением. В этом случае для любого тихоновского пространства  $X$ , поскольку пространство  $I(X)$  с топологией поточечной сходимости является тихоновским пространством, отображение

$$I_\beta(f): I_\beta(X) \rightarrow I_\beta(Y)$$

также является тихоновским отображением.

Непрерывное замкнутое отображение  $f: X \rightarrow Y$  называется *компактным*, если прообраз  $f^{-1}(y)$  каждой точки  $y \in Y$  является компактным. Непрерывное отображение  $f: X \rightarrow Y$  является компактным тогда и только тогда, когда для каждой точки  $y \in Y$  и любого покрытия слоя  $f^{-1}(y)$ , состоящего из открытых в  $X$  множеств, существует открытая окрестность  $O$  точки  $y$  в  $Y$  такая, что трубка  $f^{-1}O$  допускает конечное подпокрытие исходного покрытия.

Компактное отображение  $b_f: b_f X \rightarrow Y$  называется *компактификацией* непрерывного отображения  $f: X \rightarrow Y$ , если  $X$  всюду плотно в  $b_f X$  и  $b_f|_X = f$ . На множестве всех компактификаций заданного отображения  $f$  можно ввести частичный порядок: для компактификаций  $b_1 f: b_1 X \rightarrow Y$  и  $b_2 f: b_2 X \rightarrow Y$  отображения  $f$  положим  $b_1 f \leq b_2 f$ , если существует естественное отображение  $b_2 X$  на  $b_1 X$ . Б. А. Пасынков показал, что для

каждого отображения Тихонова  $f: X \rightarrow Y$  существует его максимальная компактификация  $g: Z \rightarrow Y$ , которую он обозначил через  $\beta f$ , а пространство  $Z$ , в котором определена эта максимальная компактификация, обозначил через  $\beta_f(X)$ .

*Замечание 3.1.* Заметим, что отображения  $b_1f, b_2f, \beta f$  являются компактификациями отображения  $f$ . Пространства  $b_1X, b_2X, \beta_fX$  являются некоторыми расширениями пространства  $X$ , но они не обязаны быть компактификациями самого пространства  $X$ .

Отображение Тихонова  $f: X \rightarrow Y$  называется  $\Pi$ -полным, если для каждой точки  $x \in \beta_fX \setminus X$  существует попарно непересекающееся открыто-замкнутое покрытие  $X$ , прокалывающее точку  $x$  в  $\beta_fX$  [5, pp. 120–121].

Рассмотрим следующее понятие.

**Определение 3.1** ([14]). Компактификация  $b_f: b_fX \rightarrow Y$  отображения Тихонова  $f: X \rightarrow Y$  называется совершенной компактификацией  $f$ , если для каждой точки  $y \in Y$  и для любых двух непересекающихся открытых множеств  $U_1$  и  $U_2$  в  $X$  существует открытая окрестность  $O \subset Y$  точки  $y$  такая, что выполняется равенство

$$O_{\beta_fX}(U_1 \cup U_2) \cap (\beta f)^{-1}O = (O_{\beta_fX}(U_1) \cup O_{\beta_fX}(U_2)) \cap (\beta f)^{-1}O.$$

Пусть  $f: X \rightarrow Y$  — непрерывное отображение тихоновского пространства  $X$  в пространство  $Y$ . Известно, что существует компактификация  $\nu X$  пространства  $X$  такая, что отображение  $f$  допускает непрерывное продолжение  $\nu f: \nu X \rightarrow Y$ . Ясно, что отображение  $\nu f$  является совершенной компактификацией отображения  $f$ .

Следующий результат является аналогом теоремы 1.1 для случая отображений.

**Теорема 3.1.** Пусть  $b_f: b_fX \rightarrow Y$  — совершенная компактификация отображения Тихонова  $f: X \rightarrow Y$ . Отображение  $f$  является  $\Pi$ -полным тогда и только тогда, когда для каждой точки  $x \in b_fX \setminus X$  существует попарно непересекающееся открыто-замкнутое покрытие  $X$ , прокалывающее точку  $x$  в  $b_fX$ .

*Доказательство.* Пусть  $\beta f: \beta_fX \rightarrow Y$  — максимальная компактификация отображения Тихонова  $f: X \rightarrow Y$  (в смысле Пасынкova). Для любой компактификации  $b_f: b_fX \rightarrow Y$  отображения  $f$  существует единственная непрерывная сюръекция

$$p: \beta_fX \longrightarrow b_fX$$

такая, что  $p|_X = \text{id}_X$  и  $b_f \circ p = \beta f$ .

Для любого подмножества  $A \subset X$  имеет место равенство

$$\overline{A}^{b_fX} = p\left(\overline{A}^{\beta_fX}\right). \quad (3.1)$$

Действительно, отображение  $p$  является непрерывной сюръекцией между компактными хаусдорфовыми пространствами, а потому является замкнутым. Следовательно, множество  $p\left(\overline{A}^{\beta_fX}\right)$  замкнуто в  $b_fX$  и содержит  $A$  (так как  $p|_X = \text{id}_X$ ), откуда следует, что

$$\overline{A}^{b_fX} \subset p\left(\overline{A}^{\beta_fX}\right).$$

С другой стороны, пусть  $x \in \overline{A}^{b_fX}$ . Тогда существует сеть  $(a_i) \subset A$ , сходящаяся к  $x$  в пространстве  $b_fX$ . Рассматривая ту же сеть в  $\beta_fX$  (где  $X$  плотно), из компактности  $\beta_fX$  следует существование сходящейся подсети  $(a_{i_j}) \rightarrow \tilde{x} \in \beta_fX$ . По непрерывности отображения  $p$  имеем

$$p(\tilde{x}) = \lim p(a_{i_j}) = \lim a_{i_j} = x,$$

причём  $\tilde{x} \in \overline{A}^{\beta_fX}$ . Следовательно,  $x \in p\left(\overline{A}^{\beta_fX}\right)$ , что и доказывает равенство (3.1).

Пусть отображение  $f$  является  $\Pi$ -полным и  $x \in b_fX \setminus X$ . Выберем точку  $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ . Тогда  $\tilde{x} \in \beta_fX \setminus X$ . По  $\Pi$ -полноте отображения  $f$  существует дизъюнктное покрытие, состоящее из открыто-замкнутых множеств  $\omega$  пространства  $X$  такое, что

$$\tilde{x} \notin \bigcup [\omega]_{\beta_fX}.$$

Предположим противное, а именно, что  $x \in \bigcup[\omega]_{b_f X}$ . Тогда  $x \in \overline{U}^{b_f X}$  для некоторого  $U \in \omega$ . В силу равенства (3.1) имеем

$$\overline{U}^{b_f X} = p(\overline{U}^{\beta_f X}),$$

откуда следует существование точки  $\tilde{x}' \in \overline{U}^{\beta_f X}$  такой, что  $p(\tilde{x}') = x$ . В частности,  $\tilde{x}' \in p^{-1}(x)$ , а значит,  $\tilde{x}' \in \bigcup[\omega]_{\beta_f X}$ , что противоречит условию  $\tilde{x} \notin \bigcup[\omega]_{\beta_f X}$ , поскольку прообраз  $p^{-1}(x)$  непуст, и приведённое рассуждение показывает, что каждая точка из  $p^{-1}(x)$  должна избегать  $\bigcup[\omega]_{\beta_f X}$  в случае, если  $x$  избегает  $\bigcup[\omega]_{b_f X}$ . Следовательно,

$$x \notin \bigcup[\omega]_{b_f X},$$

то есть покрытие  $\omega$  прокалывает точку  $x$  в пространстве  $b_f X$ .

Предположим теперь, что для каждой точки  $x \in b_f X \setminus X$  существует дизъюнктное клопен-покрытие пространства  $X$ , прокалывающее точку  $x$  в  $b_f X$ . Применим это предположение к частному случаю совершенной компактификации  $b_f X = \beta_f X$ . Тогда для любой точки  $x \in \beta_f X \setminus X$  существует дизъюнктное клопен-покрытие пространства  $X$ , прокалывающее точку  $x$  в  $\beta_f X$ , что в точности означает, что отображение  $f$  является  $\Pi$ -полным.  $\square$

Следующий результат является вариантом теоремы 2.1 для случая отображений.

**Теорема 3.2.** Пусть  $g: X \rightarrow Y$  — отображение Тихонова. Тогда отображение

$$I_f(\beta g): I_f(\beta_g X) \rightarrow I_f(Y)$$

является совершенной компактификацией отображения

$$I_f(g): I_f(X) \rightarrow I_f(Y).$$

*Доказательство.* Пусть  $\beta g: \beta_g X \rightarrow Y$  — максимальная компактификация отображения Тихонова  $g: X \rightarrow Y$ . Тогда пространство  $\beta_g X$  компактно и хаусдорфово, следовательно,  $I_f(\beta_g X)$  также является компактным хаусдорфовым пространством. Поскольку  $X$  плотно в  $\beta_g X$  и

$$I_f(X) = I_\beta(X) \cap I_f(\beta X),$$

отсюда следует, что  $I_f(X)$  плотно в  $I_f(\beta_g X)$ . По функториальности имеем

$$I_f(\beta g)|_{I_f(X)} = I_f(g),$$

следовательно, отображение  $I_f(\beta g): I_f(\beta_g X) \rightarrow I_f(Y)$  является компактификацией отображения  $I_f(g)$ .

Покажем, что эта компактификация является совершенной. Пусть  $\nu \in I_f(Y)$  и пусть  $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \subset I_f(X)$  — непересекающиеся открытые множества. Выберем точки  $\mu_i \in \mathcal{U}_i$  ( $i = 1, 2$ ). Тогда  $\mu_i \in I_f^{x_i}(X)$  для некоторых  $x_i \in X$  таких, что  $\chi_{\mu_i}(x_i) = 0$ . Так как  $\mathcal{U}_i$  открыто, существует открытая окрестность  $U_i \subset X$  точки  $x_i$  такая, что

$$\mu_i \in \langle U_i \rangle \subset \mathcal{U}_i.$$

По Предложению 2.2 из непересекаемости  $\mathcal{U}_1$  и  $\mathcal{U}_2$  следует, что  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ .

Пусть теперь  $\nu \in I_f^{y_0}(Y)$ , где  $y_0 \in \text{supp } \nu$  и  $\chi_\nu(y_0) = 0$ . Так как  $\beta g$  является совершенной компактификацией отображения  $g$ , существует открытая окрестность  $V \subset Y$  точки  $y_0$  такая, что

$$O_{\beta_g X}(U_1 \cup U_2) \cap (\beta g)^{-1}(V) = (O_{\beta_g X}(U_1) \cup O_{\beta_g X}(U_2)) \cap (\beta g)^{-1}(V). \quad (3.2)$$

Переведём тождество (3.2) на уровень функтора  $I_f$ .

**Утверждение 3.1.** Для любого открытого множества  $W \subset Y$  имеет место равенство

$$(I_f(\beta g))^{-1}\langle W \rangle = \langle (\beta g)^{-1}(W) \rangle.$$

Действительно,  $I_f(\beta g)(\mu) \in \langle W \rangle$  тогда и только тогда, когда существует точка  $x \in \text{supp } \mu$  такая, что  $\chi_\mu(x) = 0$  и  $\beta g(x) \in W$ , что эквивалентно условию  $\mu \in \langle (\beta g)^{-1}(W) \rangle$ .

**Утверждение 3.2.** Для любого открытого множества  $U \subset X$  максимальным открытым подмножеством пространства  $I_f(\beta_g X)$ , пересечение которого с  $I_f(X)$  совпадает с  $\langle U \rangle$ , является множество  $\langle O_{\beta_g X}(U) \rangle$ .

В самом деле, по Теореме 2.1 множество  $\langle O_{\beta_g X}(U) \rangle$  открыто в  $I_f(\beta_g X)$  и

$$\langle O_{\beta_g X}(U) \rangle \cap I_f(X) = \langle O_{\beta_g X}(U) \cap X \rangle = \langle U \rangle.$$

Максимальность следует из максимальности  $O_{\beta_g X}(U)$  и монотонности отображения  $M \mapsto \langle M \rangle$ .

Используя Утверждение 3.2, из тождества совершенности (3.2) получаем

$$O_{I_f(\beta_g X)}(\langle U_1 \cup U_2 \rangle) \cap \langle (\beta g)^{-1}(V) \rangle = (O_{I_f(\beta_g X)}(\langle U_1 \rangle) \cup O_{I_f(\beta_g X)}(\langle U_2 \rangle)) \cap \langle (\beta g)^{-1}(V) \rangle.$$

Наконец, по Утверждению 1 имеем

$$\langle (\beta g)^{-1}(V) \rangle = (I_f(\beta g))^{-1}\langle V \rangle,$$

а множество  $\langle V \rangle$  является открытой окрестностью точки  $\nu$  в пространстве  $I_f(Y)$ . Следовательно, отображение  $I_f(\beta g)$  является совершенной компактификацией отображения  $I_f(g)$ . □

Следующее утверждение является основным результатом данного раздела.

**Теорема 3.3.** *Отображение Тихонова  $I_f(g): I_f(X) \rightarrow I_f(Y)$  является  $\Pi$ -полным тогда и только тогда, когда отображение  $g: X \rightarrow Y$  является  $\Pi$ -полным.*

*Доказательство.* Пусть  $I_f(g): I_f(X) \rightarrow I_f(Y)$  является  $\Pi$ -полным отображением. Из этого следует, что  $g: X \rightarrow Y$  является  $\Pi$ -полным отображением, так как  $X = \{\{x\}: x \in X\} \subset I_f(X)$  является замкнутым подмножеством.

Теперь пусть  $g: X \rightarrow Y$  —  $\Pi$ -полное отображение. Рассмотрим произвольную точку  $\mu \in I_f(\beta_g X) \setminus I_f(X)$  и, используя теоремы 3.1 и 3.2, покажем, что существует попарно непересекающееся открыто-замкнутое покрытие пространства  $I_f(X)$ , прокалывающее точку  $\mu$  в  $I_f(\beta_g X)$ .

По определению, для каждой точки  $x \in \text{supp } \mu \setminus X \subset \beta_f X \setminus X$  существует попарно непересекающееся открыто-замкнутое покрытие  $\omega_x$  пространства  $X$ , прокалывающее точку  $x$  в  $\beta_f X$ . Зафиксируем точку  $x_0 \in \text{supp } \mu \setminus X$ . Тогда  $x_0 \notin \bigcup [\omega_{x_0}]_{\beta_f X}$  в  $\beta_f X$ . Следовательно,

$$\text{supp } \mu \not\subset [U]_{\beta_f X}, \quad \text{для любого } U \in \omega_{x_0}.$$

Отсюда получаем

$$\mu \notin [\langle U \rangle]_{I_f(\beta_g X)}, \quad \text{для каждого } U \in \omega_{x_0}.$$

В силу (2.1), применяя лемму 2.1 ещё раз, заключаем, что семейство  $I_f(\omega_{x_0})$  является попарно непересекающимся открыто-замкнутым покрытием пространства  $I_f(X)$ , прокалывающим рассматриваемую точку  $\mu$  в  $I_f(\beta_g X)$ . □

**Следствие 3.1.** *Функтор  $I$  поднимается на категорию  $\Pi$ -полных пространств и их непрерывных отображений.*

## 4. Заключение

В настоящей работе исследованы вопросы сохранения и отражения свойств  $\Pi$ -полноты в рамках функториальных конструкций, связанных с пространствами идемпотентных вероятностных мер с конечным носителем. Основное внимание было уделено изучению поведения  $\Pi$ -полноты при переходе от тихоновских отображений к индуцированным отображениям в пространствах идемпотентных вероятностных мер.

Главным результатом статьи является установление эквивалентности между  $\Pi$ -полнотой тихоновского отображения  $g: X \rightarrow Y$  и  $\Pi$ -полнотой индуцированного отображения  $I_f(g): I_f(X) \rightarrow I_f(Y)$ . Полученный критерий носит двусторонний характер и показывает, что функтор  $I_f$  не только сохраняет, но и отражает  $\Pi$ -полноту отображений. Тем самым существенно расширяются ранее известные результаты, касающиеся  $\Pi$ -полноты самих пространств и действия подфунктора  $I_\beta$ .

В заключение отметим, что доказанные утверждения открывают возможности для дальнейшего изучения функториальных свойств пространств идемпотентных вероятностных мер, а также для исследования других типов полноты и компактных свойств в аналогичных функториальных конструкциях.

## Благодарность

Автор выражает искреннюю благодарность А. А. Зайтову за постоянную поддержку, ценные обсуждения, полезные замечания и научное руководство, оказанные в процессе подготовки настоящей работы.

## Список литературы

- [1] Akian, M.: *Densities of idempotent measures and large deviations*. Transactions of the American Mathematical Society. **351**(11), 4515–4543 (1999).
- [2] Arkhangel'skii, A.V., Ponomarev, V.I.: *Fundamentals of General Topology: Problems and Exercises*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht (1983).
- [3] Fedorchuk, V.V., Filippov, V.V.: *General Topology. Basic Structures*. Fizmatlit, Moscow (2006).
- [4] Buhagiar, D., Miwa, T.: *On superparacompact and Lindelöf GO spaces*. Houston Journal of Mathematics. **24**(3), 443–457 (1998).
- [5] Musayev, D.K., Pasynkov, B.A.: *On compactness and completeness properties of topological spaces and continuous maps*. Fan, Tashkent (1994). (in Russian)
- [6] Zarichnyi, M.: *Spaces and maps of idempotent measures*. Izvestiya: Mathematics. **74**(3), 481–499 (2010).
- [7] Chigogidze, A.Ch.: *Extension of normal functors*. Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya Matematika i Mekhanika. (6), 23–26 (1984).
- [8] Fedorchuk, V.V.: *Functors in topology*. Russian Mathematical Surveys. **46**(3), 1–40 (1991). <https://doi.org/10.1070/RM1991v046n03ABEH002737>
- [9] Ishmetov, A.Ya.: *On the functor of idempotent probability measures with compact support*. Uzbek Mathematical Journal. (1), 72–80 (2010).
- [10] Radul, T.: *Idempotent Measures: Absolute Retracts and Soft Maps*. Preprint arXiv:1810.09140v1 (2018).
- [11] Zaitov, A.A.: *Geometrical and topological properties of a subspace  $P_f(X)$  of probability measures*. Russian Mathematics (Izvestiya VUZ). **63**(10), 24–32 (2019).
- [12] Zaitov, A.A.: *On a metric on the space of idempotent probability measures*. Applied General Topology. **21**(1), 35–51 (2020).
- [13] Ayupov, Sh.A., Zaitov, A.A., Eshtemirova, Sh.H.:  *$\Pi$ -completeness of the space of idempotent probability measures*. Uzbek Mathematical Journal. **69**(1), 37–48 (2025).
- [14] Zaitov, A.A., Jumaev, D.I.: *Hyperspaces of superparacompact spaces and continuous maps*. Universal Journal of Mathematics and Applications. **2**(2), 8 pp. (2019). <https://arxiv.org/abs/1811.05347>.

## Idempotent probability measures spaces on $\Pi$ -complete spaces and maps

Sh.Kh. Eshtemirova

### Abstract

In this paper we study the behavior of  $\Pi$ -completeness for Tychonoff maps under the functor of idempotent probability measures with finite support. We prove that a Tychonoff map is  $\Pi$ -complete if and only if the induced map between the corresponding spaces of idempotent probability measures is  $\Pi$ -complete. As a consequence, the functor of idempotent probability measures with finite support both preserves and reflects  $\Pi$ -completeness for maps. This provides a convenient criterion for verifying  $\Pi$ -completeness via induced mappings and supports the transfer of completeness-type properties to functorially constructed spaces. The obtained result yields a lifting of the functor to the category whose objects are  $\Pi$ -complete spaces and whose morphisms are  $\Pi$ -complete maps.

### Keywords

Idempotent probability measures, finite support, spaces of idempotent probability measures, induced mappings, star-finite open cover, finite-component cover, perfect compactification, Stone–Čech compactification.

### Affiliations

Eshtemirova Shaxnoza Haqqul qizi

**Address:** V. I. Romanovsky Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of Uzbekistan, 9, University Str., 100174, Tashkent, Uzbekistan

**e-mail:** shaxnoza.eshtemirova@mail.ru

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0009-0005-8316-5082>

# О гладкости периодической краевой задачи для трёхмерного уравнения Чаплыгина в неограниченном параллелепипеде

Джамалов Сирожиддин З., \* Туракулов Хамидулло Ш. и Сипатдинова Бийбиназ К.

## Аннотация

В статье исследуются единственность, существование и гладкость обобщенного решения периодической краевой задачи для трехмерного уравнения Чаплыгина в неограниченном параллелепипеде. Для доказательства теоремы единственности, существования и гладкости решения задачи используются преобразование Фурье, методы " $\varepsilon$ -регуляризации" и априорных оценок.

*Ключевые слова:* трёхмерное уравнение Чаплыгина; периодическая краевая задача; преобразование Фурье; методы " $\varepsilon$ -регуляризации" и априорных оценок.

*Предметная классификация AMS (2020):* Основная: 35M10;

## 1. Введение.

Как известно, в работе А.В.Бицадзе показано, что задача Дирихле для уравнения смешанного типа некорректна [1], [2].

Естественно возникает вопрос: нельзя ли заменить условия задачи Дирихле другими условиями, охватывающими всю границу, которые обеспечивают корректность задачи? Впервые такие краевые задачи (нелокальные краевые задачи) для уравнения смешанного типа были предложены и изучены в работах Ф.И.Франкля при решении газодинамической задачи об обтекании профилей потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения [3],[4],[5]. Близкие по постановке задачи для уравнения смешанного типа первого рода в ограниченных областях изучены в работах [6]-[12].

В данной работе используя результаты работ [11],[12], изучаются однозначная разрешимость и гладкость обобщенного решения одной периодической краевой задачи для трехмерного уравнения Чаплыгина в неограниченном параллелепипеде.

В области

$$G = (-1, 1) \times (0, T) \times R = Q \times R = \{ (x, t, z) \mid x \in (-1, 1), 0 < t < T < +\infty, z \in R \}$$

рассмотрим уравнение Чаплыгина:

$$Lu = K(x)u_{tt} - \Delta u + a(x)u_t + c(x, t)u = f(x, t, z). \quad (1.1)$$

Здесь  $xK(x) \geq 0$ , где  $x \in (-1, 1)$ ,  $\Delta u = u_{xx} + u_{zz}$  - оператор Лапласа.

Уравнения (1.1), в зависимости от знака  $x$  меняет свой тип то есть, при  $x > 0$  будет гиперболическим, при  $x < 0$  будет эллиптическим, при  $x = 0$  будет параболическим уравнением. Поэтому уравнения (1.1) будет уравнением смешанного типа первого рода второго порядка (часто называется уравнением Чаплыгина, в частности, когда  $K(x) = x$  будет уравнением Трикоми) [1]. Пусть все коэффициенты уравнения (1.1) достаточно гладкие функции в области  $\bar{G}$ .

В дальнейшем для решения поставленных задач нам необходимо ввести определения нескольких функциональных пространств с нормами и обозначения.

Через  $L_2(Q)$  –обозначим пространство квадратично суммируемых функций со скалярным произведением и нормой:

$$(u, v)_0 = \int_Q uv dx dt,$$

$$\|u\|_0^2 = \|u\|_{L_2(Q)}^2 = \int_Q u^2 dx dt.$$

Через  $W_2^l(Q)$ , ( $l = 0, 1, 2, \dots$ ) обозначим пространство Соболева с нормой:

$$\|\vartheta\|_l^2 = \|\vartheta\|_{W_2^l(Q)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq l} \int_Q |D^\alpha \vartheta|^2 dx dt,$$

$\alpha$  –это мультииндекс,  $D^\alpha$  – обобщённая производная по переменным  $x$  и  $t$ ,  $W_2^0(Q) = L_2(Q)$ . Через  $C^l(\bar{Q})$ , ( $l = 0, 1, 2, \dots$ ) обозначим пространство непрерывных в  $\bar{Q}$  функций, имеющих непрерывные в  $\bar{Q}$  производные до порядка  $l$  включительно,

$$C^0(\bar{Q}) = C(\bar{Q}), \quad \|u\|_{C(\bar{Q})} = \max_{(x,t) \in \bar{Q}} |u(x, t)|.$$

В общем случае

$$\|u\|_{C^l(\bar{Q})} = \|u\|_{C(\bar{Q})} + \sum_{|k| \leq l} \|D^{(k)}u\|_{C(\bar{Q})}.$$

Обозначим через

$$\hat{u} = \hat{u}(x, t, \lambda) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t, z) e^{-i\lambda z} dz$$

преобразование Фурье по переменной  $z$  функции  $u(x, t, z)$ , а через

$$u(x, t, z) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(x, t, \lambda) e^{i\lambda z} d\lambda$$

обратное преобразование Фурье. Теперь с помощью преобразования Фурье определим анизотропная пространства Соболева  $W_2^{l,s}(G)$  с нормой

$$\|u\|_{W_2^{l,s}(G)}^2 = (2\pi)^{-1/2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |\lambda|^2)^s \cdot \|\hat{u}(x, t, \lambda)\|_{W_2^l(Q)}^2 d\lambda, \quad (A)$$

здесь  $s, l$ - любые конечные положительные целые числа, где  $W_2^l(Q)$  (при  $l = 0, W_2^0(Q) = L_2(Q)$ ) обозначено пространства Соболева [15],[16], [20].

В дальнейшем для исследования линейных обратных задач нам понадобятся следующие оценки, которые следуют из теорем вложений Соболева [15],[20].

$$\|\vartheta\|_{C^\alpha(Q)}^2 \leq c_{\alpha+2} \|\vartheta\|_{W_2^{\alpha+2}(Q)}^2.$$

Здесь через  $c_{\alpha+2}(\alpha = 0, 1)$  – обозначим положительные различные числа. Через  $c_1$  – обозначим

$$c_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda^4 d\lambda}{(1 + |\lambda|^2)^3} = \frac{3\pi}{4}.$$

Очевидно, что пространство  $W_2^{l,s}(G)$  с нормой (А) является гильбертовым пространством [15],[23].

При получении различных априорных оценок мы часто будем использовать неравенство Коши с  $\sigma$  [15]:

$$\forall u, \vartheta > 0, \forall \sigma > 0, u \cdot \vartheta \leq \sigma \frac{u^2}{2} + \frac{\vartheta^2}{2\sigma}$$

### 1.1. Постановки задачи.

**Периодическая краевая задача:** Найти обобщенное решение  $u(x, t, z)$  уравнения (1.1) из пространства  $W_2^{2,3}(G)$ , удовлетворяющее следующим краевым условиям

$$D_t^p u|_{t=0} = D_t^p u|_{t=T}, \tag{1.2}$$

$$D_x^p u|_{x=-1} = D_x^p u|_{x=1}, \tag{1.3}$$

при  $p = 0, 1$ , где  $D_t^p u = \frac{\partial^p u}{\partial t^p}$ ,  $D_t^0 u = u$ .

$$\text{Далее будем считать, что } u(x, t, z) \rightarrow 0 \text{ и } u_z(x, t, z) \rightarrow 0 \text{ при } |z| \rightarrow \infty. \tag{1.4}$$

**Определение 1.1.** Обобщенным решением задачи (1.1)-(1.4) будем называть функцию  $u(x, t, z) \in W_2^{2,3}(G)$ , удовлетворяющую уравнению (1.1) почти всюду в области  $G$ , с условиями (1.2)-(1.4).

### 1.2. Основной результат.

**Теорема 1.1.** Пусть выполнены высшее перечисленные условия для коэффициентов уравнения (1.1), кроме того пусть выполнены  $2a(x) - \mu K(x) > \delta_1 > 0$ ,  $\mu c(x, t) - c_t(x, t) > \delta_2 > 0$ , для всех  $(x, t) \in \overline{Q}$ , где  $\mu = \text{const} > 0$ ,  $c(x, 0) = c(x, T)$ , для всех  $x \in [-1, 1]$ . Тогда для любой функции  $f \in W_2^{1,3}(G)$ , такой, что  $f(x, 0, z) = f(x, T, z)$ , существует единственное обобщенное решение задачи (1.1)-(1.4) из пространства  $W_2^{2,3}(G)$ , и для нее справедливы следующие оценки:

$$I). \|u\|_{W_2^{1,3}(G)}^2 \leq c_1 \|f\|_{W_2^{0,3}(G)}^2,$$

$$II). \|u\|_{W_2^{2,3}(G)}^2 \leq c_2 \|f\|_{W_2^{1,3}(G)}^2.$$

В дальнейшем через  $c_i$  – обозначим положительные, вообще говоря, разные постоянные числа, отличные от нуля.

**Доказательство теоремы проведем по следующей схеме:**

1. Для задачи (1.1)–(1.4) формально по переменным применим преобразование Фурье и получим новую задачу (1.5)–(1.7).

2. Изучим однозначную разрешимость периодической задачи для уравнения третьего порядка с малым параметром (вспомогательная задача).

3. Затем с помощью этой вспомогательной задачи докажем однозначную разрешимость задачи (1.5)–(1.7).

4. Используя однозначную разрешимость задачи (1.5)–(1.7), дадим обоснование сходимости интегралов Фурье и докажем разрешимость задачи (1.1)–(1.4).

Приступим к реализации этой схемы.

Применяя для задачи (1.1)–(1.4) преобразование Фурье по переменным  $z$ , получим в области  $Q = (-1, 1) \times (0, T)$  следующую задачу

$$\Im \hat{u} = K(x) \hat{u}_{tt} - \hat{u}_{xx} + a(x) \hat{u}_t + (c(x, t) + \lambda^2) \hat{u} = \hat{f}(x, t, \lambda), \tag{1.5}$$

$$D_t^p \hat{u}|_{t=0} = D_t^p \hat{u}|_{t=T}, p = 0, 1 \tag{1.6}$$

$$D_x^p \hat{u}|_{x=-1} = D_x^p \hat{u}|_{x=1}, p = 0, 1, \tag{1.7}$$

где  $\lambda \in R = (-\infty, \infty)$ ,  $\hat{f}(x, t, \lambda) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t, z) e^{-i\lambda z} dz$  – преобразование Фурье по переменной  $z$  функции  $f(x, t, z)$ .

Как известно, однозначная разрешимость и гладкость обобщенного решения задачи (1.5)–(1.7) в случае, когда  $\lambda = 0$ , изучены в пространствах Соболева  $W_2^{m+2}(Q)$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$  в работах [11],[12]. Рассмотрим задачи (1.5)–(1.7) в случае, когда  $\lambda \neq 0$ . В этом случае решения задачи (1.5)–(1.7)  $\hat{u}(x, t, \lambda)$  и  $\hat{f}(x, t, \lambda)$  правая часть уравнения (1.5) зависит от параметра  $\lambda$ . С возрастанием  $|\lambda| \rightarrow \infty$  может расти и правая часть уравнения (1.5), поэтому в этом случае возникает вопрос: как можно получить априорные оценки, обеспечивающие однозначную разрешимость задачи (1.5)–(1.7). Поэтому сначала при фиксированном  $\lambda \in R$ , используя результаты работы [9]–[12] получим необходимые оценки для решения задачи (1.5)–(1.7). В дальнейшем эти результаты используем для исследования задачи (1.1)–(1.4) в анизотропных пространствах Соболева  $W_2^{m+2,s}(G)$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots; s \geq m + 3$  в неограниченном параллелепипеде

**Теорема 1.2.** Пусть выполнены выше перечисленные условия для коэффициентов уравнения (1.5), кроме того пусть выполнены  $2a(x) - \mu K(x) \geq \delta_1 > 0$ ,  $\mu c(x, t) - c_t(x, t) \geq \delta_2 > 0$ , для всех  $(x, t) \in \bar{Q}$ , где  $\mu = const > 0$ ,  $c(x, 0) \leq c(x, T)$ , для всех  $x \in [-1, 1]$ . Тогда, если для любой функции  $\hat{f}(x, t, \lambda) \in L_2(Q)$  существует решение задачи (1.5)–(1.7) из пространства  $W_2^2(Q)$ , то оно единственно и для нее справедлива следующая первая априорная оценка

$$1.1). \quad \|\hat{u}\|_{W_2^1(Q)}^2 \leq c_1 \|\hat{f}\|_{L_2(Q)}^2,$$

*Доказательство.* Докажем единственность решения задачи (1.5)–(1.7) с помощью метода интеграла энергии. Пусть существует решение задачи (1.5)–(1.7) из  $W_2^2(Q)$ . Рассмотрим тождество:

$$(\mathfrak{S}\hat{u}, 2\hat{u}_t + \mu\hat{u})_0 = (\hat{f}, 2\hat{u}_t + \mu\hat{u})_0, \quad \mu = const > 0 \tag{1.8}$$

В силу условий теоремы 1.2, для любой функции  $\hat{u} \in W_2^2(Q)$ , интегрируя по частям тождество (1.8), легко получить следующее неравенство

$$\begin{aligned} \int_Q \mathfrak{S}\hat{u} \cdot (2\hat{u}_t + \mu\hat{u}) dxdt &\geq \int_Q \{(2a - \mu K(x)) \cdot \hat{u}_t^2 + \\ &+ \mu\hat{u}_x^2 + ((\mu c - c_t) + \mu\lambda^2) \cdot \hat{u}^2\} dxdt + \\ &+ \int_{\partial Q} \{(K(x)\hat{u}_t^2 + \mu K(x)\hat{u}_t\hat{u} + \hat{u}_x^2 + (0,5\mu a + c + \lambda^2) \cdot \hat{u}^2)e_t - (2 \cdot \hat{u}_x\hat{u}_t + \mu\hat{u}_x\hat{u})e_x\} ds. \end{aligned} \tag{1.9}$$

где  $\mu = const > 0$ ,  $\vec{e} = (e_t, e_x)$  единичный вектор внутренней нормали к границе  $\partial Q$ . Условия теоремы 1.2 обеспечивают не отрицательность интеграла по области  $Q$ . Учитывая краевые условия (1.6)–(1.7) и используя условия теоремы 1.2 получим, что граничные интегралы равны нулю.

Учитывая выше сказанное, из неравенства (1.9) получим следующее неравенство снизу

$$\begin{aligned} &\int_Q \mathfrak{S}\hat{u} \cdot (2\hat{u}_t + \mu\hat{u}) dxdt \geq \\ &\geq \int_Q \{(2a - \mu K(x)) \cdot \hat{u}_t^2 + \mu\hat{u}_x^2 + ((\mu c - c_t) + \mu\lambda^2) \cdot \hat{u}^2\} dxdt \geq \end{aligned} \tag{1.10}$$

$$\geq \delta_0 \int_Q \{\hat{u}_t^2 + \hat{u}_x^2 + \hat{u}^2\} dx dt.$$

где  $\delta_0 = \min \{\delta_1, \mu, \delta_2\}$ . Теперь из неравенства (1.10) в левой части применяя неравенство Коши с  $\sigma$ , получим необходимую первую оценку 1.1) для задачи (1.1)-(1.4).

$$\|\hat{u}\|_{W_2^1(Q)}^2 \leq c_1 \|\hat{f}\|_{L_2(Q)}^2, \tag{1.11}$$

из которой следует единственность решения задачи (1.5)–(1.7) из  $W_2^2(Q)$  [12]. Теорема 1.2 доказана.

## 2. Уравнение третьего порядка с малым параметром.

Разрешимость задачи (1.5)–(1.7) докажем методом "ε-регуляризации", а именно: в области  $Q = (-1, 1) \times (0, T)$  рассмотрим семейство уравнений третьего порядка с малым параметром

$$\mathfrak{S}_\varepsilon \hat{u}_\varepsilon = -\varepsilon \frac{\partial^3 \hat{u}_\varepsilon}{\partial t^3} + \mathfrak{S} \hat{u}_\varepsilon = \hat{f}(x, t, \lambda) \tag{2.1}$$

и с периодическими краевыми условиями

$$D_t^q \hat{u}_\varepsilon|_{t=0} = D_t^q \hat{u}_\varepsilon|_{t=T}, \quad q = 0, 1, 2, \tag{2.2}$$

$$D_x^p \hat{u}_\varepsilon|_{x=-1} = D_x^p \hat{u}_\varepsilon|_{x=1}, \quad p = 0, 1, \tag{2.3}$$

где ε – малое положительное число,  $D_z^q w = \frac{\partial^q w}{\partial z^q}$ ,  $q = 1, 2$ ;  $D_z^0 w = w$ .

Ниже используем системы уравнений третьего порядка с малым параметром (2.1) в качестве ε-регуляризирующего уравнения для уравнения (1.5). [12],[17], [20].

Определим пространство функции

$$W(Q) = \{ \hat{u}_\varepsilon | \hat{u}_\varepsilon \in W_2^2(Q), \hat{u}_{\varepsilon ttt} \in L_2(Q) \},$$

удовлетворяющие соответствующим условиям (2.1)–(2.3) с конечной нормой

$$\|\hat{u}_\varepsilon\|_W^2 = \varepsilon \|\hat{u}_{\varepsilon ttt}\|_0^2 + \|\hat{u}_\varepsilon\|_2^2. \tag{B}$$

Очевидно, что пространство  $W(Q)$  с нормой (B) является гильбертовым пространством [12],[15],[20].

**Определение 2.1.** Обобщенным решением задачи (2.1)–(2.3) будем называть функцию  $\{\hat{u}_\varepsilon(x, t, \lambda)\} \in W(Q)$ , удовлетворяющую уравнению (2.1) почти всюду в области  $Q$ .

**Теорема 2.1.** Пусть выполнены высшее перечисленные условия для коэффициентов уравнения (2.1), кроме того пусть выполнены:  $2a(x) - \mu K(x) \geq \delta_1 > 0$ ,  $\mu c(x, t) - c_t(x, t) \geq \delta_2 > 0$  для всех  $(x, t) \in \bar{Q}$ , где  $\mu = const > 0$ ,  $c(x, 0) = c(x, T)$  для всех  $x \in [-1, 1]$ . Тогда для любой функции  $\hat{f}(x, t, \lambda) \in W_2^1(Q)$ , такой, что  $\hat{f}(x, 0, \lambda) = \hat{f}(x, T, \lambda)$ , существует единственное обобщенное решение задачи (2.1)-(2.3) из пространства  $W(Q)$  и для нее справедливы следующие оценки

$$2.1) \quad \varepsilon \|\hat{u}_{\varepsilon ttt}\|_0^2 + \|\hat{u}_\varepsilon\|_1^2 \leq c_1 \|\hat{f}\|_0^2,$$

$$2.2) \quad \varepsilon \|\hat{u}_{\varepsilon ttt}\|_0^2 + \|\hat{u}_\varepsilon\|_2^2 \leq c_2 \|\hat{f}\|_1^2.$$

Доказательство Теоремы 2.1 осуществляется поэтапно, с использованием метода Галеркина и соответствующих априорных оценок [11],[12]. Сначала докажем первую априорную оценку 2.1) для задачи (2.1)-(2.3). Для этого рассмотрим следующую тождество:

$$\int_Q \mathfrak{S}_\varepsilon \hat{u}_\varepsilon \cdot (2\hat{u}_{\varepsilon t} + \mu \hat{u}_\varepsilon) dx dt = \int_Q \hat{f} \cdot (2\hat{u}_{\varepsilon t} + \mu \hat{u}_\varepsilon) dx dt. \quad (2.4)$$

Интегрируя по частям тождество (2.4), учитывая условие Теоремы 2.1 нетрудно получить 2.1)-первую априорную оценку, аналогичную как первую оценку 1.1), откуда следует единственность обобщенного решения задачи (2.1)-(2.3) из пространства  $W(Q)$ .

Теперь докажем справедливость 2.2) вторую априорную оценку Для этого рассмотрим тождество:

$$\int_Q \mathfrak{S}_\varepsilon \hat{u}_\varepsilon \cdot P\hat{u}_\varepsilon dx dt = \int_Q \hat{f} \cdot P\hat{u}_\varepsilon dx dt, \quad (2.5)$$

где  $P\hat{u}_\varepsilon = (-2\hat{u}_{\varepsilon ttt} + \mu \hat{u}_{\varepsilon tt} - \mu \hat{u}_{\varepsilon xx} + \mu \hat{u}_{\varepsilon t})$ . Интегрируя по частям (2.5), с учетом условий теоремы 2.1 и краевых условий (2.2),(2.3), применяя неравенство Коши с  $\sigma$ , получим следующее неравенство:

$$\begin{aligned} c_2 \left[ \|f_t\|_0^2 + \|f\|_0^2 \right] &\geq \varepsilon \|\hat{u}_{\varepsilon ttt}\|_0^2 + \int_G \{ (2a - \mu K(x)) \hat{u}_{\varepsilon tt}^2 + \mu \hat{u}_{\varepsilon xx}^2 + \mu \hat{u}_{\varepsilon tx}^2 \} dx dt + \\ &\int_{\partial G} [(K(x) \hat{u}_{\varepsilon tt}^2 + 2a \hat{u}_{\varepsilon t} \hat{u}_{\varepsilon tt} - 2\hat{u}_{\varepsilon xx} \hat{u}_{\varepsilon t} + 2c \hat{u}_\varepsilon \hat{u}_{\varepsilon t}) e_t - 2\hat{u}_{\varepsilon tt} \hat{u}_{\varepsilon tx} e_x] ds - \\ &-\sigma ( \|\hat{u}_{\varepsilon xt}\|_0^2 + \|\hat{u}_{\varepsilon tt}\|_0^2 ) - c(\sigma) \|\hat{u}_\varepsilon\|_1^2 = \sum_{i=1}^3 J_i, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где  $\sigma, c(\sigma)$  – коэффициенты неравенства Коши с  $\sigma$ ,  $J_i$  ( $i = 1, 3$ ) – интегралы по области,  $J_2$ - интеграл по границе. Учитывая условие теоремы 2.1 и краевые условия (2.2), (2.3), получим, что  $J_i > 0$ , ( $i = 1, 3$ ) и  $J_2 = 0$ . Пусть  $\delta_3 = \min \{ \delta_1, \mu, \delta_2 \}$ , выбирая  $\delta_3 - \sigma > \delta_0 > 0$ , из неравенства (2.6) получим необходимую вторую оценку

$$\varepsilon \|\hat{u}_{\varepsilon ttt}\|_0^2 + \|\hat{u}_\varepsilon\|_2^2 \leq c_2 \|\hat{f}\|_1^2. \quad (2.7)$$

Из доказанных оценок методом Галеркина получим однозначную разрешимость задачи (2.1)-(2.3) из пространства  $W(Q)$  [12]. Теорема 2.1 доказана.

Перейдем к доказательству разрешимости задачи (1.5)-(1.7).

### 2.1. Существование решения задачи.

**Теорема 2.2.** Пусть выполнены все условия теоремы 1.1-2.1. Тогда существует единственное обобщенное решение задачи (1.5)-(1.7) в пространстве  $W_2^2(Q)$ .

*Доказательство.* Единственность решения задачи (1.5)-(1.7) в пространстве  $W_2^2(Q)$  доказана в теореме 1.2. Теперь докажем существование решения задачи (1.5)-(1.7) в  $W_2^2(Q)$ . Для этого при  $\varepsilon > 0$  в области  $Q$  рассмотрим уравнение (2.1) с краевыми условиями (2.2),(2.3). Так как выполнены все условия теоремы 2.1, то существует единственное обобщенное решение задачи (2.1)-(2.3) в  $W(Q)$ , при  $\varepsilon > 0$  и для нее справедливы 2.1) первая и 2.2) вторая оценки. Отсюда следует, по известной теореме о компактности [15,23], что из множества функций  $\{ \hat{u}_\varepsilon(x, t, \lambda) \}$ ,  $\varepsilon > 0$ , можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность функций, такую, что  $\{ \hat{u}_{\varepsilon_i}(x, t, \lambda) \} \rightarrow \hat{u}(x, t, \lambda)$  при  $\varepsilon_i \rightarrow 0$  в  $W(Q)$ . Покажем, что предельная функция  $\hat{u}(x, t, \lambda)$  удовлетворяет уравнению  $L\hat{u} = \hat{f}$  (1.5) почти всюду в  $W_2^2(Q)$ . В самом деле, так как подпоследовательность  $\{ \hat{u}_{\varepsilon_i}(x, t, \lambda) \}$  слабо

сходится в  $W(Q)$ , а подпоследовательность  $\{\sqrt{\varepsilon_i} \hat{u}_{\varepsilon_i, ttt}(x, t, \lambda)\}$  равномерно ограничена в  $L_2(Q)$  и оператор  $L$  линейный, то имеем

$$\mathfrak{F} \hat{u} - \hat{f} = \mathfrak{F} \hat{u} - \mathfrak{F} \hat{u}_{\varepsilon_i} + \varepsilon_i \frac{\partial^3 \hat{u}_{\varepsilon_i}}{\partial t^3} = \mathfrak{F}(\hat{u} - \hat{u}_{\varepsilon_i}) + \varepsilon_i \frac{\partial^3 \hat{u}_{\varepsilon_i}}{\partial t^3}. \quad (2.8)$$

Из равенства (2.8), переходя к пределу при  $\varepsilon_i \rightarrow 0$ , получим единственное обобщенное решение задачи (1.5)-(1.7) из пространства Соболева  $W_2^2(Q)$  [12],[21]. Таким образом, Теорема 2.2 доказана.

### 3. Существование решения задачи (1.1)-(1.4).

Теперь перейдем к доказательству Теоремы 1.1 об однозначной разрешимости обобщенного решения задачи (1.1)-(1.4) в пространстве  $W_2^{2,3}(G)$ . Для доказательства Теоремы 1.1 сначала докажем справедливость оценки I), II). Как нам известно в Теореме 2.1 для решения задачи (1.5)-(1.7) доказана справедливость первой оценки 2.1), то есть

$$\|\hat{u}\|_{W_2^1(Q)}^2 \leq c_1 \|\hat{f}\|_{L_2(Q)}^2. \quad (3.1)$$

Чтобы доказать, что  $u_z \in L_2(G)$ , нам необходимо умножить неравенство (3.1) на  $(2\pi)^{-1/2} \cdot (1 + |\lambda|^2)^3$  и проинтегрировать по  $\lambda$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ , тогда получим I) оценку

$$\begin{aligned} \|u\|_{W_2^{1,3}(G)}^2 &= (2\pi)^{-1/2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |\lambda|^2)^3 \cdot \|\hat{u}\|_{W_2^1(Q)}^2 d\lambda \leq \\ &\leq (2\pi)^{-1/2} \cdot c_1 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |\lambda|^2)^3 \cdot \|\hat{f}\|_{L_2(Q)}^2 d\lambda = c_1 \|f\|_{W_2^{0,3}(G)}^2. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Точно так же используя условия Теоремы 2.1 с предельным переходом при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , из 2.2) второй оценки нетрудно получить для решения задачи (1.5)-(1.7) следующей оценки

$$\|\hat{u}\|_{W_2^2(Q)}^2 \leq c_2 \|\hat{f}\|_{W_2^1(Q)}^2. \quad (3.3)$$

Чтобы доказать, что  $u_{zz} \in L_2(G)$ , нам необходимо умножить неравенство (3.3) на  $(2\pi)^{-1/2} \cdot (1 + |\lambda|^2)^3$  и интегрировать по  $\lambda$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ , тогда получим

$$\begin{aligned} \|u\|_{W_2^{2,3}(G)}^2 &= (2\pi)^{-1/2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |\lambda|^2)^3 \cdot \|\hat{u}\|_{W_2^2(Q)}^2 d\lambda \leq \\ &\leq (2\pi)^{-1/2} \cdot c_2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |\lambda|^2)^3 \cdot \|\hat{f}\|_{W_2^1(Q)}^2 d\lambda = c_2 \|f\|_{W_2^{1,3}(G)}^2, \end{aligned} \quad (3.4)$$

из которой следует справедливость II) второй оценки теоремы 1.1.

Из I)-первой априорной оценки следует единственность обобщенного решения задачи (1.1)-(1.4), а из справедливости II)-второй априорной оценки следует существование обобщенного решения задачи (1.1)-(1.4) из пространства  $W_2^{2,3}(G)$  [13,14]. Теорема 1.1 доказана.

#### 4. Гладкость обобщенного решения задачи (1.1)-(1.4).

Теперь обратимся к исследованию гладкости обобщенного решения задачи (1.1)-(1.4) в пространствах  $W_2^{m+2,s}(G)$ , где  $m, s$  — целые конечные положительные числа, такие, что  $m \geq 0, s \geq 3$ .

Ниже, для простоты предположим, что коэффициенты уравнения (1.1) достаточно дифференцируемые функции в замкнутой области  $\bar{Q}$ .

**Теорема 4.1.** Пусть выполнены все условия теоремы 1.1, кроме того, пусть  $D_t^q c|_{t=0} = D_t^q c|_{t=T}$ . Тогда для любой функции  $f \in W_2^{m+1,s}(G)$ , такой, что  $D_t^q f|_{t=0} = D_t^q f|_{t=T}$  ( $q = 0, 1, 2, \dots, m$ ), существует, причем единственное, обобщенное решение задачи (1.1)-(1.4) из пространства  $W_2^{m+2,s}(G)$ , где  $m, s$  — любые целые конечные положительные числа, такие, что  $s \geq m + 3, m = 0, 1, 2, 3, \dots$

*Доказательство.* Отметим, что в работах [11],[12] для уравнения Чаплыгина в случае, когда  $\lambda = 0$  исследована гладкость обобщенного решения периодической краевой задачи (1.5)-(1.7) в пространствах Соболева  $W_2^{m+2}(Q)$  и доказаны соответствующие априорные оценки.

$$\|\hat{u}\|_{W_2^{m+2}(Q)}^2 \leq c_{m+1} \|\hat{f}\|_{W_2^{m+1}(Q)}^2 \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (4.1)$$

Аналогично такие же результаты можем получить в случае, когда  $\lambda \neq 0$ . Теперь чтобы доказать, что  $D_z^{s-1} u \in L_2(G)$ , где  $s \geq m + 3, m = 0, 1, 2, 3, \dots$ , и применить теорему вложения Соболева, нам необходимо умножить неравенство (4.1) на  $(2\pi)^{-1/2} \cdot (1 + |\lambda|^2)^s$  и интегрируя по  $\lambda$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ , можем получить

$$\begin{aligned} \|u\|_{W_2^{m+2,s}(G)}^2 &= (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |\lambda|^2)^s \cdot \|\hat{u}\|_{W_2^{m+2}(Q)}^2 d\lambda \leq \\ &\leq (2\pi)^{-1/2} c_{m+1} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |\lambda|^2)^s \cdot \|\hat{f}\|_{W_2^{m+1}(Q)}^2 d\lambda = c_{m+1} \|f\|_{W_2^{m+1,s}(G)}^2. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Отсюда получим существование единственного обобщенного решения задачи (1.1)–(1.4) из пространствах  $W_2^{m+2,s}(G)$ . Теорема 4.1 доказана.

*Замечание 4.1.* Аналогично изучаются периодические краевые задачи для многомерного уравнения Чаплыгина.

#### 5. Заключение.

В данной статье в неограниченном параллелепипеде доказаны теоремы единственности, существования и гладкости обобщенного решения периодической краевой задачи для трехмерного уравнения Чаплыгина в анизотропных пространствах Соболева  $W_2^{m+2,s}(G)$ , где  $m, s$  — целые конечные положительные числа, причем  $m = 0, 1, 2, 3, \dots, s \geq m + 3$ . Доказательство теоремы основано на методах преобразования Фурье, "ε-регуляризации" и априорных оценок. Рассмотренный метод доказательства может быть применен в исследованиях нелокальных и периодических краевых задачах для многомерного уравнения смешанного типа.

#### Список литературы

- [1] Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. М: Изд.АН СССР. (1959) с.164
- [2] Бицадзе А.В. Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанного типа. Новосибирск, ДАН СССР, (1953) 167-170.
- [3] Франкль. Ф.И. О задачах Чаплыгина для смешанных до и сверхзвуковых течений. Изв.АН СССР.Сер.матем. 9(2), с.121-143 (1945)

- [4] Франкль Ф.И. *Обтекание профилей потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения*. Прикладная математика и механика, **20** issue 2, 196-202 (1956).
- [5] Франкль Ф.И. *Избранные труды по газовой динамике*. Москва. (1973) с.711.
- [6] Кальменов Т.Ш. *О полупериодической задаче для многомерного уравнения смешанного типа*. Дифференциальные уравнения, **14** issue 3, 546-548 (1978).
- [7] Сабитов К.Б. *Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области*. Докл. РАН. **413** issue 1, 23-26 (2007)
- [8] Цыбиков Б.Н. *О корректности периодической задачи для многомерного уравнения смешанного типа*. В. кн: Неклассические уравнения математической физики, 201-206 (1986).
- [9] Джамалов С.З. *The nonlocal boundary value problem with constant coefficients for the mixed type of equation of the first kind in a plane*. Malaysian journal of mathematical sciences. **12(1)**:49-62 (2018).
- [10] Джамалов С.З. *Об одной нелокальной краевой задаче с постоянными коэффициентами для многомерного уравнения смешанного типа первого рода*. Вестник Самарского государственного технического университета, Сер.физ.-мат.науки, **21** issue 4, 1-14 (2017).
- [11] Джамалов С.З., Ашуров Р.Р. *О гладкости одной нелокальной краевой задачи для многомерного уравнения Чаплыгина в пространстве*. Казахский математический журнал, **18** issue 2, 59-70 (2018).
- [12] Джамалов С.З. *Нелокальные краевые и обратные задачи для уравнений смешанного типа*. Монография. Ташкент. (2021) с.176.
- [13] S.Z.Dzhamalov, Kh.Sh.Turakulov and M.S.Sultanov. *On a nonlocal boundary value problem for a three-dimensional Tricomi equation in a prismatic unbounded domain*. Lobachevskii Journal of Mathematics, Vol. 43, N. 11, 3104–3111 (2022).
- [14] S.Z.Dzhamalov, B.K.Sipatdinova. *Semi-Nonlocal Boundary Problem for a Three-Dimensional Second Kind Mixed Equation in an Unbounded Parallelepiped* Lobachevskii Journal of Mathematics, Vol. 44, N. 3, 1137–1144. (2023)
- [15] Ладыженская О.А. *Краевые задачи математической физики*. Москва, Наука, (1973).
- [16] Лионс Ж.Л. Мадженес Э. *Неоднородные граничные задачи и их приложения*. М.Мир. (1971).
- [17] Латтес.Р, Лионс.Ж.Л. *Метод квазиобращения*. М: Мир, (1971).
- [18] Хермандер Л. *Линейные дифференциальные операторы с частными производными*. Издательство: «Мир».Москва. (1965).
- [19] Никольский.С.М. *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*. Издательство: "Наука". Москва. (1977).
- [20] Соболев.С.Л. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*. Издательство: "Наука". Москва. (1988).
- [21] Врагов В.Н. *Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики*. Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск, НГУ, (1983).
- [22] Кожанов А.И. *Краевые задачи для уравнений математической физики нечетного порядка*. Новосибирск, НГУ, (1990).
- [23] Треногин.В.А. *Функциональный анализ*. Москва, с.488 (2007).
- [24] Yuldashev T.K. *Determining of coefficients and the classical solvability of a nonlocal boundary-value problem for the Benney-Luke integro-differential equation with degenerate kernel*. J. Math. Sci. 254 (6), 793–807 (2021).

## On the smoothness of the periodic boundary value problem for the three-dimensional Chaplygin equation in an unbounded parallelepiped

Dzhamalov Sirojiddin Z., Turakulov Khamidulla Sh. and Sipatdinova Biybinaz R.

### Abstract

The article investigates the uniqueness, existence, and smoothness of a generalized solution to the periodic boundary value problem for the three-dimensional Chaplygin equation in an unbounded parallelepiped. To prove the theorems on uniqueness, existence, and smoothness of the solution, the Fourier transform, the methods of  $\varepsilon$ -regularization, and a priori estimates are used.

### Affiliations

Dzhamalov Sirojiddin Z.

**Address:** 1. Scientific Laboratory of Differential Equations and Their Applications, V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics Uzbekistan Academy of Sciences, University street 9, 100174, Tashkent, Uzbekistan.

2. Tashkent State University of Economic, Tashkent, 100066, Uzbekistan

**e-mail:** siroj63@mail.ru

**ORCID ID:** 0000-0001-9392-5464.

Turakulov Khamidulla Sh.

**Address:** Kokand State University, Kokand, 150700 Uzbekistan

**e-mail:** second@author.com

**ORCID ID:** 57732238300

Sipatdinova Biybinaz K.

**Address:** Tashkent State Transport University, Temiryulchilar street 1, 1000167, Tashkent, Uzbekistan.

**e-mail:** sbiybinaz@mail.ru

**ORCID ID:** 0000-0002-7833-6992.

# О сохранении знака гауссовой кривизны при геодезических отображениях

А.С.Шарипов\* З.Ю.Усмонхужаев

## Аннотация

Геодезические отображения имеют важные приложения в римановой геометрии, в теории геодезии и картографии, моделирование, физике и механике. В данной работе исследуется вопрос о сохранении знака гауссовой кривизны при геодезических отображениях. Доказано, что если поверхности вращения имеют постоянную гауссову кривизну, то при нетривиальном геодезическом отображении сохраняется знак гауссовой кривизны.

*Ключевые слова:* гладкие многообразия, аффинная связность, геодезическая линия, геодезическое отображение, нетривиальное геодезическое отображение, кривизна гаусса.

*Предметная классификация AMS (2020):* Основная: 53A05 ; Дополнительная: 53B20; 53C22.

## 1. Введение

Геодезические отображения играют важную роль в римановой геометрии и её приложениях, связывая различные многообразия посредством сохранения геодезических линий. Эти отображения естественным образом возникают в задачах математической физики, теории относительности и даже в машинном обучении, где геодезические потоки используются для оптимизации и анализа данных. Изучение таких отображений тесно связано с проблемами эквивалентности римановых структур, поиском симметрий и инвариантов геометрических потоков. В частности, два римановых пространства, допускающие геодезическое отображение друг на друга, описывают процессы, протекающие при эквивалентных внешних нагрузках по одним и тем же «траекториям», но при различных энергетических режимах. Следовательно, один из этих процессов можно моделировать другим [1].

История изучения геодезических отображений берет начало в работах Бельтрами, который в 1865 году впервые сформулировал данную задачу, хотя и не в наиболее общей постановке, а в частном случае отображения поверхности  $V_2$  (двумерного риманова многообразия) на евклидову плоскость  $E_2$ . Эти исследования можно рассматривать как один из первых толчков к последующему признанию и развитию неевклидовой геометрии, заложенной Лобачевским, Бойяи и Гауссом.

В 1779 году Ж. Лагранж обнаружил первые нетривиальные примеры геодезических отображений [2]. Далее, в 1869 году, У. Дини сформулировал более общую задачу существования геодезических отображений между поверхностями  $(V_2)$  и  $(\bar{V}_2)$  и, по существу, дал её полное решение. Несмотря на то что предложенный им метод был достаточно сложным, в дальнейшем он неоднократно перерабатывался, упрощался и уточнялся. В 1896 году Т. Леви-Чивита, исследуя преобразования уравнений динамики, рассмотрел проблему в более широком контексте и вывел основные уравнения, описывающие геодезические отображения между классическими римановыми пространствами. С развитием тензорных методов в дифференциальной геометрии Г. Вейль, Л. П. Эйзенхарт

и другие ученые разработали инвариантную и более универсальную теорию геодезических отображений. Модифицированный подход в этом направлении представлен, в частности, в работе И. Хинтерляйтнера [3]. Геодезические отображения финслеровых пространств были рассмотрены Г. Рундом. Существенное значение имеют также исследования, в которых методы геометрии Лобачевского применяются к анализу и интегрированию нелинейных уравнений современной математической физики [4].

Геодезические отображения пространства на само себя называются проективными (или геодезическими) преобразованиями. Совокупность проективных преобразований римановых многообразий, а также многообразий с аффинными связностями, образует группу Ли.

В данной статье развиваются результаты Ж. Микеша [5, с. 318], посвящённые проблеме Бельтрами. Известно, что полученные Ж. Микешем результаты справедливы также и в двумерном случае задачи Бельтрами. В настоящей работе доказано, что если задана поверхность вращения с постоянной гауссовой кривизной, то при её нетривиальном геодезическом отображении полученная поверхность также обладает постоянной гауссовой кривизной того же знака. Поскольку знак кривизны поверхности играет существенную роль при исследовании её геометрических свойств, указанное обстоятельство обосновывает актуальность рассматриваемой задачи. Подобными задачами в неевклидовых пространствах исследовались профессором А. Артыкбаевым и его учениками. В частности, в работах [6], [7] исследованы двойственные отображения и инвариантные геометрические характеристики поверхностей в неевклидовых пространствах, что позволило получить фундаментальные результаты о геодезичности и конформности при двойственном отображении поверхности в неевклидовых пространствах. Кроме того, поверхности с ненулевой постоянной полной кривизной в многомерном пространстве имеет важное место при исследовании свойств внутренней геометрии поверхностей. В работе [8] исследовались трансляционные поверхности с ненулевой постоянной полной кривизной в многомерном изотропном пространстве. Было установлено существование таких поверхностей, соответствующих заданным полной и средней кривизнам.

Нетрудно убедиться, что всякое изометрическое отображение является геодезическим отображением, однако существуют примеры геодезических отображений, которые не являются изометриями. Кроме того, существует ряд работ авторов, посвящённых изометриям по сечениям. В этих работах изучены поверхности имеющие положительные гауссовы кривизны. В частности, в классе выпуклых многогранников, изометричных по сечениям, рассматривались задачи существования и единственности по заданным внешним кривизнам в вершинах [9], [10]. Для таких многогранников сначала вводится понятие дефекта в вершинах, после чего с использованием этого дефекта исследуются задачи построения выпуклого многогранника [11]. Значит в данной работа исследуется более широкий класс поверхностей по сравнению с ранее изученной нами.

## 2. Общие понятия геодезических отображений римановых пространств

Пусть  $M$  и  $N$  - гладкие многообразия размерности  $n$  с аффинными связностями.

**Определение 2.1** ([1, с. 70]). Геодезическим отображением  $f$  многообразия  $M$  на  $N$ , называется взаимно однозначное соответствие между их точками, при котором каждая геодезическая линия многообразия  $M$  переходит в геодезическую линию многообразия  $N$ .

Рассмотрим эти многообразия в общей по отображению  $f$  системе координат  $x^1, x^2, \dots, x^n$ . Обозначим компоненты объектов связности многообразий  $M$  и  $N$ , в соответствующих точках  $(M)$  и  $\overline{M}$  через  $\Gamma_{ij}^h(x)$  и  $\overline{\Gamma}_{ij}^h(x)$ , предполагая их симметричными, и положим

$$\overline{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + P_{ij}^h(x) \quad (h, i, j = 1, 2, \dots, n), \quad (2.1)$$

где  $P_{ij}^k$  – тензор деформации .

**Теорема 2.1** ([1, с. 72]). Для того чтобы отображение  $f$  многообразия аффинной связности  $M$  на многообразии аффинной связности  $N$  было геодезическим, необходимо и достаточно, чтобы тензор деформации связности  $P_{ij}^h$  отображения  $f$  представлялся в виде:

$$P_{ij}^h(x) = \psi_i(x) \delta_j^h + \psi_j(x) \delta_i^h, \quad (2.2)$$

где  $\delta_i^h$  — символы Кронекера, а  $\psi_i$  — некоторый ковариантный вектор.

Условия (2.2) носят тензорный характер и потому инвариантны относительно выбора общей по отображению  $f$  системы координат  $x^1, x^2, \dots, x^n$ . На основании этих условий уравнение (2.1) принимает вид

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \psi_i(x) \delta_j^h + \psi_j(x) \delta_i^h. \quad (2.3)$$

*Замечание 2.1.* Когда вектор  $\psi_i(x)$  тождественно равен нулю, то геодезическое отображение  $f$  называется тривиальным или аффинным.

**Пример 2.1.** Пусть поверхность  $\bar{S}$  является образом поверхности  $S$  при гомотетии в трёхмерном пространстве и  $k$  — коэффициент гомотетии. Тогда метрические тензоры поверхностей связаны соотношением  $\bar{g}_{ij} = k^2 \cdot g_{ij}$ . Следовательно, символы Кристоффеля совпадают  $\bar{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k$  и геодезическая  $\ell$  на  $S$  отображается на геодезическую  $\bar{\ell}$  на  $\bar{S}$ , где канонические параметры  $s$  на  $\ell$  и  $\bar{s}$  на  $\bar{\ell}$  связаны соотношением  $\bar{s} = k \cdot s + const$ .

### 3. Геодезические отображения римановых пространств постоянной кривизны

Имея возможность использовать теорию геодезических отображений римановых многообразий, мы обратим внимание на специальные типы римановых пространств постоянной кривизны. Рассмотрим геодезические отображения (фиксированного) пространства  $V_n$  постоянной кривизны на (произвольное) риманово пространство  $\bar{V}_n$ .

Поскольку при  $n > 2$  в пространстве  $V_n$  тензор Вейля обращается в нуль,  $W = 0$ , то тензор Вейля отображаемого пространства  $\bar{V}_n$  также должен быть равен нулю,  $\bar{W} = 0$ . Следовательно, в силу теоремы [5, р.318], пространство  $\bar{V}_n$  является пространством постоянной кривизны. Оказывается, что это утверждение справедливо и при  $n = 2$ .

Данная ситуация описывается так называемой теоремой Бельтрами.

**Теорема 3.1** ([5, с 318]). Единственными римановыми многообразиями, геодезические которых при геодезических отображениях переходят в геодезические пространств постоянной кривизны, являются сами пространства постоянной кривизны.

Вопрос о существовании геодезических отображений проясняется следующим.

**Теорема 3.2** ([5, с 318]). Для пары пространств постоянной кривизны всегда найдётся нетривиальное геодезическое отображение, отображающее одно пространство на другое.

Исследуя следствия из этой теоремы, мы хотим исследовать класс поверхностей, сохраняющих знак гауссовой кривизны при геодезическом отображении. Начнём рассматривать, как меняются метрики поверхностей вращения при геодезическом отображении, как показано в [5, с. 301], но более подробно.

Рассмотрим регулярную ( $k$  раз непрерывно дифференцируемую) поверхность вращения  $F$  [12] и  $r = r(\omega, t)$  — её некоторую регулярную параметризацию, где  $\omega \in [\omega_1, \omega_2], t \in [0, 2\pi)$  — координаты, а параметры  $\omega_1$  и  $\omega_2$  могут достигать значений  $\pm\infty$ .

Далее в статье мы будем рассматривать исключительно регулярные поверхности. Для регулярных поверхностей  $[r_u, r_v] \neq 0$ , где  $[, ]$  — векторное произведение.

Пусть  $f$  — геодезическое отображение и  $F$  — поверхность вращения, которая имеет метрику вида

$$ds^2 = a(\omega)d\omega^2 + b(\omega)dt^2 \quad (3.1)$$

где  $r_\omega^2(\omega, t) = a(\omega)$  и  $r_t^2(\omega, t) = b(\omega)$  — положительные функции. Обозначим через  $F_1$  образ поверхности вращения  $F$  при отображении  $f$ . Предположим, что геодезические линии  $\ell = \ell(t)$ ,  $t \in R$  из  $F$  отображаются в геодезические  $F_1$  и метрика поверхности  $F_1$  имеет следующий вид:

$$ds_1^2 = A(\omega)d\omega^2 + B(\omega)dt^2 \quad (3.2)$$

где  $A(\omega)$  и  $B(\omega)$  — положительные функции. Тогда тензор деформации

$$P_{ij}^h(x) = \bar{\Gamma}_{ij}^h(x) - \Gamma_{ij}^h(x)$$

имеет вид:

$$P_{11}^1 = \frac{1}{2} \left( \frac{A'}{A} - \frac{a'}{a} \right); \quad P_{12}^1 = P_{21}^1 = 0; \quad P_{22}^1 = -\frac{1}{2} \left( \frac{B'}{A} - \frac{b'}{a} \right);$$

$$P_{11}^2 = 0; \quad P_{12}^2 = P_{21}^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{B'}{B} - \frac{b'}{b} \right); \quad P_{22}^2 = 0,$$

где  $\Gamma_{ij}^h(x)$  и  $\bar{\Gamma}_{ij}^h(x)$  — символы Кристоффеля поверхностей  $F$  и  $F_1$ .

Согласно теореме [1, с. 72], перепишем тензор деформации:

$$P_{11}^1 = \frac{1}{2} \left( \frac{A'}{A} - \frac{a'}{a} \right) = \psi_1 \delta_1^1 + \psi_1 \delta_1^1 = 2\psi_1 \Rightarrow \frac{A'}{A} - \frac{a'}{a} = 4\psi_1$$

$$P_{12}^2 = P_{21}^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{B'}{B} - \frac{b'}{b} \right) = \psi_1 \delta_2^2 + \psi_2 \delta_1^2 = \psi_1 \Rightarrow \frac{B'}{B} - \frac{b'}{b} = 2\psi_1;$$

$$P_{22}^1 = -\frac{1}{2} \left( \frac{B'}{A} - \frac{b'}{a} \right) = \psi_2 \delta_2^1 + \psi_2 \delta_1^2 = 0 \Rightarrow \frac{B'}{A} - \frac{b'}{a} = 0;$$

$$P_{12}^1 = P_{21}^1 = \psi_1 \delta_2^1 + \psi_2 \delta_1^2 = 0; \quad P_{11}^2 = 0; \quad P_{22}^2 = 0.$$

Вводим обозначения следующим образом:

$$A(\omega) = \alpha(\omega)a(\omega) \quad \text{и} \quad B(\omega) = \beta(\omega)b(\omega). \quad (*)$$

Так как  $A(\omega)$ ,  $B(\omega)$  и  $a(\omega)$ ,  $b(\omega)$  — положительные функции, то следует, что  $\alpha(\omega)$  и  $\beta(\omega)$  — тоже положительные функции.

$$\frac{A'}{A} - \frac{a'}{a} = \left( \frac{A}{a} \right)' \cdot \left( \frac{a}{A} \right) = \frac{\alpha'}{\alpha} = 4\psi_1; \quad \frac{B'}{B} - \frac{b'}{b} = \left( \frac{B}{b} \right)' \cdot \left( \frac{b}{B} \right) = \frac{\beta'}{\beta} = 2\psi_1; \quad \frac{B'}{A} - \frac{b'}{a} = 0.$$

Приравняв первое равенство ко второму и переписав третье равенство, получим:

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = 2\frac{\beta'}{\beta},$$

$$\frac{(\beta b)'}{A} - \frac{b'}{a} = \frac{\beta' b + \beta b'}{\alpha a} - \frac{b'}{a} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\beta' b + \beta b'}{b'}, \quad \text{где } b'(\omega) \neq 0.$$

Из этих равенств вытекает:

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\left( \frac{\beta' b + \beta b'}{b'} \right)'}{\frac{\beta' b + \beta b'}{b'}} = \frac{(\beta' b + \beta b')' \cdot b' - (\beta' b + \beta b') \cdot b''}{b' \cdot (\beta' b + \beta b')} = \frac{(\beta'' b + 2\beta' b' + \beta b'') \cdot b' - (\beta' b + \beta b') \cdot b''}{b' \cdot (\beta' b + \beta b')} = 2\frac{\beta'}{\beta}$$

$$\frac{\beta\beta''bb' - \beta\beta'bb''}{b' \cdot \beta\beta'b' - \beta\beta'b''} = 2\beta'^2bb'$$

$$\left(\frac{b'}{\beta'}\right)' = -2\frac{b'}{\beta}.$$

Вводя обозначение  $\frac{b'}{\beta'} = u$ , получим следующее дифференциальное уравнение:

$$u' = -2\frac{b'}{\beta} \text{ или } u' = -2\frac{u\beta'}{\beta},$$

Следовательно,

$$\frac{u'}{u} = -2\frac{\beta'}{\beta}.$$

Интегрируя обе части по  $\omega$ :

$$\ln |u| = -2\ln \beta + c; \quad |u| = \frac{e^c}{\beta^2}; \quad u = \pm \frac{e^c}{\beta^2},$$

где  $c$  — некоторая константа. Вводя обозначение  $C_1 = \pm e^c$ , имеем:

$$u = \frac{C_1}{\beta^2}.$$

Учитывая обозначение  $u = \frac{b'}{\beta'}$ , получим:

$$\frac{b'}{\beta'} = \frac{C_1}{\beta^2}; \quad b' = \frac{C_1\beta'}{\beta^2}; \quad b = -\frac{C_1}{\beta} + C_2; \quad \beta = \frac{C_1}{C_2 - b}.$$

$$\alpha = \frac{\beta'b + \beta b'}{b'} = \frac{C_1C_2}{(C_2 - b(\omega))^2}.$$

**Замечание 3.1.** Мы не будем рассматривать случаи, когда  $\alpha(\omega)$  и  $\beta(\omega)$  являются константами, то есть  $\alpha'(\omega) = 0$ ,  $\beta'(\omega) = 0$ , поскольку в этом случае геодезические отображения являются тривиальными.

Вернёмся к обозначениям (\*):

$$A(\omega) = \alpha(\omega)a(\omega) = \frac{C_1C_2a(\omega)}{(C_2 - b(\omega))^2}, \quad B(\omega) = \beta(\omega)b(\omega) = \frac{C_1b(\omega)}{C_2 - b(\omega)}.$$

Учитывая, что  $A(\omega)$  и  $B(\omega)$  являются коэффициентами первой квадратичной формы, константы  $C_1$  и  $C_2$  необходимо выбрать так, чтобы коэффициенты  $A(\omega)$  и  $B(\omega)$  первой квадратичной формы были положительно определёнными и невырожденными. Если ввести новые параметры

$$p = \frac{C_1}{C_2}, \quad q = -\frac{1}{C_2},$$

то получаем

$$A(\omega) = \frac{pa(\omega)}{(1 + qb(\omega))^2} \quad \text{и} \quad B(\omega) = \frac{pb(\omega)}{1 + qb(\omega)}.$$

Первая квадратичная форма (3.2) имеет вид:

$$ds^2 = \frac{pa(\omega)}{(1 + qb(\omega))^2} d\omega^2 + \frac{pb(\omega)}{1 + qb(\omega)} dt^2 \quad (3.3)$$

где  $1 + qb(\omega) \neq 0$ ,  $qb'(x) \neq 0$  и  $\omega$  — тот же параметр, что и на поверхности  $F$ , и  $t \in [0, 2\pi)$ .

**Замечание 3.2.** В первой квадратичной форме (3.3) параметры  $p$  и  $q$  имеют глубокий геометрический смысл: параметр  $p$  всегда является положительным множителем всей метрики и сохраняет тип геометрии. Параметр  $q$

меняет тип геометрии поверхностей вращения. В частности, если  $q > 0$ , то первая квадратичная форма (3.3) определяет простые поверхности в смысле Микеша [5, с.353]. Следует из этого, что  $C_1$  и  $C_2$  отрицательны и параметры  $p$  и  $q$  положительны.

Исследуем теперь образы поверхностей вращения постоянной гауссовой кривизны при геодезическом отображении. Начнём рассматривать поверхности положительной постоянной кривизны с метрикой

$$ds^2 = d\omega^2 + \cos^2 \frac{\omega}{R} dt^2$$

где  $R$  — радиус вращения и  $\omega \in [\omega_1, \omega_2], t \in [0, 2\pi)$ . Параметры  $\omega_1$  и  $\omega_2$  могут достигать значений  $\pm\infty$ .

**Теорема 3.3.** *Если поверхности вращения положительной постоянной гауссовой кривизны допускают нетривиальное геодезическое отображение, то полученные поверхности имеют постоянную положительную гауссову кривизну.*

Доказательство. По формуле (3.3), метрика поверхностей вращения положительной постоянной гауссовой кривизны имеет следующий вид:

$$d\bar{s}^2 = \frac{p}{(1 + q \cos^2 \frac{\omega}{R})^2} d\omega^2 + \frac{p \cos^2 \frac{\omega}{R}}{1 + q \cos^2 \frac{\omega}{R}} dt^2. \quad (3.4)$$

Согласно [13, с. 499], гауссова кривизна двумерного многообразия определяется следующим образом:

$$K = \frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \frac{\left( \frac{\partial \Gamma_{11}^i}{\partial t} - \frac{\partial \Gamma_{21}^i}{\partial \omega} + \sum_j \Gamma_{2j}^i \cdot \Gamma_{11}^j - \sum_j \Gamma_{1j}^i \cdot \Gamma_{21}^j \right) \cdot g_{i2}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \quad (3.5)$$

где  $\Gamma_{ij}^k$  — символы Кристоффеля,  $R_{1212}$  — компонента тензора Римана.

Для полученной метрики (3.4)

$$g_{11} = \frac{p}{(1 + q \cos^2 \frac{\omega}{R})^2}, \quad g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22} = \frac{p \cos^2 \frac{\omega}{R}}{1 + q \cos^2 \frac{\omega}{R}},$$

а символы Кристоффеля имеют вид:

$$\Gamma_{11}^1 = -\frac{1}{R} \cdot \frac{q \sin \frac{2\omega}{R}}{1 + q \cos^2 \frac{\omega}{R}}, \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 0, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2R} \sin \frac{2\omega}{R};$$

$$\Gamma_{11}^2 = 0, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = -\frac{1}{R} \cdot \frac{\sin \frac{\omega}{R}}{\cos \frac{\omega}{R} (1 + q \cos^2 \frac{\omega}{R})}, \quad \Gamma_{22}^2 = 0.$$

Используя формулу (3.5), будем вычислять гауссову кривизну поверхности вращения:

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \frac{\left(\frac{\partial\Gamma_{11}^1}{\partial t} - \frac{\partial\Gamma_{21}^1}{\partial\omega} + \Gamma_{21}^1 \cdot \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1 \cdot \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^1 \cdot \Gamma_{21}^1 - \Gamma_{12}^1 \cdot \Gamma_{21}^2\right) \cdot g_{12}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} + \\
 &+ \frac{\left(\frac{\partial\Gamma_{11}^2}{\partial t} - \frac{\partial\Gamma_{21}^2}{\partial\omega} + \Gamma_{21}^2 \cdot \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2 \cdot \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^2 \cdot \Gamma_{21}^1 - \Gamma_{12}^2 \cdot \Gamma_{21}^2\right) \cdot g_{22}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \\
 &= \frac{\left(\frac{\partial\Gamma_{11}^2}{\partial t} - \frac{\partial\Gamma_{21}^2}{\partial\omega} + \Gamma_{21}^2 \cdot \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2 \cdot \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^2 \cdot \Gamma_{21}^1 - \Gamma_{12}^2 \cdot \Gamma_{21}^2\right) \cdot g_{22}}{g_{11}g_{22}} = \\
 &= \frac{1}{g_{11}} \cdot \left(\frac{\partial\Gamma_{11}^2}{\partial t} - \frac{\partial\Gamma_{21}^2}{\partial\omega} + \Gamma_{21}^2 \cdot \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2 \cdot \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^2 \cdot \Gamma_{21}^1 - \Gamma_{12}^2 \cdot \Gamma_{21}^2\right) = \\
 &= \frac{(1 + q\cos^2\frac{\omega}{R})^2}{p} \cdot \left(\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial\omega} \cdot \left(\frac{\sin\frac{\omega}{R}}{\cos\frac{\omega}{R} (1 + q\cos^2\frac{\omega}{R})}\right) - \frac{1}{R^2} \cdot \frac{\sin^2\frac{\omega}{R}}{(1 + q\cos^2\frac{\omega}{R})^2} \left(q + \frac{1}{\cos\frac{\omega}{R}}\right)\right) = \\
 &= \frac{1}{pR^2} \left(\frac{\cos^2\frac{\omega}{R} + q\cos^2\frac{\omega}{R}}{\cos^2\frac{\omega}{R}}\right).
 \end{aligned}$$

Упрощая выражение, получаем:

$$K = \frac{1}{R^2} \cdot \frac{1+q}{p}. \quad (3.6)$$

Так как  $p$  и  $q$  — положительные константы, то гауссова кривизна (3.6) постоянная и положительна. Теорема доказана.

Рассмотрим поверхности вращения отрицательной постоянной гауссовой кривизны с метрикой

$$ds^2 = d\omega^2 + \operatorname{ch}^2 \frac{\omega}{R} dt^2$$

где  $R$  — радиус вращения и  $\omega \in [\omega_1, \omega_2], t \in [0, 2\pi)$ . Параметры  $\omega_1$  и  $\omega_2$  могут достигать значений  $\pm\infty$ .

**Теорема 3.4.** *Поверхности вращения отрицательной постоянной гауссовой кривизны допускают нетривиальное геодезическое отображение, а поверхности, полученные при этом отображении, обладают отрицательной постоянной гауссовой кривизной.*

Доказательство. Метрика поверхностей вращения отрицательной постоянной кривизны при геодезическом отображении имеет следующий вид:

$$d\bar{s}^2 = \frac{p}{(1 + q \operatorname{ch}^2 \frac{\omega}{R})^2} d\omega^2 + \frac{p \operatorname{ch}^2 \frac{\omega}{R}}{1 + q \operatorname{ch}^2 \frac{\omega}{R}} dt^2. \quad (3.7)$$

Находим для этой метрики:

$$g_{11} = \frac{p}{(1 + q \operatorname{ch}^2 \frac{\omega}{R})^2}, \quad g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22} = \frac{p \operatorname{ch}^2 \frac{\omega}{R}}{1 + q \operatorname{ch}^2 \frac{\omega}{R}},$$

символы Кристоффеля:

$$\Gamma_{11}^1 = -\frac{1}{R} \cdot \frac{q \operatorname{sh} \frac{2\omega}{R}}{1 + q \operatorname{ch}^2 \frac{\omega}{R}}, \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 0, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2R} \operatorname{sh} \frac{2\omega}{R};$$

$$\Gamma_{11}^2 = 0, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{R} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{\omega}{R}}{\operatorname{ch} \frac{\omega}{R} (1 + q \operatorname{ch}^2 \frac{\omega}{R})}, \quad \Gamma_{22}^2 = 0.$$

Теперь вычислим гауссову кривизну, используя формулу (3.5), как в доказательстве теоремы 3.3. Имеем:

$$K = -\frac{1}{R^2} \cdot \frac{1+q}{p}. \quad (3.8)$$

Так как  $p$  и  $q$  — положительные константы, то гауссова кривизна (3.8) постоянная и отрицательна. Теорема доказана.

**Замечание 3.3.** Если поверхности вращения нулевой гауссовой кривизны допускают нетривиальное геодезическое отображение, то образы при этом отображении имеют ненулевую гауссову кривизну, а если они допускают тривиальное геодезическое отображение, то имеют нулевую гауссову кривизну.

**Пример 3.1.** Пусть  $F$  — круговой конус в евклидовом пространстве  $R^3$ , который задан в декартовых координатах  $(x; y; z)$  уравнениями

$$x = \omega \cos t, \quad y = \omega \sin t, \quad z = \omega$$

где  $\omega \in (0, \omega_1]$ ,  $t \in [0, 2\pi)$ . Параметры  $\omega_1$  может достигать значений  $+\infty$ . Первая квадратичная форма круглого конуса  $F$  имеет следующий вид:

$$ds^2 = 2d\omega^2 + \omega^2 dt^2.$$

Круговой конус допускает нетривиальное геодезическое отображение, причём гауссова кривизна полученных поверхностей постоянна и ненулевая. Обозначим образ круглого конуса при геодезическом отображении через  $F_1$ , а гауссову кривизну  $K_{F_1}$ . Метрика имеет следующий вид:

$$d\bar{s}^2 = \frac{2p}{(1+q\omega^2)^2} d\omega^2 + \frac{p\omega^2}{1+q\omega^2} dt^2.$$

Находим для этой метрики символы Кристоффеля:

$$\Gamma_{11}^1 = -\frac{2q\omega}{1+q\omega^2}, \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 0, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{\omega}{2};$$

$$\Gamma_{11}^2 = 0, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{\omega(1+q\omega^2)}, \quad \Gamma_{22}^2 = 0.$$

Используя формулу (3.5), имеем  $K_{F_1} = \frac{q}{2p}$ .

**Пример 3.2.** Рассмотрим круговой цилиндр с метрикой

$$ds^2 = d\omega^2 + dt^2$$

где  $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$ ,  $t \in [0, 2\pi)$ . Параметры  $\omega_1$  и  $\omega_2$  могут достигать до значений  $\pm\infty$ . Круговой цилиндр допускает тривиальное геодезическое отображение, а полученные поверхности при этом отображении имеют нулевую гауссову кривизну. Обозначим гауссову кривизну кругового цилиндра при геодезическом отображении через  $K_0$ .

Метрика имеет следующий вид:

$$ds^2 = \frac{p}{(1+q)^2} d\omega^2 + \frac{p}{1+q} dt^2.$$

Символы Кристоффеля этой поверхности состоят из нулей, т.е.  $\Gamma_{ij}^k = 0$ , тогда гауссова кривизна  $K_0 = 0$ .

**Замечание 3.4.** Некоторые поверхности вращения непостоянной гауссовой кривизны также допускают нетривиальное геодезическое отображение, и полученные поверхности сохраняют знак своей гауссовой кривизны.

**Пример 3.3.** Рассмотрим параболоид вращения в евклидовом пространстве  $R^3$ , который задан в декартовых координатах  $(x; y; z)$  уравнениями

$$x = \omega \cos t, \quad y = \omega \sin t, \quad z = \omega^2$$

где  $\omega \in [\omega_1, \omega_2], t \in [0, 2\pi)$ . Параметры  $\omega_1$  и  $\omega_2$  могут достигать значений  $+\infty$ . Первая квадратичная форма параболоида вращения имеет следующий вид:

$$ds^2 = (1 + 4\omega^2)d\omega^2 + \omega^2 dt^2.$$

Параболоид вращения допускает нетривиальное геодезическое отображение. Метрика полученных поверхностей при этом отображении имеет следующий вид [14]:

$$d\tilde{s}^2 = \frac{p(1 + 4\omega^2)}{(1 + q\omega^2)^2} d\omega^2 + \frac{p\omega^2}{(1 + q\omega^2)} dt^2.$$

Символы Кристоффеля для этой метрики таковы:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{2\omega(2 - q - 2q\omega^2)}{(1 + 4\omega^2)(1 + q\omega^2)}, \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 0, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{\omega}{1 + 4\omega^2};$$

$$\Gamma_{11}^2 = 0, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{\omega(1 + q\omega^2)}, \quad \Gamma_{22}^2 = 0.$$

Следовательно,

$$K = \frac{1}{p} \cdot \frac{(4 + q + 8q\omega^2)}{(1 + 4\omega^2)^2}.$$

Видно, что значение  $K$  положительно для всех  $p$  и  $q$ .

## Список литературы

- [1] Синюков Н. Геодезические отображения римановых пространств. М.: Наука, 1979. – 245с.
- [2] Chud'а H., Mike's J., Sochor M. Rotary diffeomorphism onto manifolds with affine connections. *Geometry, Integrability and Quantization* 11, 2017, 130–137.
- [3] Hinterleitner I. On global geodesic mappings of ellipsoids. *AIP. Conf. Proc.* 1460, 2012, 180–184.
- [4] Синюкова Е.Н., Чепок О.Л. О геодезических отображениях в целом римановых пространств, удовлетворяющих некоторым условиям дифференциально-алгебраического характера // *Известия ПГПУ им. В.Г. Белинского*. 2011. № 26. С. 214–221.
- [5] Josef Mikeš, Elena Stepanova, Alena Vanžurová, *Differential Geometry of Special Mappings*. et al. First Edition Palacký University, Olomouc, 2015.
- [6] Abdullaaziz Artıkbayev, Abdullah Kurudirek, Hüseyin Akça. Occurrence of Galilean Geometry. *Applied and Computational Mathematics*. Vol. 2, No. 5, 2013, pp. 115-117. doi: 10.11648/j.acm.20130205.11
- [7] Ismoilov Sh., Sultanov B. Invariant Geometric Characteristics Under the Dual Mapping of an Isotropic Space. *Asia Pacific Journal of Mathematics*, 10(1), 20, 2023.
- [8] Sh. Ismoilov, B. Sultanov, B. Mamadaliyev, A. Kurudirek. Translation surfaces with non-zero constant total curvature in multidimensional isotropic space. *J. Appl. Math. Informatics* Vol. 43(2025), No. 1, pp. 191 – 203
- [9] Sharipov A., Keunimjaev M. Existence and uniqueness of polyhedra with given values of the conditional curvature, *International Electronic Journal of Geometry*, 2023, 16(1), pp.160-170.
- [10] Topvoldiyev F. Conditional external curvatures of irregular cones. *Bull. Inst. Math.*, 2023, Vol.6, No 3, pp. 34-41
- [11] Topvoldiyev F., Sharipov A. On Defects of Polyhedra Isometric on Section at Vertices, *AIP Conference Proceedings*, 2024, 3004(1), 030011.
- [12] John Oprea. *Differential Geometry and its applications*. The Mathematical Association of America, 2007.
- [13] Jean Gallier, Jocelyn Quaintance. *Differential Geometry and Lie Groups*. Springer Nature Switzerland AG 2020.
- [14] Lenka Ryparova. *Geodesics and their mappings*. Ph.D. thesis. 2020.

## ON PRESERVATION OF THE SIGN OF GAUSSIAN CURVATURE UNDER GEODETIC MAPPINGS

A. Sharipov, Z. Usmonxujayev

## Abstract

Geodesic mappings have important applications in Riemannian geometry, in the theory of geodesy and cartography, modeling, physics and mechanics. In this paper, the question of preserving the sign of Gaussian curvature under geodesic mappings is investigated. It is proved that if surfaces of revolution have constant Gaussian curvature, then under a nontrivial geodesic mapping the sign of Gaussian curvature is preserved.

## Keywords

smooth manifolds; affine connection; geodesic curve; geodesic mapping; non-trivial geodesic mapping; Gaussian curvature.

## Affiliations

Anvarjon Sharipov

**Address:** National University of Uzbekistan, Dept. of Geometry and Topology, Tashkent-Uzbekistan.

**e-mail:** asharipov@inbox.ru

**ORCID ID:**0000-0002-7019-4694

Zokirxuja Usmonxujayev

**Address:** National University of Uzbekistan, Dept. of Geometry and Topology, Tashkent-Uzbekistan.

**e-mail:** Zokusm@gmail.com

**ORCID ID:**0009-0001-3444-0878



# $p$ -Конвексификация симметричных пространств Банаха-Канторовича

Чилин В.И., Закирова Г.Б.\*

## Аннотация

Пусть  $B$  произвольная полная булева алгебра,  $Q(B)$  стоуновский компакт, соответствующий булевой алгебре  $B$ , и  $C_\infty(Q(B))$  алгебра всех непрерывных функций  $x : Q(B) \rightarrow [-\infty, +\infty]$ , определенных на  $Q(B)$  и принимающих значения  $\pm\infty$  лишь на нигде не плотных множествах из  $Q(B)$ . Пусть  $(E, \|\cdot\|_E) \subset C_\infty(Q(B))$  решеточно нормированное пространство над алгеброй  $L^0(\Omega)$  всех классов равных почти всюду действительных измеримых функций, заданных на измеримом пространстве  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  с  $\sigma$ -конечной числовой мерой  $\mu$ . В работе рассматривается  $p$ -конвексификация решеточно нормированных пространств и доказывается, что  $p$ -конвексификация  $(E^p, \|\cdot\|_{E^p})$  симметричного пространства Банаха-Канторовича  $(E, \|\cdot\|_E)$  над  $L^0(\Omega)$  является симметричным пространством Банаха-Канторовича над  $L^0(\Omega)$ . Устанавливается, что  $L^0(\Omega)$ -значная норма в пространстве  $(E^p, \|\cdot\|_{E^p})$  обладает свойством Фату или свойством порядковой непрерывности, в том случае, когда этим свойством обладает  $L^0(\Omega)$ -значная норма в пространстве  $(E, \|\cdot\|_E)$ .

*Ключевые слова:*  $p$ -конвексификация, мера Магарам, пространство Банаха-Канторовича, симметричные пространства.

*Предметная классификация AMS (2020):* Основная: 00A00 ; Дополнительная: 00B00; 00C00; 00D00; 00E00; 00F00.

## Введение

Одним из важных инструментов в изучении изоморфных свойств банаховых решеток играют понятия  $p$ -выпуклости и  $q$ -вогнутости этих решеток. В частности, эти понятия активно используются при изучении равномерной выпуклости банаховых решеток, а также при исследовании свойств симметричных функциональных пространств (см. например, [1]). В работе [1] дана общая процедура построения  $p$ -выпуклых и  $q$ -вогнутых решеток, отправляясь от произвольной банаховой решетки, а именно, для заданной банаховой решетки  $X$  определяется ее  $p$ -конвексификация  $X^p$ . В случае когда  $X$  является банаховой решеткой функций, множество  $X^p$  можно отождествить с пространством всех функций  $f$ , для которых  $|f|^p \in X$ , снабженным нормой  $\|f\|_{X^p} = \| |f|^p \|_X^{\frac{1}{p}}$ . Известно, что для банаховой решетки  $(X, \|\cdot\|_X)$  ее  $p$ -конвексификация  $(X^p, \|\cdot\|_{X^p})$  также является банаховой решеткой. Кроме того, такие свойства как порядковая непрерывность нормы и свойство Фату переходят от  $X$  к  $X^p$ .

Развитие теории пространств Банаха-Канторовича естественно предполагает введение и изучение свойств  $p$ -выпуклости и  $q$ -вогнутости этих пространств.

Пусть  $B$  произвольная полная булева алгебра и  $Q(B)$  стоуновский компакт, соответствующий булевой алгебре  $B$ . Обозначим через  $L^0(B)$  алгебру  $C_\infty(Q(B))$  всех непрерывных функций  $x : Q(B) \rightarrow [-\infty, +\infty]$ , определенных на  $Q(B)$  и принимающих значения  $\pm\infty$  лишь на нигде не плотных множествах из  $Q(B)$ .

Пусть  $(E, \|\cdot\|_E) \subset L^0(B)$  решеточно нормированное пространство над алгеброй  $L^0(\Omega)$  всех классов равных почти всюду действительных измеримых функций, заданных на измеримом пространстве  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  с  $\sigma$ -конечной числовой мерой  $\mu$ . В работе [7] была определена  $p$ -конвексификация решеточно нормированного пространства  $(E, \|\cdot\|_E)$  и было доказано, что, если  $(E, \|\cdot\|_E)$  является решеткой Банаха-Канторовича над  $L^0(\Omega)$ , то его  $p$ -конвексификация  $(E^p, \|\cdot\|_{E^p})$  также является решеткой Банаха-Канторовича над  $L^0(\Omega)$ . В настоящей работе продолжается изучение свойств  $p$ -конвексификации решеточно нормированных пространств над  $L^0(\Omega)$ . Доказывается, что если  $(E, \|\cdot\|_E)$  является симметричным пространством Банаха-Канторовича над  $L^0(\Omega)$ , тогда его  $p$ -конвексификация  $(E^p, \|\cdot\|_{E^p})$  также является симметричным пространством Банаха-Канторовича над  $L^0(\Omega)$ . Устанавливается, что  $L^0(\Omega)$ -норма в пространстве  $(E^p, \|\cdot\|_{E^p})$  обладает свойством Фату или свойством порядковой непрерывности, в том случае, когда этим свойством обладает  $L^0(\Omega)$ -норма в пространстве  $(E, \|\cdot\|_E)$ .

Используются терминология и обозначения теории булевых алгебр из [8], теории векторных решеток из [9], теории векторного интегрирования и теории пространств Банаха-Канторовича из [5], а также терминология общей теории банаховых решеток из [1], [10].

## 1. Предварительные сведения

Пусть  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  измеримое пространство с  $\sigma$ -конечной мерой,  $L^0(\Omega) = L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$  алгебра всех классов равных почти всюду действительных измеримых функций на  $(\Omega, \Sigma, \mu)$ . Относительно естественного частичного порядка  $f \leq g \Leftrightarrow g - f \geq 0$  почти всюду, алгебра  $L^0(\Omega)$  является порядково полной векторной решеткой ( $K$ -пространством) со слабой единицей  $\mathbf{1}(\omega) \equiv 1$ , а множество  $B(\Omega)$  всех идемпотентов из  $L^0(\Omega)$  образует полную булеву алгебру относительного частичного порядка, индуцируемого из  $L^0(\Omega)$ .

Пусть  $X$  векторное пространство над полем  $\mathbb{R}$  действительных чисел. Отображение  $\|\cdot\| : X \rightarrow L^0(\Omega)$  называют  $L^0(\Omega)$ -значной нормой на  $X$ , если для любых  $x, y \in X$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , верны обычные свойства нормы:  $\|x\| \geq 0$ ,  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ;  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ ;  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

Пара  $(X, \|\cdot\|)$  называется решеточно нормированным пространством (сокращенно, РНП) над  $L^0(\Omega)$ . РНП  $X$  над  $L^0(\Omega)$  называется разложимым ( $d$ -разложимым), если для любого  $x \in X$  и для любого разложения  $\|x\| = f_1 + f_2$  в сумму неотрицательных (соответственно дизъюнктивных) элементов  $f_1, f_2 \in L^0(\Omega)$  существуют  $x_1, x_2 \in X$  такие, что  $x = x_1 + x_2$  и  $\|x_k\| = f_k$ ,  $k = 1, 2$ .

Предположим, что  $X$  является векторной решеткой. Говорят, что  $L^0(\Omega)$ -значная норма  $\|\cdot\|$  на  $X$  монотонна, если из условий  $|x| \leq |y|$ ,  $x, y \in X$ , следует, что  $\|x\| \leq \|y\|$ . Если РНП  $(X, \|\cdot\|)$  одновременно является векторной решеткой и норма  $\|\cdot\|$  монотонна, то его называют решеточно нормированной векторной решеткой над  $L^0(\Omega)$ .

Говорят, что сеть  $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$   $(bo)$ -сходится к элементу  $x \in X$ , если сеть  $(\|x_\alpha - x\|)_{\alpha \in A}$   $(o)$ -сходится к нулю в решетке  $L^0(\Omega)$  (напомним, что  $(o)$ -сходимость сети из  $L^0(\Omega)$  равносильна ее сходимости почти всюду). Сеть  $(x_\alpha)_{\alpha \in A} \subset X$  называют  $(bo)$ -фундаментальной, если сеть  $(x_\alpha - x_\beta)_{(\alpha, \beta) \in A \times A}$   $(bo)$ -сходится к нулю. РНП называют  $(bo)$ -полным, если всякая  $(bo)$ -фундаментальная сеть в нем  $(bo)$ -сходится к элементу этого пространства.

Пространством Банаха-Канторовича (ПБК) над  $L^0(\Omega)$  называется  $(bo)$ -полное  $d$ -разложимое решеточно нормированное пространство над  $L^0(\Omega)$ . Если ПБК  $(X, \|\cdot\|)$  одновременно является векторной решеткой и норма  $\|\cdot\|$  монотонна, то его называют решеткой Банаха-Канторовича. Отметим, что в ПБК норма всегда разложима (см. [5],[?]).

Теория интегрирования для элементов расширенного  $K_\sigma$ -пространства по  $\sigma$ -аддитивной мере со значениями в  $(bo)$ -полном решеточно нормированном пространстве оказалась весьма эффективной для построения полезных

примеров пространств Банаха-Канторовича. Напомним основные понятия, относящиеся к теории векторного интегрирования (см. [5],[3]).

Пусть  $B$  произвольная полная булева алгебра. Отображение  $m : B \rightarrow L^0(\Omega)$  называется  $L^0(\Omega)$ -значной мерой на  $B$ , если оно удовлетворяет следующим условиям:  $m(e) \geq 0$  для всех  $e \in B$ ;  $m(e \vee g) = m(e) + m(g)$ , для каждой пары дизъюнктивных элементов  $e, g \in B$ ;  $m(e_\alpha) \downarrow 0$  для любой сети  $e_\alpha \downarrow 0$ ,  $\{e_\alpha\} \subset B$ .

Говорят, что мера  $m$  строго положительна, если из условия  $m(e) = 0$  следует, что  $e = 0$ . Строго положительная  $L^0(\Omega)$ -значная мера  $m$  называется разложимой, если для любых  $e \in B$  и разложения  $m(e) = f_1 + f_2$ , в сумму неотрицательных элементов  $f_1, f_2 \in L^0(\Omega)$  существуют такие  $e_1, e_2 \in B$ , что  $e = e_1 \vee e_2$ , и  $m(e_i) = f_i$ ,  $i = 1, 2$ . Мера  $m$  разложима в том и только в том случае, когда она является мерой Магарам, т.е. мера  $m$  строго положительна и для любых  $e \in B$ ,  $0 \leq f \leq m(e)$ ,  $f \in L^0(\Omega)$ , существует такое  $q \in B$ ,  $q \leq e$ , что  $m(q) = f$  [11].

Следующее утверждение показывает, что в случае меры Магарам  $m$  существует естественное вложение булевой алгебры  $B(\Omega)$  в булеву алгебру  $B$ .

**Предложение 1.1.** [12, Proposition 3.2] Пусть  $m$  –  $L^0(\Omega)$ -значная мера Магарам на полной булевой алгебре  $B$ . Тогда существует единственный инъективный булев гомоморфизм  $\varphi : B(\Omega) \rightarrow B$ , такой, что  $\varphi(B(\Omega))$  является правильной подалгеброй в  $B$ , и  $m(\varphi(q)e) = qm(e)$  для всех  $q \in B(\Omega)$ ,  $e \in B$ .

Пусть  $Q(B)$  стоуновский компакт, соответствующий полной булевой алгебре  $B$ , и пусть  $L^0(B) := C_\infty(Q(B))$  алгебра всех непрерывных функций  $x : Q(B) \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ , принимающих значения  $\pm\infty$  лишь на нигде не плотных множествах из  $Q(B)$ . Через  $C(Q(B))$  обозначается банахова алгебра всех непрерывных действительных функций на  $Q(B)$  с равномерной нормой  $\|x\|_\infty = \sup_{t \in Q(B)} |x(t)|$ .

Отождествляя  $B$  с полной булевой алгеброй всех идемпотентов из  $L^0(B)$ , считаем, что  $B \subset L^0(B)$ . Согласно Предложению 1.1 для меры Магарам  $m : B \rightarrow L^0(\Omega)$  существуют правильная булева подалгебра  $\nabla(m)$  в  $B$  и булев изоморфизм  $\varphi$  из  $B(\Omega)$  на  $\nabla(m)$  такие, что  $m(\varphi(q)e) = qm(e)$  для всех  $q \in B(\Omega)$ ,  $e \in B$ . Продолжая  $\varphi$  по линейности и непрерывности, получим действие  $\varphi : L^0(\Omega) \rightarrow L^0(B)$ , при этом, алгебра  $L^0(\Omega)$  отождествляется с алгеброй  $L^0(\nabla(m)) = C_\infty(Q(\nabla(m)))$ , которую можно рассматривать как подалгебру и как правильную векторную подрешетку в  $L^0(B)$  (это означает, что точные верхние и нижние границы для ограниченных подмножеств из  $L^0(\nabla(m))$  совпадают в  $L^0(B)$  и в  $L^0(\nabla(m))$ ).

Обозначим через  $N$  множество всех натуральных чисел, и для каждого элемента  $x \in L^0(B)$  определим его носитель  $s(x) := \sup_{n \in N} \{|x| > n^{-1}\}$ , где  $\{|x| > \lambda\} \in B$  есть характеристическая функция  $\chi_{E_\lambda}$  множества  $E_\lambda$ , являющегося замыканием в  $Q(B)$  множества  $\{t \in Q(B) : |x(t)| > \lambda\}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

В настоящей работе рассматривается интеграл от элементов  $K$ -пространства, определенный в работе [5]. В качестве расширенного  $K$ -пространства берется алгебра  $L^0(B)$ . Рассмотрим в  $L^0(B)$  векторную подрешетку  $S(B)$  всех простых элементов  $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ , где  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ,  $e_i \in B$ ,  $e_i \cdot e_j = 0$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ . Пусть  $m$  –  $L^0(\Omega)$ -значная мера на  $B$ . Если  $x \in S(B)$ , то полагаем по определению

$$I_m(x) := \int x dm := \sum_{i=1}^n \alpha_i m(e_i).$$

Как было показано в работе [5], интеграл  $I_m$  продолжается на пространство  $m$ -интегрируемых элементов  $\mathcal{L}^1(B, m)$ . Отождествив эквивалентные элементы из  $\mathcal{L}^1(B, m)$ , получим  $K_\sigma$ -пространство  $L^1(B, m)$ . Для каждого  $x \in L^1(B, m)$  (запись  $x \in L^1(B, m)$  означает, что рассматривается класс эквивалентности с представителем  $x$ ) формула

$$\|x\|_{1,m} := \int |x| dm$$

определяет  $L^0(\Omega)$ -значную норму, т.е.  $(L^1(B, m), \|x\|_{1,m})$  есть решеточно нормированное пространство над  $L^0(\Omega)$  [5, 6.1.3]. При этом, в случае, когда  $m : B \rightarrow L^0(\Omega)$  есть мера Магарам, пара  $(L^1(B, m), \|x\|_{1,m})$

является пространством Банаха-Канторовича над  $L^0(\Omega)$ , для которого выполняются следующие соотношения  $L^0(\nabla(m)) \cdot L^1(B, m) \subset L^1(B, m)$ ,  $\int(\varphi(\alpha)x)dm = \alpha \int xdm$ ,  $|\int(\varphi(\alpha)x)dm| \leq |\alpha| \int |x|dm$  для всех  $x \in L^1(B, m)$ ,  $\alpha \in L^0(\Omega)$  [5, теорема 6.1.10].

Для каждого  $p \geq 1$  положим

$$L^p(B, m) = \{x \in L^0(B) : |x|^p \in L^1(B, m)\},$$

$$\|x\|_{p,m} := \left[ \int |x|^p dm \right]^{\frac{1}{p}}, \quad x \in L^p(B, m).$$

Известно, что для меры Магарам  $m$  пара  $(L^p(B, m), \|x\|_{p,m})$  является пространством Банаха-Канторовича [3]. Кроме того,

$$\varphi(\alpha)x \in L^p(B, m) \quad \forall x \in L^p(B, m), \alpha \in L^0(\Omega), 1 \leq p < \infty,$$

и  $\|\varphi(\alpha)x\|_{p,m} = |\alpha| \|x\|_{p,m}$ .

Пусть  $(X, \|\cdot\|_X)$  решеточно нормированное пространство над  $L^0(\Omega)$ . Линейный оператор  $T : X \rightarrow L^0(\Omega)$  называется  $L^0(\Omega)$ -ограниченным, если существует такой элемент  $\alpha \in L^0(\Omega)_+$ , что  $|T(x)| \leq \alpha \|x\|_X$  для всех  $x \in X$ . Через  $X^* := L_b(X, L^0(\Omega))$  обозначим множество всех  $L^0(\Omega)$ -ограниченных операторов из  $X$  в  $L^0(\Omega)$ . Для всякого  $L^0(\Omega)$ -ограниченного оператора  $T$  определен элемент

$$\|T\|_{X^*} = \inf\{\alpha \in L^0(\Omega)_+ : |T(x)| \leq \alpha \|x\|_X, x \in X\}.$$

Отображение  $T \mapsto \|T\|_{X^*}$  является  $L^0(\Omega)$ -значной нормой в  $X^*$ , при этом  $|T(x)| \leq \|T\|_{X^*} \|x\|_X$  для всех  $x \in X$  ([5, 2.2.4]). Кроме, того верно следующее равенство:

$$\|T\|_{X^*} = \sup\{|T(x)| : x \in B_X\},$$

где  $B_X = \{x \in X : \|x\|_X \leq 1\}$  – единичный шар в  $(X, \|\cdot\|_X)$ .

Для  $T, S \in X^*$  положим  $(T + S)(x) = T(x) + S(x)$ ,  $(\lambda T)(x) = \lambda T(x)$ , где  $x \in X, \lambda \in \mathbb{R}$ . Ясно, что  $T + S, \lambda T \in X^*$ , и относительно введенных алгебраических операций  $X^*$  является векторным пространством над полем  $\mathbb{R}$ . Более того,  $X^*$  рассматриваемое с  $L^0(\Omega)$ -значной нормой  $\|T\|_{X^*}, T \in X^*$ , является пространством Банаха-Канторовича над  $L^0(\Omega)$  ([5, 2.2.4 (3))). ПБК  $(X^*, \|\cdot\|_{X^*})$  называется  $L^0(\Omega)$ -сопряженным пространством к РНП  $(X, \|\cdot\|_X)$ .

Пусть  $(X, \|\cdot\|_X)$  и  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  решеточно нормированные пространства над  $L^0(\Omega)$ . Линейный оператор  $\iota : X \rightarrow Y$  называется изометрическим вложением, если  $\|\iota(x)\|_Y = \|x\|_X$  для всех  $x \in X$ . Если  $\iota(X) = Y$ , то изометрическое вложение  $\iota$  называют линейной изометрией. Будем говорить, что РНП  $X$  и  $Y$  линейно изометричны, если существует линейная изометрия из  $X$  на  $Y$ .

Пусть  $(X, \|\cdot\|_X)$  есть РНП над  $L^0(\Omega)$  и  $(X^*, \|\cdot\|_{X^*})$  его  $L^0(\Omega)$ -сопряженное пространство. Для произвольных  $x \in X, T \in X^*$  положим  $p_T(x) = |T(x)|$ . Ясно, что  $p_T(\lambda x) = |\lambda| p_T(x), \lambda \in \mathbb{R}$ , и  $p_T(x + y) \leq p_T(x) + p_T(y), x, y \in X$ . В этом случае говорят, что  $p_T : X \rightarrow L^0(\Omega)$  есть  $L^0(\Omega)$ -значная полунорма на  $X$ .

Будем говорить, что последовательность  $\{x_n\}$  из  $X$   $\sigma(X, X^*)$ -сходится к  $x \in X$ , если  $p_T(x_n - x) = |T(x_n - x)|$   $(o)$ -сходится к нулю в решетке  $L^0(\Omega)$  для всех  $T \in X^*$ , т.е. последовательность  $\{T(x_n)\}$   $(o)$ -сходится к  $T(x)$  для всех  $T \in X^*$ .

Рассмотрим второе  $L^0(\Omega)$ -сопряженное пространство  $X^{**} = (X^*)^*$  для решеточно нормированного пространства  $X$  над  $L^0(\Omega)$ . Для любого  $x \in X$  положим  $\varphi_x(T) = T(x), T \in X^*$ . Отображение  $\varphi_x : X^* \rightarrow L^0(\Omega)$  является  $L^0(\Omega)$ -линейным  $L^0(\Omega)$ -ограниченным оператором на  $X^*$  и  $\|\varphi_x\|_{X^{**}} = \|x\|_X$ , т.е. каноническое вложение  $\iota : X \rightarrow X^{**}$  является линейным изометрическим вложением (см.[5, 2.2.5]).

Будем говорить, что пространство Банаха-Канторовича  $(X, \|\cdot\|_X)$  над  $L^0(\Omega)$  рефлексивно, если  $X$  и  $X^{**}$  совпадают, точнее  $\iota(X) = X^{**}$ .

## 2. Порядковая непрерывность $L^0(\Omega)$ -значной нормы.

В этом разделе рассматриваются порядковые свойства  $L^0(\Omega)$ -значной нормы в решетке Банаха-Канторовича. Используя свойства дизъюнктивных последовательностей, устанавливаются несколько характеристик для порядковой непрерывности  $L^0(\Omega)$ -значной нормы решетки Банаха-Канторовича.

Пусть  $L^0(\Omega)_{++}$  множество всех тех  $0 \leq \lambda \in L^0(\Omega)$ , для которых носитель  $s(\lambda) := \sup_{n \geq 1} \{|\lambda| > n^{-1}\} = \mathbf{1}$ . Ясно, что для каждого  $\lambda \in L^0(\Omega)_{++}$  существует  $\lambda^{-1} \in L^0(\Omega)_{++}$  такой, что  $\lambda \cdot \lambda^{-1} = \mathbf{1}$ .

Пусть  $(X, \|\cdot\|_X)$  решеточно нормированная решетка над  $L^0(\Omega)$ . Говорят, что  $L^0(\Omega)$ -значная норма  $\|\cdot\|_X$  порядково непрерывна, если для любой последовательности  $(x_n) \subset X$  из  $x_n \downarrow \mathbf{0}$  следует  $\|x_n\|_X \downarrow \mathbf{0}$ . Ясно, что в этом случае, для любой последовательности  $(x_n) \subset X$ , для которой  $x_n \uparrow x \in X$ , имеем, что  $\|x - x_n\|_X \downarrow \mathbf{0}$ .

Говорят, что  $(X, \|\cdot\|_X)$  имеет свойство Фату, если для любой возрастающей последовательности  $\{x_n\}$  положительных элементов из  $X$ , для которой  $\|x_n\|_X \leq \lambda$  при всех  $n \in N$  и некотором  $0 \leq \lambda \in L^0(\Omega)$ , существует такое  $0 \leq x \in X$ , для которого  $x_n \uparrow x$  и  $\sup_{n \in N} \|x_n\|_X = \|x\|_X$ .

Верна следующая характеристика порядковой непрерывности  $L^0(\Omega)$ -значной нормы в решетке Банаха-Канторовича над  $L^0(\Omega)$ .

**Теорема 2.1.** . Следующие условия эквивалентны для решетки Банаха-Канторовича  $(X, \|\cdot\|_X)$  над  $L^0(\Omega)$ :

- (1).  $X$  есть порядково полная векторная решетка и  $L^0(\Omega)$ -значная норма в пространстве  $(X, \|\cdot\|_X)$  порядково непрерывна.
- (2). Каждая порядково ограниченная дизъюнктивная последовательность положительных элементов из  $X$  (bo)-сходится к нулю.
- (3).  $\{T_n\} \sigma(X, X^*)$ -сходится к  $\mathbf{0}$  при  $n \rightarrow \infty$  для каждой положительной дизъюнктивной последовательности  $\{T_n\} \subset B_{X^*}$ , где  $B_{X^*}$  – единичный шар в сопряженном пространстве  $(X^*, \|\cdot\|_{X^*})$ .

Доказательство. Эквивалентность условий (1) and (2) доказана в работе [13, Следствие 3.7].

(2)  $\Leftrightarrow$  (3). Пусть  $0 \leq x \in X$ ,  $A = [-x, x]$  and  $B = B_{X^*}$ . Положим

$$p_B(y) := \sup\{|T(y)| : T \in B\} \quad (y \in A);$$

$$p_A(T) := \sup\{|T(y)| : y \in A\} \quad (T \in B).$$

Поскольку каноническое вложение  $\iota : X \rightarrow X^{**}$  является линейным изометрическим вложением, то отсюда вытекает  $p_B(y) = \|\iota(y)\|_{X^{**}} = \|y\|_X$ .

Теперь эквивалентность условий (2) and (3) следует из эквивалентности следующих утверждений:

- (a). Последовательность  $p_A(T_n)$  (o)-сходится к нулю в  $L^0(\Omega)$  при  $n \rightarrow \infty$ , для каждой положительной дизъюнктивной последовательности  $\{T_n\} \subset B$ .
- (b). Последовательность  $p_B(x_n)$  (o)-сходится к нулю в  $L^0(\Omega)$  при  $n \rightarrow \infty$ , для каждой положительной дизъюнктивной последовательности  $\{x_n\} \subset A$ .

▷

В следующей теореме дана характеристика порядковой непрерывности  $L^0(\Omega)$ -значной нормы в  $L^0(\Omega)$ -сопряженном пространстве  $(X^*, \|\cdot\|_{X^*})$ .

**Теорема 2.2.** Пусть  $(X, \|\cdot\|_X)$  решетка Банаха-Канторовича над  $L^0(\Omega)$ . Следующие условия эквивалентны:

- (1).  $L^0(\Omega)$ -значная норма в  $(X^*, \|\cdot\|_{X^*})$  порядково непрерывна.
- (2).  $\{x_n\} \sigma(X, X^*)$ -сходится к  $\mathbf{0}$  при  $n \rightarrow \infty$  для каждой положительной дизъюнктивной последовательности  $\{x_n\} \subset B_X$ .

Доказательство . (1)  $\Rightarrow$  (2). Поскольку  $L^0(\Omega)$  является  $K$ -пространством, то множество  $X^* = L_b(X, L^0(\Omega))$  всех  $L^0(\Omega)$ -ограниченных операторов из  $X$  в  $L^0(\Omega)$ , упорядоченное конусом положительных операторов  $X^*_+$ ,

является  $K$ -пространством (см. [5, Теорема 3.1.2]). В частности, каноническое вложение  $\iota : X \rightarrow X^{**}$  является решеточным изоморфизмом, и  $X = \iota(X) \subset X^{**}$  есть подрешетка в  $X^{**}$ . Теперь, справедливость импликации (1)  $\Rightarrow$  (2) вытекает из теоремы 2.1.

(2)  $\Rightarrow$  (1). Пусть  $T \in X_+^*$ ,  $A = B_X$  и  $B = [-T, T]$ . Поскольку любая дизъюнктная последовательность  $\{x_n\} \subset A$  ( $o$ )-сходится к нулю в  $X$ , то последовательность  $p_T(x_n) = T(|x_n|)$  ( $o$ )-сходится к нулю в  $L^0(\Omega)$  при  $n \rightarrow \infty$  для каждой дизъюнктной последовательности  $\{x_n\} \subset A$ . Кроме того, для всех последовательностей  $\{T_n\} \subset B$  имеем

$$p_A(T_n) = \sup\{|T_n(y)| : y \in A\} = \|T_n\|_{X^*}.$$

Следовательно, из эквивалентности импликаций (2)  $\Leftrightarrow$  (3) о дизъюнктных последовательностях (см. доказательство теоремы 2.1) получим, что последовательность  $\|T_n\|_{X^*}$  ( $o$ )-сходится к нулю в  $L^0(\Omega)$  при  $n \rightarrow \infty$  для каждой положительной дизъюнктной последовательности  $\{T_n\} \subset B$ . Опять используя теорему 2.1, получим, что  $L^0(\Omega)$ -значная норма в  $(X^*, \|\cdot\|_{X^*})$  порядково непрерывна.  $\triangleright$

### 3. $p$ -Конвексификация пространств Банаха-Канторовича над кольцом измеримых функций.

Пусть  $m$  —  $L^0(\Omega)$ -значная мера Магарам на полной булевой алгебре  $B$ . Всюду в дальнейшем, предполагается, что  $m(\mathbf{1}_B) = \mathbf{1}_{B(\Omega)}$ .

Пусть  $E$  — ненулевой  $L^0(\nabla(m))$ -подмодуль в  $L^0(B)$ , и пусть  $\|\cdot\|_E$  есть  $L^0(\Omega)$ -значная норма на  $E$ , наделяющая  $E$  структурой решеточно нормированного пространства над  $L^0(\Omega)$ . Пусть  $0 < p, q < \infty$ . РНП  $E$  называется  $p$ -выпуклым (соответственно  $q$ -вогнутым), если существует такое число  $M > 0$ , что для любого конечного набора  $\{x_k\}_{k=1}^n \subset E$  верно неравенство

$$\left\| \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} \right\|_E \leq M \left( \sum_{k=1}^n \|x_k\|_E^p \right)^{1/p}, \quad (3.1)$$

(соответственно,

$$\left( \sum_{k=1}^n \|x_k\|_E^q \right)^{1/q} \leq M \left\| \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^q \right)^{1/q} \right\|_E. \quad (3.2)$$

Наименьшее число  $M > 0$ , удовлетворяющее неравенству (3.1) (соответственно (3.2)), называется константой  $p$ -выпуклости (соответственно,  $q$ -вогнутости) РНП  $E$  и обозначается через  $M^{(p)}(E)$  (соответственно,  $M_{(q)}(E)$ ). Ясно, что РНП  $E$  над  $L^0(\Omega)$  является 1-выпуклым с константой 1-выпуклости равной 1. Если  $E = L^p(B, m)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , то для любого конечного набора  $\{x_k\}_{k=1}^n \subset L^p(B, m)$  верно равенство

$$\left\| \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} \right\|_{p,m} = \left( \sum_{k=1}^n \|x_k\|_{p,m}^p \right)^{1/p}.$$

Следовательно,  $L^p(B, m)$  является  $p$ -выпуклым и  $p$ -вогнутым РНП, при этом

$$M^{(p)}(L^p(B, m)) = M_{(p)}(L^p(B, m)) = 1.$$

Для РНП  $E$  и  $1 \leq p < \infty$  рассмотрим множество  $E^{(p)} = \{x \in L^0(B) : |x|^p \in E\}$ , и для  $x \in E^{(p)}$  положим  $\|x\|_{E^{(p)}} = \left\| |x|^p \right\|_E^{1/p}$ .

Ясно, что в случае  $E = (L^1(B, m), \|\cdot\|_{L^1(B, m)})$  верны равенства

$$L^1(B, m)^{(p)} = L^p(B, m) := \{x \in L^0(B) : |x|^p \in L^1(B, m)\},$$

$$\|x\|_{L^1(B,m)^{(p)}} = \| |x|^p \|_{1,m}^{\frac{1}{p}} = \|x\|_{p,m}.$$

Известно, что  $(E^{(p)}, \|\cdot\|_{E^{(p)}})$  является решеточно нормированным пространством над  $L^0(\Omega)$  и оно называется *p*-конвексификацией решеточно нормированного пространства  $(E, \|\cdot\|_E)$  (см. [7]). *p*-Конвексификация  $E^{(p)}$  решеточно нормированного пространства  $E$  является *p*-выпуклым РНП с константой выпуклости равной 1, т.е.  $M^{(p)}(E^{(p)}) = 1$ . Верна следующая

**Теорема 3.1.** [7, Теорема 3.7]. *Если  $(E, \|\cdot\|_E)$  является решеткой Банаха-Канторовича над  $L^0(\Omega)$ , то ее *p*-конвексификация  $(E^{(p)}, \|\cdot\|_{E^{(p)}})$  также является решеткой Банаха-Канторовича над  $L^0(\Omega)$ .*

Следующее предложение устанавливает некоторые свойства, которые переходят от  $E$  к  $E^{(p)}$ .

**Предложение 3.1.** . Пусть  $(E, \|\cdot\|_E)$  решеточно нормированная решетка над  $L^0(\Omega)$  и  $p \geq 1$ .

(i). *Если  $L^0(\Omega)$ -значная норма в  $(E, \|\cdot\|_E)$  порядково непрерывна, то  $L^0(\Omega)$ -значная норма в  $(E^{(p)}, \|\cdot\|_{E^{(p)}})$  также порядково непрерывна.*

(ii). *Если  $(E, \|\cdot\|_E)$  имеет свойство Фату, то  $(E^{(p)}, \|\cdot\|_{E^{(p)}})$  также имеет свойство Фату.*

Доказательство. (i). Пусть  $\{x_n\} \subset (E^{(p)}, \|\cdot\|_{E^{(p)}})$  и  $x_n \downarrow \mathbf{0}$ . Поскольку  $\mathbf{0} \leq x_n \in E^{(p)}$ , то из этого следует, что  $x_n^p \in E$  для всех  $n$ , и, используя сходимость  $x_n^p \downarrow \mathbf{0}$ , мы получаем, что  $\|x_n^p\|_E \downarrow \mathbf{0}$ . Следовательно,  $\|x_n\|_{E^{(p)}}^p = \|x_n^p\|_E \downarrow \mathbf{0}$ , и поэтому  $\|x_n\|_{E^{(p)}} = \|x_n^p\|_E^{1/p} \downarrow \mathbf{0}$ .

(ii). Пусть  $\{x_n\} \subset (E^{(p)}, \|\cdot\|_{E^{(p)}})$ . Чтобы показать, что  $(E^{(p)}, \|\cdot\|_{E^{(p)}})$  имеет свойство Фату, предположим, что  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  является такой последовательностью из  $E^{(p)}$ , что  $0 \leq x_n \uparrow$  и  $\|x_n\|_{E^{(p)}} < \lambda$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ , где  $\lambda \in L^0(\Omega)_{++}$ . Тогда  $0 \leq x_n^p \uparrow$  и  $\|x_n^p\|_E = \|x_n\|_{E^{(p)}}^p < \lambda^p$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ . Следовательно, согласно свойству Фату для  $(E, \|\cdot\|_E)$ , существует такой элемент  $y \in E$ , что  $x_n^p \uparrow y$  и  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n^p\|_E = \|y\|_E$ . Положим  $x = y^{1/p}$ . Тогда  $x \in E^{(p)}$  и  $x_n \uparrow y^{1/p} = x$ . Кроме того,  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|_{E^{(p)}} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n^p\|_E^{1/p} = \|y\|_E^{1/p} = \|x^p\|_E^{1/p} = \|x\|_{E^{(p)}} \triangleright$

Если  $(E, \|\cdot\|_E)$  является решеткой Банаха-Канторовича над  $L^0(\Omega)$ , то  $(E^{(p)}, \|\cdot\|_{E^{(p)}})$  также является решеткой Банаха-Канторовича над  $L^0(\Omega)$  (Теорема 2.1), и следовательно,  $L^0(\Omega)$ -сопряженное  $(E^{(p)})^*$  является решеткой Банаха-Канторовича над  $L^0(\Omega)$ . Верно следующее

**Предложение 3.2.** . *Если  $(E, \|\cdot\|_E)$  есть решетка Банаха-Канторовича над  $L^0(\Omega)$  и  $p > 1$ , то  $L^0(\Omega)$ -значная норма в  $(E^{(p)})^*$  порядково непрерывна.*

Доказательство . Пусть  $\{x_n\}$  произвольная дизъюнктивная последовательность положительных элементов в замкнутом единичном шаре пространства  $E^{(p)}$ . Согласно теореме 2.2, мы должны показать, что последовательность  $T(x_n)$  (*o*)-сходится к нулю в  $L^0(\Omega)$  для всех  $T \in (E^{(p)})^*$ . Предположим, что существует такой оператор  $0 \leq T \in (E^{(p)})^*$ , что последовательность  $T(x_n)$  не является (*o*)-сходящейся к нулю в  $L^0(\Omega)$ . Это означает, что последовательность  $T(x_n)$  не сходится к нулю почти всюду при  $n \rightarrow \infty$ . Следовательно, переходя если нужно к подпоследовательности, найдутся такие  $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$  и  $\mathbf{0} \neq e \in B(\Omega)$ , что  $eT(x_n) \geq \varepsilon e$  для всех  $n$ . Поскольку  $\{x_n\}$  является дизъюнктивной последовательностью, то верно равенство

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k^p\right)^{1/p} = \sum_{k=1}^n x_k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Как было отмечено выше, пространство  $E^{(p)}$  является *p*-выпуклым с константой выпуклости равной 1. Следовательно,

$$n\varepsilon e \leq \sum_{k=1}^n T(x_k)e = eT\left(\sum_{k=1}^n x_k\right) = eT\left[\left(\sum_{k=1}^n x_k^p\right)^{1/p}\right] \leq e\left\|\left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p}\right\|_{E^{(p)}} \|T\|_{(E^{(p)})^*}$$

$$\leq e \left( \sum_{k=1}^n \|x_k\|_{E^{(p)}}^p \right)^{1/p} \|T\|_{(E^{(p)})^*} \leq n^{1/p} e \|T\|_{(E^{(p)})^*}$$

для всех  $n = 1, 2, \dots$ , что невозможно. Следовательно последовательность  $T(x_n)$  ( $o$ )-сходится к нулю в  $L^0(\Omega)$  для всех  $T \in (E^{(p)})^*$ , и в силу теоремы 2.2,  $L^0(\Omega)$ -значная норма в  $(E^{(p)})^*$  порядково непрерывна.  $\triangleright$

Дадим теперь определение симметричных пространств Банаха-Канторовича над  $L^0(\Omega)$  (см. [14], [15]).

Два положительных элемента  $x$  и  $y$  из  $L^0(B)$  называются  $m$ -равноизмеримыми, если  $m\{x > h\} = m\{y > h\}$  для любого  $h \in L^0(\Omega)_{++}$ , где  $\{x > h\} \in B$  есть характеристическая функция замыкания открытого множества  $\{s \in Q(B) : x(s) > h(s)\}$ .

Пусть  $(E, \|\cdot\|_E) \subset L^0(B)$  – решетка Банаха-Канторовича над  $L^0(\Omega)$  со свойством идеальности, т.е. для  $x \in L^0(B)$  и  $y \in E$ , из  $|x| \leq |y|$  следует, что  $x \in E$ . Говорят, что  $E$  есть симметричное пространство Банаха-Канторовича над  $L^0(\Omega)$ , если из  $m$ -равноизмеримости элементов  $x$  и  $y$ , где  $0 \leq x \in L^0(B)$ ,  $0 \leq y \in E$ , следует, что  $x \in E$  и  $\|x\|_E = \|y\|_E$ .

Примерами симметричных пространств Банаха-Канторовича являются пространства  $(L^p(B, m), \|\cdot\|_{p,m})$ ,  $1 \leq p < \infty$ , and  $(L^\infty(B, L^0(\Omega)), \|\cdot\|_{\infty, L^0(\Omega)})$  [14, Theorem 4], где  $L^\infty(B, L^0(\Omega)) = \{x \in L^0(B) : |x| \leq f \text{ для некоторого } f \in L^0(\Omega)_+\}$  пространство Банаха-Канторовича с  $L^0(\Omega)$ -значной нормой

$$\|x\|_{\infty, L^0(\Omega)} = \inf\{f \in L^0(\Omega)_+ : |x| \leq f\}, \quad x \in L^\infty(B, L^0(\Omega)).$$

Следующая теорема есть версия теоремы 3.1 для симметричных пространств Банаха-Канторовича над  $L^0(\Omega)$ .

**Теорема 3.2.** . Если  $(E, \|\cdot\|_E)$  является симметричным пространством Банаха-Канторовича над  $L^0(\Omega)$ , то его  $p$ -конвексификация  $(E^{(p)}, \|\cdot\|_{E^{(p)}})$  также является симметричным пространством Банаха-Канторовича над  $L^0(\Omega)$ .

Доказательство. Согласно теореме 2.1,  $(E^{(p)}, \|\cdot\|_{E^{(p)}})$  является решеткой Банаха-Канторовича над  $L^0(\Omega)$ . Кроме того, если  $|x| \leq |y|$ ,  $x \in L^0(B)$  и  $y \in E^{(p)}$ , то из неравенства  $|x|^p \leq |y|^p \in E$ , следует, что  $|x|^p \in E$ , т.е.  $x \in E^{(p)}$ . Это означает, что  $E^{(p)}$  имеет свойство идеальности.

Пусть теперь  $0 \leq x \in L^0(B)$ ,  $0 \leq y \in E^{(p)}$ ,  $x$  и  $y$  –  $m$ -равноизмеримы. Тогда для любого  $h \in L^0(\Omega)_{++}$ , имеем

$$m\{y^p > h\} = m\{y > h^{1/p}\} = m\{x > h^{1/p}\} = m\{x^p > h\}.$$

Это означает, что элементы  $x^p$  и  $y^p$  –  $m$ -равноизмеримы, при этом  $y^p \in E$  и  $x^p \in L^0(B)$ . Следовательно,  $x^p \in E$  и  $\|x^p\|_E = \|y^p\|_E$ . Отсюда, заключаем, что  $x \in E^{(p)}$  и

$$\|x\|_{E^{(p)}} = \|x^p\|_E^{\frac{1}{p}} = \|y^p\|_E^{\frac{1}{p}} = \|y\|_{E^{(p)}}.$$

Следовательно,  $(E^{(p)}, \|\cdot\|_{E^{(p)}})$  является симметричным пространством Банаха-Канторовича над  $L^0(\Omega)$ .  $\triangleright$

### Заключение

В работе вводятся понятия  $p$ -выпуклости и  $q$ -вогнутости в решеточно нормированных решетках  $(E, \|\cdot\|_E)$  над кольцом измеримых функций и рассматриваются свойства связанные с этими понятиями. Доказывается, что  $p$ -конвексификация  $(E^p, \|\cdot\|_{E^p})$  симметричного пространства Банаха-Канторовича  $(E, \|\cdot\|_E)$  также является симметричным пространством Банаха-Канторовича. Устанавливается, что свойство Фату и свойство порядковой непрерывности также переходят от  $(E, \|\cdot\|_E)$  к  $(E^p, \|\cdot\|_{E^p})$ .

### Список литературы

- [1] Lindenstrauss J., Tzafriri L. *Classical Banach Spaces II*. Springer-Verlag, Berlin, 243 p. (1979).

- [2] Канторович Л.В. *Об одном классе функциональных уравнений*, Докл. Акад. Наук СССР. **5(4)**. p. 211–216. (1936).
- [3] Кусраев А.Г., *Векторная двойственность и ее приложения*. - Новосибирск: Наука. 256 с. (1985).
- [4] Гутман А.Е. *Банаховы расслоения в теории решеточно нормированных пространств. Линейные операторы, согласованные с порядком*. - Новосибирск: изд-во ИМ СО РАН, С. 63 – 211. (1995).
- [5] Кусраев А.Г., *Мажорируемые операторы*. - М.: Наука. 619 с. (2003).
- [6] Кусраев А.Г., Кутателадзе С.С. *Введение в булевозначный анализ*. - М.: Наука. 525 с. (2005).
- [7] Zakirova G.B. *On  $p$ -convexification of the Banach-Kantorovich lattice*, e-Journal of Analysis and Applied Mathematics. p. 21–32. (2024). <https://doi.org/10.62780/ejaam/2024-004>
- [8] Владимиров Д.А. *Булевы алгебры*. - М.: Наука. 318 с. (1969).
- [9] Вулих Б.З. *Введение в теорию полупорядоченных пространств*. - М.: ГИФМЛ. 407 с. (1961).
- [10] Meyer-Nieberg P. *Banach Lattices*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, p. 395 (1961)
- [11] Закиров Б.С., Чилин В.И. *Разложимые меры со значениями в порядково полных векторных решетках*, Владикавказский матем. журн. - Владикавказ, **4(10)**. С. 31–38. (2008).
- [12] Chilin V., Zakirov V. *Decomposable  $L_0$ -valued measures as measurable bundles*, Positivity, **14(3)**. p. 395-405.
- [13] Закиров Б.С., *Теорема Амеция для  $L^0$ -нормированных векторных решеток*, Узбекский мат. журн. **5**. с. 23–33. (2008).
- [14] Chilin V.I., Zakirova G.B. *Symmetric spaces of Banach-Kantorovich*, Al-Farabi Kazakh National University Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science. **2(126)**. p. 80–90. (2025).
- [15] Chilin V., Zakirova G. *The decreasing rearrangements of functions for vector-valued measures*, Uzbek Mathematical Journal. **Vol. 69, Issue 4**. p. 70–82. (2025).

## On $p$ -convexification of Symmetric Banach-Kantorovich Spaces

Chilin V.I., Zakirova G.B.

### Abstract

Let  $B$  be a complete Boolean algebra,  $Q(B)$  the Stone compact of  $B$ , and let  $C_\infty(Q(B))$  be the commutative unital algebra of all continuous functions  $x : Q(B) \rightarrow [-\infty, +\infty]$ , assuming possibly the values  $\pm\infty$  on nowhere-dense subsets of  $Q(B)$ . Let  $(E, \|\cdot\|_E) \subset C_\infty(Q(B))$  be a Banach-Kantorovich lattice over the algebra  $L^0(\Omega)$  of equivalence classes of almost everywhere finite real-valued measurable functions on a measurable space  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  with  $\sigma$ -finite measure  $\mu$ . The paper considers the  $p$ -convexification of lattice-normed spaces and proves that  $p$ -convexification of  $(E^p, \|\cdot\|_{E^p})$  symmetric Banach-Kantorovich space  $(E, \|\cdot\|_E)$  over  $L^0(\Omega)$  is a symmetric Banach-Kantorovich space over  $L^0(\Omega)$ . It is established that an  $L^0(\Omega)$ -valued norm in the space of  $(E^p, \|\cdot\|_{E^p})$  has the Fatou property or the property of order continuity, in the case when this property is possessed by an  $L^0(\Omega)$ -valued norm in the space of  $(E, \|\cdot\|_E)$ .

### Keywords

$p$ -convexification, Maharam measure, Banach-Kantorovich space, symmetric spaces.

### Affiliations

Vladimir Chilin

**Address:** Doctor of physical and mathematical sciences, professor of the department of Higher Mathematics, Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan.

**e-mail:** vladimirchil@gmail.com

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0002-7936-9649>

Gavhar Zakirova

**Address:** Assistant in department of Higher Mathematics, Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan.

**e-mail:** zg1090@list.ru

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0002-4663-0919>



# Некоторые Функциональные Тождества, Выводимые Из Одной Конфлюэнтной Гипергеометрической Функции $E_7$ От Трёх Переменной

Юлдашова Хилола\* Хасанов Анвар

## Аннотация

В этой статье разбив конфлюэнтную гипергеометрическую функцию  $E_7$  на восемь частей, мы показываем, как можно получить некоторые полезные и обобщенные соотношения между гипергеометрическими функциями Srivastava  $F^{(3)}$  и  $E_7$ . Показано, что другие основные результаты конкретизируются, чтобы получить определенные соотношения между функциями  $F_1$ ,  $\Xi_1$ ,  ${}_4F_3$ ,  ${}_2F_3$ ,  ${}_1F_2$ ,  ${}_1F_1$  и  $F_{2;1;1}^{2;2;2}$ . Также рассматриваются некоторые другие интересные функциональные соотношения между показательной функцией, гиперболическими функциями и модифицированными функциями Бесселя.

*Ключевые слова:* Конфлюэнтная гипергеометрическая функция; обобщённые гипергеометрические ряды; функциональные тождества; модифицированные функции Бесселя; экспоненциальная функция.

*Предметная классификация AMS (2020):* Основная: 33C15; Дополнительная: 33C20; 33E30.

## 1. Это нумерованный заголовок раздела первого уровня

Исследование гипергеометрических функций от многих переменных по существу мотивировано тем, что решения многих прикладных задач, включая теплопроводность и динамику, электромагнитные колебания и аэродинамику, квантовую механику и теорию потенциала, могут быть получены с помощью таких гипергеометрических (высших и специальных или трансцендентных) функций (см. [1], [7], [11], [23], [25]). Такие функции часто называют специальными функциями в математической физике. Они в основном появляются при решении уравнений в частных производных методом гармонического анализа.

Ввиду разнообразных приложений важно и само по себе интересно проводить непрерывное исследование кратных гипергеометрических функций. Фактически, в работе в работе Сриваставы и Карлссона [27] приведен обширный список из 205 гипергеометрических функций трёх переменных вместе с их областями сходимости. Отмечено, что функции Риммана и фундаментальные решения вырожденных уравнений в частных производных второго порядка выражаются через гипергеометрические функции многих переменных (см. [2], [4], [5], [6], [11], [12], [13], [14], [15], [16], [17], [24], [26], [29], [30], [31]). Для решения краевых задач для рассматриваемых уравнений в частных производных необходимо исследовать некоторые свойства гипергеометрических функций многих переменных (см. [18], [19], [20], [21], [22], [29]).

Ларднер [21] дал некоторые связи между функциями Бесселя и гипергеометрическими рядами  ${}_0F_3$ , например

$${}_0F_3\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; z\right) = \frac{1}{2} \left[ J_0\left(4z^{\frac{1}{4}}\right) + I_0\left(4z^{\frac{1}{4}}\right) \right], \quad (1.1)$$

и

$$ber(x) = {}_0F_3\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; -\frac{x^4}{256}\right), \quad bei(x) = \frac{x^2}{4} {}_0F_3\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1; -\frac{x^4}{256}\right), \quad (1.2)$$

где  $J_\nu$  и  $I_\nu$  обозначают функцию Бесселя и модифицированную функцию Бесселя порядка  $\nu$ , ([1], [10], [28], [33]), определяемую формулой

$$J_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu {}_0F_1\left(-; \nu+1; -\frac{z^2}{4}\right), \quad (1.3)$$

$$I_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu {}_0F_1\left(-; \nu+1; \frac{z^2}{4}\right), \quad (1.4)$$

$ber(x)$  и  $bei(x)$  (где  $x$  вещественное число) обозначают функции Келвина, определяемые как

$$ber(x) + i bei(x) = J_0\left(xe^{i\frac{3}{4}\pi}\right) = I_0\left(xe^{i\frac{1}{4}\pi}\right). \quad (1.5)$$

Карлссон [8] обобщил эти результаты для произвольных параметров, получив следующие результаты:

$${}_0F_3\left(\frac{1}{2}, c, c + \frac{1}{2}; z\right) = \frac{1}{2} \Gamma(2c) \left(2z^{\frac{1}{4}}\right)^{1-2c} \left[ J_{2c-1}\left(4z^{\frac{1}{4}}\right) + I_{2c-1}\left(4z^{\frac{1}{4}}\right) \right], \quad (1.6)$$

$${}_0F_3\left(\frac{3}{2}, c, c + \frac{1}{2}; z\right) = \frac{1}{2} \Gamma(2c) \left(2z^{\frac{1}{4}}\right)^{-2c} \left[ I_{2c-2}\left(4z^{\frac{1}{4}}\right) - J_{2c-2}\left(4z^{\frac{1}{4}}\right) \right], \quad (1.7)$$

где  ${}_pF_q$  обобщенная гипергеометрическая функция [27] определяется следующим образом.

$${}_pF_q\left[\begin{matrix} \alpha_1, \dots, \alpha_p; \\ \beta_1, \dots, \beta_q; \end{matrix} z\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n \dots (\alpha_p)_n}{(\beta_1)_n \dots (\beta_q)_n} \frac{z^n}{n!} = {}_pF_q(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \beta_1, \dots, \beta_q; z). \quad (1.8)$$

Ружанский, Хасанов, Эргашев в статье [32] используя результаты Сривастава и Карлссон [27], определили 395 конфлуентные гипергеометрические функции второго порядка от трех переменных. Один из них представлен следующим образом:

$$E_7(a_1, a_2, a_3, a_4; c; x, y, z) = \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{m+n} (a_2)_m (a_3)_n (a_4)_p}{(c)_{m+n+p}} \frac{x^m y^n z^p}{m! n! p!}, \quad (1.9)$$

где  $C$  и  $Z_0^-$  - обозначают множество комплексных чисел и множество неположительных целых чисел соответственно,  $(\lambda)_n$  символ Похгаммера, определяемый (для  $\lambda \in C$ ) [9], [27] формулой :

$$(\lambda)_n := \begin{cases} 1, & (n = 0) \\ \lambda(\lambda+1) \cdots (\lambda+n-1), & (n \in N := \{1, 2, \dots\}) \end{cases}$$

$$= \frac{\Gamma(\lambda+n)}{\Gamma(\lambda)}, \quad (\lambda \in C/Z_0^-),$$

$\Gamma(\lambda)$  — хорошо известная гамма-функция. Трёхмерная область сходимости функции (1.9) задана Ружанский, Хасанов, Эргашев [32]:  $\{r < 1, s < 1, t < \infty\}$ ,  $|x| := r, |y| := s, |z| := t$ , где положительные величины  $r, s, t$  связаны с радиусами сходимости функции (1.9).

## 2. Соотношения между гипергеометрическими функциями

В этом разделе мы устанавливаем некоторые интересные и полезные тождества, связанные с функциями  $E_7$ ,  $F^{(3)}$ ,  $F_{l:m;n}^{p;q;k}$ . Вспомним определения функций Аппеля [9] и функций Кампе де Ферие двух переменных [3], [27],

$$F_1(a_1; b_1, b_2; c; x, y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_m (b_1)_m (b_2)_n x^m y^n}{(c)_{m+n} m! n!}, \quad (2.1)$$

$$F_{l:m;n}^{p;q;k} \left[ \begin{matrix} (a_p) : (b_q) ; (c_k) ; \\ (\alpha_l) : (\beta_m) ; (\gamma_n) ; \end{matrix} x, y \right] = \sum_{r,s=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^p (a_i)_{r+s} \prod_{i=1}^q (b_i)_r \prod_{i=1}^k (c_i)_s}{\prod_{i=1}^l (\alpha_i)_{r+s} \prod_{i=1}^m (\beta_i)_r \prod_{i=1}^n (\gamma_i)_s r! s!} x^r y^s.$$

$F^{(3)}$  Обобщенная гипергеометрическая функция Сриваставы определяется как [27]

$$F^{(3)} \left[ \begin{matrix} - :: (\delta) ; - ; - : (\alpha) ; (\beta) ; (\gamma) ; \\ (e) :: - ; - ; - : (h_1) ; (h_2) ; (h_3) ; \end{matrix} x, y, z \right] \quad (2.2)$$

$$= \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(\delta_1)_{m+n} (\delta_2)_{m+n} (\alpha_1)_m (\alpha_2)_m (\beta_1)_n (\beta_2)_n (\gamma_1)_p (\gamma_2)_p x^m y^n z^p}{(e_1)_{m+n+p} (e_2)_{m+n+p} (h_1)_m (h_2)_n (h_3)_p m! n! p!}.$$

Для этого мы просто разделяем суммирование в (1.9) на нечётные и чётные степени каждого из  $x^m, y^n$  и  $z^p$ . Фактически, для любого комплексного  $c \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}_0^-$  и любых конечных комплексных  $x, y$  и  $z$ , ряд  $E_7(x, y, z)$  абсолютно сходится в области сходимости и следовательно, может быть переписан как в следующих восьми суммированиях:

$$E_7(a_1, a_2, a_3, a_4; c; x, y, z) = \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{m+n} (a_2)_m (a_3)_n (a_4)_p x^m y^n z^p}{(c)_{m+n+p} m! n! p!} \quad (2.3)$$

$$= \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{2(m+n)} (a_2)_{2m} (a_3)_{2n} (a_4)_{2p} x^{2m} y^{2n} z^{2p}}{(c)_{2(m+n+p)} (2m)! (2n)! (2p)!}$$

$$+ x \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{2(m+n)+1} (a_2)_{2m+1} (a_3)_{2n} (a_4)_{2p} x^{2m} y^{2n} z^{2p}}{(c)_{2(m+n+p)+1} (2m+1)! (2n)! (2p)!}$$

$$+ y \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{2(m+n)+1} (a_2)_{2m} (a_3)_{2n+1} (a_4)_{2p} x^{2m} y^{2n} z^{2p}}{(c)_{2(m+n+p)+1} (2m)! (2n+1)! (2p)!}$$

$$+ z \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{2(m+n)} (a_2)_{2m} (a_3)_{2n} (a_4)_{2p+1} x^{2m} y^{2n} z^{2p}}{(c)_{2(m+n+p)+1} (2m)! (2n)! (2p+1)!}$$

$$+ xy \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{2(m+n)+2} (a_2)_{2m+1} (a_3)_{2n+1} (a_4)_{2p} x^{2m} y^{2n} z^{2p}}{(c)_{2(m+n+p)+2} (2m+1)! (2n+1)! (2p)!}$$

$$+ xz \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{2(m+n)+1} (a_2)_{2m+1} (a_3)_{2n} (a_4)_{2p+1} x^{2m} y^{2n} z^{2p}}{(c)_{2(m+n+p)+2} (2m+1)! (2n)! (2p+1)!}$$

$$+ yz \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{2(m+n)+1} (a_2)_{2m} (a_3)_{2n+1} (a_4)_{2p+1} x^{2m} y^{2n} z^{2p}}{(c)_{2(m+n+p)+2} (2m)! (2n+1)! (2p+1)!}$$

$$+ xyz \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{2(m+n)+2} (a_2)_{2m+1} (a_3)_{2n+1} (a_4)_{2p+1} x^{2m} y^{2n} z^{2p}}{(c)_{2(m+n+p)+3} (2m+1)! (2n+1)! (2p+1)!},$$

Теперь воспользуемся следующим хорошо известным (или легко выводимым) тождеством для символа Похгаммера (см. [9], [33]):

$$\begin{aligned} (nk)! &= \left(\frac{1}{n}\right)_k \left(\frac{2}{n}\right)_k \dots \left(\frac{n-1}{n}\right)_k n^{nk} k!, \\ (nk+m)! &= \left(\frac{m+1}{n}\right)_k \left(\frac{m+2}{n}\right)_k \dots \left(\frac{m+n}{n}\right)_k n^{nk} m!, \\ (a)_{2m} &= \left(\frac{a}{2}\right)_m \left(\frac{a+1}{2}\right)_m 4^m, \quad (a)_{2m+1} = a \left(\frac{a+1}{2}\right)_m \left(\frac{a+2}{2}\right)_m 4^m, \\ (c)_{2m+2} &= c(c+1) \left(\frac{c+2}{2}\right)_m \left(\frac{c+3}{2}\right)_m 4^m, \\ (c)_{2m+3} &= c(c+1)(c+2) \left(\frac{c+3}{2}\right)_m \left(\frac{c+4}{2}\right)_m 4^m, \quad (m \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}, n \in \mathbb{N}), \end{aligned}$$

после некоторого упрощения получаем следующая теорема.

**Теорема 2.1.** *Имеет место следующей соотношение между  $E_7$  и  $F^{(3)}$*

$$\begin{aligned} &E_7(a_1, a_2, a_3, a_4; c; x, y, z) = \tag{2.4} \\ &= F^{(3)} \left[ \begin{array}{c} - :: \frac{a_1}{2}, \frac{a_1+1}{2}; \quad -; \quad - : \frac{a_2}{2}, \frac{a_2+1}{2}; \quad \frac{a_3}{2}, \frac{a_3+1}{2}; \quad \frac{a_4}{2}, \frac{a_4+1}{2}; \quad x^2, y^2, \frac{z^2}{4} \\ \frac{c}{2}, \frac{c+1}{2} :: \quad \quad \quad -; \quad -; \quad - : \quad \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{2}; \end{array} \right] \\ &\quad + \frac{a_1 a_2}{c} x \times \\ &\times F^{(3)} \left[ \begin{array}{c} - :: \frac{a_1+1}{2}, \frac{a_1+2}{2}; \quad -; \quad - : \frac{a_2+1}{2}, \frac{a_2+2}{2}; \quad \frac{a_3}{2}, \frac{a_3+1}{2}; \quad \frac{a_4}{2}, \frac{a_4+1}{2}; \quad x^2, y^2, \frac{z^2}{4} \\ \frac{c+1}{2}, \frac{c+2}{2} :: \quad \quad \quad -; \quad -; \quad - : \quad \frac{3}{2}; \quad \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{2}; \end{array} \right] \\ &\quad + \frac{a_1 a_3}{c} y \times \\ &\times F^{(3)} \left[ \begin{array}{c} - :: \frac{a_1+1}{2}, \frac{a_1+2}{2}; \quad -; \quad - : \frac{a_2}{2}, \frac{a_2+1}{2}; \quad \frac{a_3+1}{2}, \frac{a_3+2}{2}; \quad \frac{a_4}{2}, \frac{a_4+1}{2}; \quad x^2, y^2, \frac{z^2}{4} \\ \frac{c+1}{2}, \frac{c+2}{2} :: \quad \quad \quad -; \quad -; \quad - : \quad \frac{1}{2}; \quad \frac{3}{2}; \quad \frac{1}{2}; \end{array} \right] \\ &+ \frac{a_4}{c} z F^{(3)} \left[ \begin{array}{c} - :: \frac{a_1}{2}, \frac{a_1+1}{2}; \quad -; \quad - : \frac{a_2}{2}, \frac{a_2+1}{2}; \quad \frac{a_3}{2}, \frac{a_3+1}{2}; \quad \frac{a_4+1}{2}, \frac{a_4+2}{2}; \quad x^2, y^2, \frac{z^2}{4} \\ \frac{c+1}{2}, \frac{c+2}{2} :: \quad \quad \quad -; \quad -; \quad - : \quad \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{2}; \quad \frac{3}{2}; \end{array} \right] \\ &\quad + \frac{a_1(a_1+1)a_2 a_3}{c(c+1)} xy \times \\ &\times F^{(3)} \left[ \begin{array}{c} - :: \frac{a_1+2}{2}, \frac{a_1+3}{2}; \quad -; \quad - : \frac{a_2+1}{2}, \frac{a_2+2}{2}; \quad \frac{a_3+1}{2}, \frac{a_3+2}{2}; \quad \frac{a_4}{2}, \frac{a_4+1}{2}; \quad x^2, y^2, \frac{z^2}{4} \\ \frac{c+2}{2}, \frac{c+3}{2} :: \quad \quad \quad -; \quad -; \quad - : \quad \frac{3}{2}; \quad \frac{3}{2}; \quad \frac{1}{2}; \end{array} \right] \\ &\quad + \frac{a_1 a_2 a_4}{c(c+1)} xz \times \\ &\times F^{(3)} \left[ \begin{array}{c} - :: \frac{a_1+1}{2}, \frac{a_1+2}{2}; \quad -; \quad - : \frac{a_2+1}{2}, \frac{a_2+2}{2}; \quad \frac{a_3}{2}, \frac{a_3+1}{2}; \quad \frac{a_4+1}{2}, \frac{a_4+2}{2}; \quad x^2, y^2, \frac{z^2}{4} \\ \frac{c+2}{2}, \frac{c+3}{2} :: \quad \quad \quad -; \quad -; \quad - : \quad \frac{3}{2}; \quad \frac{1}{2}; \quad \frac{3}{2}; \end{array} \right] \\ &\quad + \frac{a_1 a_3 a_4}{c(c+1)} yz \times \\ &\times F^{(3)} \left[ \begin{array}{c} - :: \frac{a_1+1}{2}, \frac{a_1+2}{2}; \quad -; \quad - : \frac{a_2}{2}, \frac{a_2+1}{2}; \quad \frac{a_3+1}{2}, \frac{a_3+2}{2}; \quad \frac{a_4+1}{2}, \frac{a_4+2}{2}; \quad x^2, y^2, \frac{z^2}{4} \\ \frac{c+2}{2}, \frac{c+3}{2} :: \quad \quad \quad -; \quad -; \quad - : \quad \frac{1}{2}; \quad \frac{3}{2}; \quad \frac{3}{2}; \end{array} \right] \\ &\quad + \frac{a_1(a_1+1)a_2 a_3 a_4}{c(c+1)(c+2)} xyz \times \\ &\times F^{(3)} \left[ \begin{array}{c} - :: \frac{a_1+2}{2}, \frac{a_1+3}{2}; \quad -; \quad - : \frac{a_2+1}{2}, \frac{a_2+2}{2}; \quad \frac{a_3+1}{2}, \frac{a_3+2}{2}; \quad \frac{a_4+1}{2}, \frac{a_4+2}{2}; \quad x^2, y^2, \frac{z^2}{4} \\ \frac{c+3}{2}, \frac{c+4}{2} :: \quad \quad \quad -; \quad -; \quad - : \quad \frac{3}{2}; \quad \frac{3}{2}; \quad \frac{3}{2}; \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Далее, меняя знаки  $x, y, z$  в определении  $E_7$ , мы легко выражаем  $F^{(3)}$  через  $E_7$  из (2.4).

**Теорема 2.2.** *Справедливы следующие восемь соотношений между  $F^{(3)}$  и  $E_7$ .*

$$8F^{(3)} \left[ \begin{matrix} - :: & \frac{a_1}{2}, \frac{a_1+1}{2}; & -; & - : & \frac{a_2}{2}, \frac{a_2+1}{2}; & \frac{a_3}{2}, \frac{a_3+1}{2}; & \frac{a_4}{2}, \frac{a_4+1}{2}; & x^2, y^2, \frac{z^2}{4} \\ \frac{c}{2}, \frac{c+1}{2} :: & & -; & - : & \frac{1}{2}; & \frac{1}{2}; & \frac{1}{2}; & \end{matrix} \right]$$

$$= E_7(x, y, z) + E_7(-x, y, z) + E_7(x, -y, z) + E_7(x, y, -z)$$

$$+ E_7(-x, -y, z) + E_7(-x, y, -z) + E_7(x, -y, -z) + E_7(-x, -y, -z),$$

$$F^{(3)} \left[ \begin{matrix} - :: & \frac{a_1+1}{2}, \frac{a_1+2}{2}; & -; & - : & \frac{a_2+1}{2}, \frac{a_2+2}{2}; & \frac{a_3}{2}, \frac{a_3+1}{2}; & \frac{a_4}{2}, \frac{a_4+1}{2}; & x^2, y^2, \frac{z^2}{4} \\ \frac{c+1}{2}, \frac{c+2}{2} :: & & -; & - : & \frac{3}{2}; & \frac{1}{2}; & \frac{1}{2}; & \end{matrix} \right]$$

$$\times 8 \frac{a_1 a_2}{c} x = E_7(x, y, z) - E_7(-x, y, z) + E_7(x, -y, z) + E_7(x, y, -z)$$

$$- E_7(-x, -y, z) - E_7(-x, y, -z) + E_7(x, -y, -z) - E_7(-x, -y, -z),$$

$$F^{(3)} \left[ \begin{matrix} - :: & \frac{a_1+1}{2}, \frac{a_1+2}{2}; & -; & - : & \frac{a_2}{2}, \frac{a_2+1}{2}; & \frac{a_3+1}{2}, \frac{a_3+2}{2}; & \frac{a_4}{2}, \frac{a_4+1}{2}; & x^2, y^2, \frac{z^2}{4} \\ \frac{c+1}{2}, \frac{c+2}{2} :: & & -; & - : & \frac{1}{2}; & \frac{3}{2}; & \frac{1}{2}; & \end{matrix} \right]$$

$$\times 8 \frac{a_1 a_3}{c} y = E_7(x, y, z) + E_7(-x, y, z) - E_7(x, -y, z) + E_7(x, y, -z)$$

$$- E_7(-x, -y, z) + E_7(-x, y, -z) - E_7(x, -y, -z) - E_7(-x, -y, -z),$$

$$F^{(3)} \left[ \begin{matrix} - :: & \frac{a_1}{2}, \frac{a_1+1}{2}; & -; & - : & \frac{a_2}{2}, \frac{a_2+1}{2}; & \frac{a_3}{2}, \frac{a_3+1}{2}; & \frac{a_4+1}{2}, \frac{a_4+2}{2}; & x^2, y^2, \frac{z^2}{4} \\ \frac{c+1}{2}, \frac{c+2}{2} :: & & -; & - : & \frac{1}{2}; & \frac{1}{2}; & \frac{3}{2}; & \end{matrix} \right]$$

$$\times 8 \frac{a_4}{c} z = E_7(x, y, z) + E_7(-x, y, z) + E_7(x, -y, z) - E_7(x, y, -z)$$

$$+ E_7(-x, -y, z) - E_7(-x, y, -z) - E_7(x, -y, -z) - E_7(-x, -y, -z),$$

$$F^{(3)} \left[ \begin{matrix} - :: & \frac{a_1+2}{2}, \frac{a_1+3}{2}; & -; & - : & \frac{a_2+1}{2}, \frac{a_2+2}{2}; & \frac{a_3+1}{2}, \frac{a_3+2}{2}; & \frac{a_4}{2}, \frac{a_4+1}{2}; & x^2, y^2, \frac{z^2}{4} \\ \frac{c+2}{2}, \frac{c+3}{2} :: & & -; & - : & \frac{3}{2}; & \frac{3}{2}; & \frac{1}{2}; & \end{matrix} \right]$$

$$\times 8 \frac{a_1(a_1+1)a_2a_3}{c(c+1)} xy = E_7(x, y, z) - E_7(-x, y, z) - E_7(x, -y, z) + E_7(x, y, -z)$$

$$+ E_7(-x, -y, z) - E_7(-x, y, -z) - E_7(x, -y, -z) + E_7(-x, -y, -z),$$

$$F^{(3)} \left[ \begin{matrix} - :: & \frac{a_1+1}{2}, \frac{a_1+2}{2}; & -; & - : & \frac{a_2+1}{2}, \frac{a_2+2}{2}; & \frac{a_3}{2}, \frac{a_3+1}{2}; & \frac{a_4+1}{2}, \frac{a_4+2}{2}; & x^2, y^2, \frac{z^2}{4} \\ \frac{c+2}{2}, \frac{c+3}{2} :: & & -; & - : & \frac{3}{2}; & \frac{1}{2}; & \frac{3}{2}; & \end{matrix} \right]$$

$$\times 8 \frac{a_1 a_2 a_4}{c(c+1)} xz = E_7(x, y, z) - E_7(-x, y, z) + E_7(x, -y, z) - E_7(x, y, -z)$$

$$- E_7(-x, -y, z) + E_7(-x, y, -z) - E_7(x, -y, -z) + E_7(-x, -y, -z),$$

$$F^{(3)} \left[ \begin{matrix} - :: & \frac{a_1+1}{2}, \frac{a_1+2}{2}; & -; & - : & \frac{a_2}{2}, \frac{a_2+1}{2}; & \frac{a_3+1}{2}, \frac{a_3+2}{2}; & \frac{a_4+1}{2}, \frac{a_4+2}{2}; & x^2, y^2, \frac{z^2}{4} \\ \frac{c+2}{2}, \frac{c+3}{2} :: & & -; & - : & \frac{1}{2}; & \frac{3}{2}; & \frac{3}{2}; & \end{matrix} \right]$$

$$\times 8 \frac{a_1 a_3 a_4}{c(c+1)} yz = E_7(x, y, z) + E_7(-x, y, z) - E_7(x, -y, z) - E_7(x, y, -z)$$

$$-E_7(-x, -y, z) - E_7(-x, y, -z) + E_7(x, -y, -z) + E_7(-x, -y, -z),$$

$$F^{(3)} \left[ \begin{array}{c} - :: \frac{a_1+2}{2}, \frac{a_1+3}{2}; \quad -; \quad - : \frac{a_2+1}{2}, \frac{a_2+2}{2}; \quad \frac{a_3+1}{2}, \frac{a_3+2}{2}; \quad \frac{a_4+1}{2}, \frac{a_4+2}{2}; \quad x^2, y^2, \frac{z^2}{4} \\ \frac{c+3}{2}, \frac{c+4}{2} :: \quad -; \quad -; \quad - : \quad \frac{3}{2}; \quad \frac{3}{2}; \quad \frac{3}{2}; \end{array} \right] \\ \times 8 \frac{a_1(a_1+1)a_2a_3a_4}{c(c+1)(c+2)} xyz = E_7(x, y, z) - E_7(-x, y, z) - E_7(x, -y, z) - E_7(x, y, -z) \\ + E_7(-x, -y, z) + E_7(-x, y, -z) + E_7(x, -y, -z) - E_7(-x, -y, -z),$$

где для простоты обозначено  $E_7(x, y, z) = E_7(a_1, a_2, a_3, a_4; c; x, y, z)$  обозначается как (1.9).

**Следствие 2.1.** Если в соотношение (2.4) положить  $z = 0$  то мы имеем

$$F_1(a_1; a_2, a_3; c; x, y) = E_7(a_1, a_2, a_3, a_4; c; x, y, 0) = \tag{2.5} \\ = F_{2:1;1}^{2:2;2} \left[ \begin{array}{c} \frac{a_1}{2}, \frac{a_1+1}{2} : \quad \frac{a_2}{2}, \frac{a_2+1}{2}; \quad \frac{a_3}{2}, \frac{a_3+1}{2}; \quad x^2, y^2 \\ \frac{c}{2}, \frac{c+1}{2} : \quad \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{2}; \end{array} \right] \\ + \frac{a_1a_2}{c} x F_{2:1;1}^{2:2;2} \left[ \begin{array}{c} \frac{a_1+1}{2}, \frac{a_1+2}{2} : \quad \frac{a_2+1}{2}, \frac{a_2+2}{2}; \quad \frac{a_3}{2}, \frac{a_3+1}{2}; \quad x^2, y^2 \\ \frac{c+1}{2}, \frac{c+2}{2} : \quad \frac{3}{2}; \quad \frac{1}{2}; \end{array} \right] \\ + \frac{a_1a_3}{c} y F_{2:1;1}^{2:2;2} \left[ \begin{array}{c} \frac{a_1+1}{2}, \frac{a_1+2}{2} : \quad \frac{a_2}{2}, \frac{a_2+1}{2}; \quad \frac{a_3+1}{2}, \frac{a_3+2}{2}; \quad x^2, y^2 \\ \frac{c+1}{2}, \frac{c+2}{2} : \quad \frac{1}{2}; \quad \frac{3}{2}; \end{array} \right] \\ + \frac{a_1(a_1+1)a_2a_3}{c(c+1)} xy F_{2:1;1}^{2:2;2} \left[ \begin{array}{c} \frac{a_1+2}{2}, \frac{a_1+3}{2} : \quad \frac{a_2+1}{2}, \frac{a_2+2}{2}; \quad \frac{a_3+1}{2}, \frac{a_3+2}{2}; \quad x^2, y^2 \\ \frac{c+2}{2}, \frac{c+3}{2} : \quad \frac{3}{2}; \quad \frac{3}{2}; \end{array} \right].$$

**Следствие 2.2.** Меняя знаки  $x, y$  переменных в (2.5), мы легко выражаем  $F_{2:1;1}^{2:2;2}$  через  $F_1$

$$4F_{2:1;1}^{2:2;2} \left[ \begin{array}{c} \frac{a_1}{2}, \frac{a_1+1}{2} : \quad \frac{a_2}{2}, \frac{a_2+1}{2}; \quad \frac{a_3}{2}, \frac{a_3+1}{2}; \quad x^2, y^2 \\ \frac{c}{2}, \frac{c+1}{2} : \quad \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{2}; \end{array} \right] \tag{2.6}$$

$$= F_1(x, y) + F_1(-x, y) + F_1(x, -y) + F_1(-x, -y),$$

$$4 \frac{a_1a_2}{c} x F_{2:1;1}^{2:2;2} \left[ \begin{array}{c} \frac{a_1+1}{2}, \frac{a_1+2}{2} : \quad \frac{a_2+1}{2}, \frac{a_2+2}{2}; \quad \frac{a_3}{2}, \frac{a_3+1}{2}; \quad x^2, y^2 \\ \frac{c+1}{2}, \frac{c+2}{2} : \quad \frac{3}{2}; \quad \frac{1}{2}; \end{array} \right] \tag{2.7}$$

$$= F_1(x, y) - F_1(-x, y) + F_1(x, -y) - F_1(-x, -y),$$

$$4 \frac{a_1a_3}{c} y F_{2:1;1}^{2:2;2} \left[ \begin{array}{c} \frac{a_1+1}{2}, \frac{a_1+2}{2} : \quad \frac{a_2}{2}, \frac{a_2+1}{2}; \quad \frac{a_3+1}{2}, \frac{a_3+2}{2}; \quad x^2, y^2 \\ \frac{c+1}{2}, \frac{c+2}{2} : \quad \frac{1}{2}; \quad \frac{3}{2}; \end{array} \right] \tag{2.8}$$

$$= F_1(x, y) + F_1(-x, y) - F_1(x, -y) - F_1(-x, -y),$$

$$4 \frac{a_1(a_1+1)a_2a_3}{c(c+1)} xy F_{2:1;1}^{2:2;2} \left[ \begin{array}{c} \frac{a_1+2}{2}, \frac{a_1+3}{2} : \quad \frac{a_2+1}{2}, \frac{a_2+2}{2}; \quad \frac{a_3+1}{2}, \frac{a_3+2}{2}; \quad x^2, y^2 \\ \frac{c+2}{2}, \frac{c+3}{2} : \quad \frac{3}{2}; \quad \frac{3}{2}; \end{array} \right] = \tag{2.9}$$

$$= F_1(x, y) - F_1(-x, y) - F_1(x, -y) + F_1(-x, -y),$$

где  $F_1(x, y) = F_1(a_1; b_1, b_2; c; x, y)$ .

**Комментарий 1.** Если в разложениях (2.6) -(2.9) воспользоваться формулой

$$F_1(\alpha; \beta, \beta'; \beta + \beta'; x, y) = (1 - y)^{-\alpha} F(\alpha, \beta; \beta + \beta'; (x - y) / (1 - y)),$$

то мы получим функциональные соотношения между функциями  $F_{2;1;1}^{2;2;2}$  и гипергеометрическими функциями Гаусса  $F$ .

**Комментарий 2.** При  $y = 0$  из равенств (2.5), (2.6), (2.7), следуют функциональные тождества

$$\begin{aligned} F(a_1, a_2; c; x) &= {}_4F_3\left(\frac{a_1}{2}, \frac{a_1+1}{2}, \frac{a_2}{2}, \frac{a_2+1}{2}; \frac{c}{2}, \frac{c+1}{2}, \frac{1}{2}; x^2\right) \\ &+ \frac{a_1 a_2}{c} x {}_4F_3\left(\frac{a_1+1}{2}, \frac{a_1+2}{2}, \frac{a_2+1}{2}, \frac{a_2+2}{2}; \frac{c+1}{2}, \frac{c+2}{2}, \frac{3}{2}; x^2\right), \\ {}_2F_3\left(\frac{a_1}{2}, \frac{a_1+1}{2}, \frac{a_2}{2}, \frac{a_2+1}{2}; \frac{c}{2}, \frac{c+1}{2}, \frac{1}{2}; x^2\right) &= F(a_1, a_2; c; x) + F(a_1, a_2; c; -x), \\ 2 \frac{a_1 a_2}{c} x {}_4F_3\left(\frac{a_1+1}{2}, \frac{a_1+2}{2}, \frac{a_2+1}{2}, \frac{a_2+2}{2}; \frac{c+1}{2}, \frac{c+2}{2}, \frac{3}{2}; x^2\right) &= F(a_1, a_2; c; x) - F(a_1, a_2; c; -x). \end{aligned}$$

Если воспользоваться, например равенствами [33]:

$$\begin{aligned} F\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; x\right) &= \sqrt{1-x} + \sqrt{x} \arcsin \sqrt{x}, \quad 0 \leq x \leq 1, \\ F\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -x\right) &= \sqrt{1+x} - \sqrt{x} \ln(\sqrt{x} + \sqrt{1+x}), \quad 0 \leq x \leq 1, \end{aligned}$$

То мы получим следующие функциональные тождества

$$\begin{aligned} {}_3F_2\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{3}{4}; \frac{1}{2}; x^2\right) &+ \frac{1}{2} x {}_3F_2\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}; \frac{3}{4}; \frac{5}{4}; \frac{3}{2}; x^2\right) \\ &= \sqrt{1-x} + \sqrt{x} \arcsin \sqrt{x}, \\ {}_3F_2\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{3}{4}; \frac{1}{2}; x^2\right) &- \frac{1}{2} x {}_3F_2\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}; \frac{3}{4}; \frac{5}{4}; \frac{3}{2}; x^2\right) \\ &= \sqrt{1+x} - \sqrt{x} \ln(\sqrt{x} + \sqrt{1+x}), \\ {}_2F_3\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{3}{4}; \frac{1}{2}; x^2\right) &= \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} + \sqrt{x} [\arcsin \sqrt{x} - \ln(\sqrt{x} + \sqrt{1+x})], \\ x {}_3F_2\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}; \frac{3}{4}; \frac{5}{4}; \frac{3}{2}; x^2\right) &= \sqrt{1-x} - \sqrt{1+x} + \sqrt{x} [\arcsin \sqrt{x} + \ln(\sqrt{x} + \sqrt{1+x})]. \end{aligned}$$

**Следствие 2.3.** Если в соотношении (2.4) положить  $x = 0$ , то мы имеем

$$\begin{aligned} \Xi_1(a_1, a_4, a_3; c; y, z) &= E_7(a_1, a_2, a_3, a_4; c; 0, y, z) \tag{2.10} \\ &= F_{2;1;1}^{0;4;2} \left[ \begin{array}{c} - : \frac{a_1}{2}, \frac{a_1+1}{2}, \frac{a_3}{2}, \frac{a_3+1}{2}; \frac{a_4}{2}, \frac{a_4+1}{2}; \\ \frac{c}{2}, \frac{c+1}{2} : \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \end{array} y^2, \frac{z^2}{4} \right] \\ &+ \frac{a_1 a_3}{c} y F_{2;1;1}^{0;4;2} \left[ \begin{array}{c} - : \frac{a_1+1}{2}, \frac{a_1+2}{2}, \frac{a_3+1}{2}, \frac{a_3+2}{2}; \frac{a_4}{2}, \frac{a_4+1}{2}; \\ \frac{c+1}{2}, \frac{c+2}{2} : \frac{3}{2}; \frac{1}{2}; \end{array} y^2, \frac{z^2}{4} \right] \\ &+ \frac{a_4}{c} z F_{2;1;1}^{0;4;2} \left[ \begin{array}{c} - : \frac{a_1}{2}, \frac{a_1+1}{2}, \frac{a_3}{2}, \frac{a_3+1}{2}; \frac{a_4+1}{2}, \frac{a_4+2}{2}; \\ \frac{c+1}{2}, \frac{c+2}{2} : \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \end{array} y^2, \frac{z^2}{4} \right] \\ &+ \frac{a_1 a_3 a_4}{c(c+1)} y z F_{2;1;1}^{0;4;2} \left[ \begin{array}{c} - : \frac{a_1+1}{2}, \frac{a_1+2}{2}, \frac{a_3+1}{2}, \frac{a_3+2}{2}; \frac{a_4+1}{2}, \frac{a_4+2}{2}; \\ \frac{c+2}{2}, \frac{c+3}{2} : \frac{3}{2}; \frac{3}{2}; \end{array} y^2, \frac{z^2}{4} \right] \end{aligned}$$

где функция Гумберта [3], [9] определяется следующим образом:

$$\Xi_1(\alpha_1, \alpha_2, \beta; \gamma; x, y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_m (\alpha_2)_n (\beta)_m}{(\gamma)_{m+n} m! n!} x^m y^n.$$

**Следствие 2.4.** Аналогичным образом, меняя знаки  $y, z$  переменных в (2.9), мы выражаем гипергеометрическую функцию  $F_{2:1;1}^{0:4;2}$  через функцию  $\Xi_1$ .

$$\begin{aligned} & 4F_{2:1;1}^{0:4;2} \left[ \begin{array}{c} - : \frac{a_1}{2}, \frac{a_1+1}{2}, \frac{a_3}{2}, \frac{a_3+1}{2}; \frac{a_4}{2}, \frac{a_4+1}{2}; \\ \frac{c}{2}, \frac{c+1}{2} : \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; y^2, \frac{z^2}{4} \end{array} \right] = \\ & = \Xi_1(y, z) + \Xi_1(-y, z) + \Xi_1(y, -z) + \Xi_1(-y, -z), \\ & 4 \frac{a_1 a_3}{c} y F_{2:1;1}^{0:4;2} \left[ \begin{array}{c} - : \frac{a_1+1}{2}, \frac{a_1+2}{2}, \frac{a_3+1}{2}, \frac{a_3+2}{2}; \frac{a_4}{2}, \frac{a_4+1}{2}; \\ \frac{c+1}{2}, \frac{c+2}{2} : \frac{3}{2}; \frac{1}{2}; y^2, \frac{z^2}{4} \end{array} \right] = \\ & = \Xi_1(y, z) - \Xi_1(-y, z) + \Xi_1(y, -z) - \Xi_1(-y, -z), \\ & 4 \frac{a_4}{c} z F_{2:1;1}^{0:4;2} \left[ \begin{array}{c} - : \frac{a_1}{2}, \frac{a_1+1}{2}, \frac{a_3}{2}, \frac{a_3+1}{2}; \frac{a_4+1}{2}, \frac{a_4+2}{2}; \\ \frac{c+1}{2}, \frac{c+2}{2} : \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; y^2, \frac{z^2}{4} \end{array} \right] = \\ & = \Xi_1(y, z) + \Xi_1(-y, z) - \Xi_1(y, -z) - \Xi_1(-y, -z), \\ & 4 \frac{a_1 a_3 a_4}{c(c+1)} yz F_{2:1;1}^{0:4;2} \left[ \begin{array}{c} - : \frac{a_1+1}{2}, \frac{a_1+2}{2}, \frac{a_3+1}{2}, \frac{a_3+2}{2}; \frac{a_4+1}{2}, \frac{a_4+2}{2}; \\ \frac{c+2}{2}, \frac{c+3}{2} : \frac{3}{2}; \frac{3}{2}; y^2, \frac{z^2}{4} \end{array} \right] = \\ & = \Xi_1(y, z) - \Xi_1(-y, z) - \Xi_1(y, -z) + \Xi_1(-y, -z), \end{aligned}$$

где  $\Xi_1(y, z) = \Xi_1(a_1, a_4, a_3; c; y, z)$ .

**Следствие 2.5.** Если в соотношение (2.10) полагать  $y = 0$ , то мы имеем

$$\begin{aligned} {}_1F_1(a_4; c; z) &= {}_2F_3\left(\frac{a_4}{2}, \frac{a_4+1}{2}; \frac{c}{2}, \frac{c+1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{z^2}{4}\right) \\ &= \frac{a_4}{c} {}_2F_3\left(\frac{a_4+1}{2}, \frac{a_4+2}{2}; \frac{c+1}{2}, \frac{c+2}{2}, \frac{3}{2}; \frac{z^2}{4}\right), \end{aligned}$$

где  ${}_1F_1$  функция Куммера, а  ${}_2F_3$  обобщенная гипергеометрическая функция Гаусса.

Из функционального равенство (2.10) не трудно получить следующие соотношения, которые связывают обобщенные гипергеометрические ряды с функциями Куммера

$$\begin{aligned} {}_2F_3\left(\frac{a_5}{2}, \frac{a_5+1}{2}; \frac{c}{2}, \frac{c+1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{z^2}{4}\right) &= {}_1F_1(a_5; c; z) + {}_1F_1(a_5; c; -z), \\ 2 \frac{a_5}{c} {}_2F_3\left(\frac{a_5+1}{2}, \frac{a_5+2}{2}; \frac{c+1}{2}, \frac{c+2}{2}, \frac{3}{2}; \frac{z^2}{4}\right) &= {}_1F_1(a_5; c; z) - {}_1F_1(a_5; c; -z). \end{aligned}$$

Если воспользоваться формулами для функции Куммера [33], например:

$$\begin{aligned} {}_1F_1\left(\frac{3}{4}; -\frac{1}{4}; z\right) &= (1-4z)e^z, \quad {}_1F_1\left(\frac{3}{4}; -\frac{1}{4}; -z\right) = (1+4z)e^{-z}, \\ {}_1F_1\left(\frac{1}{2}; 1; z\right) &= I_0\left(\frac{z}{2}\right)e^{\frac{z}{2}}, \quad {}_1F_1\left(\frac{1}{2}; 1; -z\right) = I_0\left(\frac{z}{2}\right)e^{-\frac{z}{2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}_1F_1\left(\frac{1}{2}; 2; z\right) &= \left[I_0\left(\frac{z}{2}\right) - I_1\left(\frac{z}{2}\right)\right] e^{\frac{z}{2}}, \quad {}_1F_1\left(\frac{1}{2}; 2; -z\right) = \left[I_0\left(\frac{z}{2}\right) + I_1\left(\frac{z}{2}\right)\right] e^{-\frac{z}{2}}, \\
 {}_1F_1(a; 2a; z) &= \left(\frac{z}{4}\right)^{\frac{1}{2}-a} \Gamma\left(\frac{1}{2} + a\right) I_{a-\frac{1}{2}}\left(\frac{z}{2}\right) e^{\frac{z}{2}}, \\
 {}_1F_1(a; 2a; -z) &= \left(\frac{z}{4}\right)^{\frac{1}{2}-a} \Gamma\left(\frac{1}{2} + a\right) I_{a-\frac{1}{2}}\left(\frac{z}{2}\right) e^{-\frac{z}{2}},
 \end{aligned}$$

тогда мы получаем следующие функциональные соотношения

$$\begin{aligned}
 {}_1F_2\left(\frac{7}{8}; -\frac{1}{8}, \frac{1}{2}; \frac{z^2}{4}\right) &= ch(z) - 4zsh(z), \\
 3z{}_1F_2\left(\frac{11}{8}; \frac{3}{8}, \frac{3}{2}; \frac{z^2}{4}\right) &= 4zch(z) - sh(z), \\
 {}_2F_3\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}; \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}; \frac{z^2}{4}\right) &= ch\left(\frac{z}{2}\right) I_0\left(\frac{z}{2}\right), \\
 z{}_2F_3\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}; 1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}; \frac{z^2}{4}\right) &= 2sh\left(\frac{z}{2}\right) I_0\left(\frac{z}{2}\right), \\
 {}_2F_3\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}; 1, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}; \frac{z^2}{4}\right) &= ch\left(\frac{z}{2}\right) I_0\left(\frac{z}{2}\right) - sh\left(\frac{z}{2}\right) I_1\left(\frac{z}{2}\right), \\
 z{}_2F_3\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}; \frac{3}{2}, 2, \frac{3}{2}; \frac{z^2}{4}\right) &= 4sh\left(\frac{z}{2}\right) I_0\left(\frac{z}{2}\right) - 4ch\left(\frac{z}{2}\right) I_1\left(\frac{z}{2}\right), \\
 {}_2F_3\left(\frac{1}{2}, \frac{\frac{1}{4}+1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{\frac{1}{2}+1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{z^2}{4}\right) &= \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) ch\left(\frac{z}{2}\right) \sqrt[4]{\frac{z}{4}} I_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{z}{2}\right), \\
 z{}_2F_3\left(\frac{\frac{1}{4}+1}{2}, \frac{\frac{1}{4}+2}{2}; \frac{\frac{1}{2}+1}{2}, \frac{\frac{1}{2}+2}{2}, \frac{3}{2}; \frac{z^2}{4}\right) &= 2\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) sh\left(\frac{z}{2}\right) \sqrt[4]{\frac{z}{4}} I_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{z}{2}\right), \\
 {}_2F_3\left(\frac{a}{2}, \frac{a+1}{2}; a, \frac{2a+1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{z^2}{4}\right) &= \Gamma\left(\frac{1}{2} + a\right) \left(\frac{z}{4}\right)^{\frac{1}{2}-a} ch\left(\frac{z}{2}\right) I_{a-\frac{1}{2}}\left(\frac{z}{2}\right), \\
 z{}_2F_3\left(\frac{a+1}{2}, \frac{a+2}{2}; \frac{2a+1}{2}, a+1, \frac{3}{2}; \frac{z^2}{4}\right) &= 2\Gamma\left(\frac{1}{2} + a\right) \left(\frac{z}{4}\right)^{\frac{1}{2}-a} sh\left(\frac{z}{2}\right) I_{a-\frac{1}{2}}\left(\frac{z}{2}\right),
 \end{aligned}$$

то мы получаем функциональные тождества для обобщенной гипергеометрической функции Гаусса  ${}_2F_3$  с модифицированной функцией Бесселя  $I_\nu$ .

### 3. Заключение

В данной статье представлено систематическое разложение вырожденной гипергеометрической функции  $E_7$  на восемь различных компонентов. С помощью этого аналитического разложения мы устанавливаем новые и общие соотношения, связывающие  $E_7$  с тройной гипергеометрической функцией Сриваставы  $F^{(3)}$ . Предложенная структура позволяет нам задавать явные формулы редукции и тождества преобразования, включающие несколько классических и обобщенных гипергеометрических функций, в том числе  $F_1$ ,  $\Xi_1$ ,  ${}_4F_3$ ,  ${}_2F_3$ ,  ${}_1F_2$ ,  ${}_1F_1$  и  $F_{2;1;1}^{2;2;2}$ . Кроме того, в качестве частных случаев наших общих результатов мы получаем несколько новых и потенциально полезных функциональных соотношений, которые включают элементарные и специальные функции, такие как экспоненциальная функция, гиперболические функции и модифицированные функции Бесселя. Таким образом, работа предлагает единый подход к выводу тождеств между различными гипергеометрическими формами и расширяет известные связи в теории специальных функций.

## Благодарность

Авторы выражают глубокую благодарность рецензенту за ряд ценных замечаний, которые способствовали существенному улучшению статьи. Также авторы благодарят редактора за внимательное отношение и помощь в подготовке финальной версии работы.

## Финансирование

Финансирование для этой работы отсутствует.

## Список литературы

- [1] M. Abramowitz and I. A. Stegun. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, Applied Mathematics Series. 1964. Washington: National Bureau of Standards. 1965. New York: Reprinted by Dover Publications.
- [2] A. Altin. Some expansion formulas for a class of singular partial differential equations. Proc. Amer. Math. Soc. 1982. Vol.85, Issue 1, pp. 42-46.
- [3] P. Appell and J. Kampé de Fériet. Fonctions Hypergeometriques et Hyperspheriques; Polynomes d'Hermite. 1926. Paris: Gauthier - Villars.
- [4] J. Barros-Neto and I. M. Gelfand. Fundamental solutions for the Tricomi operator. Duke Math. J.1999. Vol.98, Issue 3, pp. 465-483.
- [5] J. Barros-Neto and I. M. Gelfand. Fundamental solutions for the Tricomi operator II. Duke Math. J.2002. Vol. 111, Issue 3, pp. 561-584.
- [6] J. Barros-Neto and I. M. Gelfand. Fundamental solutions for the Tricomi operator III. Duke Math. J.2005. Vol. 128, Issue 1, pp. 119-140.
- [7] L. Bers. Mathematical Aspects of Subsonic and Transonic Gas Dynamics.1958. New York: Wiley.
- [8] B. C. Carlson. Some extensions of Lardner's relations between  ${}_0F_3$  and Bessel functions. SIAM J. Math. Anal. 1970. Vol. 1, Issue 2, pp. 232-242.
- [9] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger and F. G. Tricomi. Higher Transcendental Functions, Vol. 1. 1953. New York, Toronto and London: McGraw-Hill Book Company.
- [10] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger and F. G. Tricomi. Higher Transcendental Functions, Vol. 2. 1953. New York, Toronto and London: McGraw-Hill Book Company.
- [11] F. I. Frankl. Selected Works in Gas Dynamics.1973. Moscow: Nauka.
- [12] A. J. Fryant. Growth and complete sequences of generalized bi-axially symmetric potentials. J. Diff. Equa.1979. Vol. 31, Issue 2, pp. 155-164.
- [13] A. Hasanov. Fundamental solutions of generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation. Complex Variables and Elliptic Equations.2007. Vol. 52, Issue 8, pp. 673-683.
- [14] A. Hasanov. Some solutions of generalized Rassias's equation. Intern. J. Appl. Math. Stat.2007. Vol. 8, Issue M07, pp. 20-30.
- [15] A. Hasanov. Fundamental solutions for degenerated elliptic equation with two perpendicular lines of degeneration. Intern. J. Appl. Math. Stat.2008. Vol. 13, Issue 8, pp. 41-49.
- [16] A. Hasanov and E. T. Karimov. Fundamental solutions for a class of three-dimensional elliptic equations with singular coefficients. Appl. Math. Lett. 2009. Vol. 22, Issue , pp. 1828-1832.
- [17] A. Hasanov, J. M. Rassias and M. Turaev. Fundamental solution for the generalized Elliptic Gellerstedt Equation, Book: Functional Equations, Difference Inequalities and ULAM Stability Notions, Nova Science Publishers Inc. NY, USA. 2010. Vol.6, pp. 73-83.
- [18] A. Hasanov and H. M. Srivastava. Some decomposition formulas associated with the Lauricella Function and other multiple hypergeometric functions. Appl. Math. Lett.2006. Vol. 19, pp. 113-121.
- [19] A. Hasanov and H. M. Srivastava. Decomposition formulas associated with the Lauricella multivariable hypergeometric functions. Comput. Math. Appl.2007. Vol. 53, Issue 7, pp. 1119-1128.
- [20] A. Hasanov, H. M. Srivastava, and M. Turaev. Decomposition formulas for some triple hypergeometric functions. J. Math. Anal. Appl.2006. Vol. 324, pp. 955-969.
- [21] T. J. Lardner. Relations between  ${}_0F_3$  and Bessel functions. SIAM Review. 1969. Vol. 11, pp. 69-72.
- [22] T. J. Lardner and C. R. Steele. Symmetric deformations of circular cylindrical elastic shells of exponentially varying thickness. Trans. ASME Ser. E. J. Appl. Mech., 1968. Vol. 35, pp. 169-170.
- [23] G. Lohofer. Theory of an electromagnetically deviated metal sphere. 1: Absorbed power. SIAM J. Appl. Math., 1989. Vol.49, pp. 567-581.
- [24] P. A. McCoy. Polynomial approximation and growth of generalized axisymmetric potentials. Canad. J. Math.,1979. Vol. 31, Issue 1, pp. 49-59.
- [25] A. W. Niukkanen. Generalized hypergeometric series arising in physical and quantum chemical applications. J. Phys. A: Math. Gen.,1983. Vol. 16, pp. 1813-1825.
- [26] M. S. Salakhitdinov and A. Hasanov. A solution of the Neumann-Dirichlet boundary value problem for generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation. Complex Variables and Elliptic Equations.2008. Vol. 53, Issue 4, pp. 355-364.
- [27] H. M. Srivastava and P. W. Karlsson. Multiple Gaussian Hypergeometric Series. 1985. New York, Chichester, Brisbane, and Toronto: Halsted Press (Ellis Horwood Limited, Chichester), Wiley.
- [28] G. N. Watson. A Treatise on the Theory of Bessel Functions, 2nd Edi. 1944. Cambridge, London and New York: Cambridge University Press.
- [29] A. Weinstein. Discontinuous integrals and generalized potential theory. Trans. Amer. Math. Soc.,1946. Vol. 63, pp. 342-354.
- [30] A. Weinstein. Generalized axially symmetric potential theory. Bull. Amer. Math. Soc., 1953. Vol. 59, pp. 20-38.
- [31] R. J. Weinacht. Fundamental solutions for a class of singular equations. Contrib. Diff. Equa.,1964. Vol. 3, Issue 43, pp.
- [32] M. Ruzhansky, A. Hasanov, T. G. Ergashev. PDE-Systems associated with the hypergeometric functions in three variables and their particular solutions near the origin. <https://arxiv.org/abs/2410.00748>

[33] Prudnikov, A. P., Brychkov, Yu. A. and Marichev, O.I. Integrals and Series Vol. 3: More Special Functions. 1986. Moscow: Nauka. Translated from the Russian by G.G. Gould. 1990. New York, Philadelphia, London, Paris, Montreux, Tokyo, Melbourne: Gordon and Breach Science Publishers.

## Some functional identities derived from a single confluent hypergeometric function

$$E_7$$

Yuldashova Hilola, Hasanov Anvar

### Abstract

In this paper, by decomposing the confluent hypergeometric function  $E_7$  into eight parts, we demonstrate how some useful and generalized relations between the hypergeometric functions of Srivastava  $F^{(3)}$  and  $E_7$  can be obtained. It is shown that other main results are specified in order to derive certain relations between the functions  $F_1$ ,  $\Xi_1$ ,  ${}_4F_3$ ,  ${}_2F_3$ ,  ${}_1F_2$ ,  ${}_1F_1$  and  $F_{2:1;1}^{2:2;2}$ . Some other interesting functional relations involving the exponential function, hyperbolic functions, and modified Bessel functions are also considered.

### Keywords

Confluent hypergeometric function; generalized hypergeometric series; functional identities; modified Bessel functions; exponential function.

### Affiliations

Yuldashova Hilola

**Address:** Romanovskiy Institute of Mathematics

Uzbekistan Academy of Sciences

Tashkent, Uzbekistan

**e-mail:** hilolayuldashova77@gmail.com

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0009-0008-5623-0637>

Hasanov Anvar

**Address:** Romanovskiy Institute of Mathematics

Uzbekistan Academy of Sciences

Tashkent, Uzbekistan;

Ghent University

Ghent, Belgium

**e-mail:** anvarhasanov@yahoo.com

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0002-9849-4103>

# Pfaffian and Computational Analysis of Determinants of Skew-Symmetric Matrices for Homogeneous Tournaments

R.N.Ganikhodzhaev \* M.A.Tadzhieva and S.V.Maqsimova

## ABSTRACT

This paper investigates the properties of skew-symmetric matrices with a focus on the case when the order  $m = 6$ . After discussing the fundamental characteristics of skew-symmetric matrices, we derive the structure of their determinants for even values of  $m$ , particularly when  $m = 2$  and  $4$ , as preliminary cases to support our main study of the case  $m = 6$ . Furthermore, we introduce a tournament representation of such matrices, linking matrix entries to directed graphs based on their signs. We studied all non-isomorphic tournaments of order  $6$  and identified six of them as homogeneous, computed their corresponding matrices and determinants.

*Keywords:* skew-symmetric matrix, determinant, Pfaffian, homogeneous tournament, directed graph.

*AMS Subject Classification (2020):* Primary: 37B25 ; Secondary: 37C25; 37C27.

## 1. Introduction

Pfaffian theory was first named after the German mathematician Johann Friedrich Pfaff (1765–1825), but its modern form and application in graph theory emerged later. According to the literature, the theory of Pfaffian orientations was introduced by Pieter W. Kasteleyn (1924–1996) in the early 1960s [1]. Kasteleyn developed this theory to address enumeration problems in statistical physics, particularly related to the two-dimensional Ising model and dimer statistics [2].

Kasteleyn established foundational results for planar graphs and extended his approach to toroidal grids [1,2]. His work enabled the computation of perfect matching in graphs using Pfaffians, providing an efficient method to calculate determinants of skew-symmetric matrices. Skew-symmetric matrices play an essential role in various areas of mathematics and physics.

Before presenting the main results, let us start with preliminary information and a review of the literature.

A real value matrix  $A$  is called skew-symmetric if it satisfies  $A = -A^T$ , where  $A^T$  denotes the transpose of  $A$ . This implies that  $a_{ii} = 0$  and  $a_{ij} = -a_{ji}$  for all  $i \neq j$  [4].

Such matrices are inherently square and have a structure that directly influences their determinant and applications in graph theory.

The goal of this paper is to analyze skew-symmetric matrices for small even values of  $m$ , with a primary focus on  $m = 2n$ . The cases  $m = 2$ ,  $m = 4$  and  $m = 6$  are discussed briefly to provide foundational insight leading

up to our main analysis. We also explore how their structure leads to a natural representation as tournaments (complete directed graphs).

We consider a general skew-symmetric matrix of order  $m$ :

$$A = [a_{ij}] \quad \text{such that} \quad a_{ij} = -a_{ji}, \quad a_{ii} = 0$$

From this condition, it follows that all the diagonal elements of the matrix must be zero and the matrix takes the following form:

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \dots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1m} & -a_{2m} & -a_{3m} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

The determinant of a skew-symmetric matrix of odd order is always equal to zero. Now, let  $m$  be even. In this case, the determinant of an  $m$ -order skew-symmetric matrix can be expressed as the square of a homogeneous polynomial of degree  $m/2$  in its elements. The determinant of a skew-symmetric matrix of even order is expressed as the square of a polynomial known as the Pfaffian.

A graph  $G = (V, E)$  is defined as a finite set  $V$  of vertices and a set  $E$  of edges, where each edge is an unordered pair  $\{u, v\}$  of distinct vertices  $u, v \in V$ . Edges represent symmetric connections without direction, and in a simple graph, no loops or multiple edges between the same vertices are permitted [5].

Building on this, a directed graph (or digraph)  $D = (V, A)$  introduces directionality, consisting of a finite vertex set  $V$  and a set  $A$  of arcs, where each arc is an ordered pair  $(u, v)$ . An arc  $(u, v)$  indicates a directed connection from  $u$  to  $v$ . In a simple digraph, there are no loops  $(v, v)$  or multiple arcs in the same direction between the same vertices [6].

A tournament is a special type of directed graph, specifically a complete directed graph  $T = (V, A)$ , where for every pair of distinct vertices  $\{u, v\} \subset V$ , there exists exactly one arc, either  $(u, v) \in A$  or  $(v, u) \in A$ . This ensures a unique directed relationship between every pair of vertices. For a tournament with  $n$  vertices, the number of arcs is  $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$  [3].

Let  $x_1, x_2$  be the vertices of a tournament. The notation  $x_1 \rightarrow x_2$  means that the edge connecting  $x_1$  and  $x_2$  is directed from  $x_1$  to  $x_2$ . A finite sequence of vertices  $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_p$  is called a *path* if  $x_i \neq x_j$  for all  $i \neq j$ . A *cycle* is a closed path, i.e.,  $x_p = x_1$ .

A tournament is called *strong* if, for any vertices  $x, y \in Y$ , there exists a path from  $x$  to  $y$ .

A tournament that contains no cycles is called *transitive*.

A tournament is called *homogeneous* if every sub-tournament is either strong or transitive.

Let  $G = (V, E)$  be a graph, where  $V$  is the set of vertices and  $E$  is the set of edges. A *Hamiltonian cycle* in  $G$  is a cycle that:

$$v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_n \rightarrow v_1$$

where:

- $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} = V$ , meaning all vertices in the graph are visited exactly once.
- For each  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ , the edges  $(v_i, v_{i+1}) \in E$ .
- The edge  $(v_n, v_1) \in E$ , completing the cycle.

Two tournaments are isomorphic if there is a relabelling of the vertices that preserves the directed edges. That is, if there exists a bijection (one-to-one mapping)  $f : V_1 \rightarrow V_2$  between the vertex sets of two tournaments  $T_1$  and  $T_2$  such that:

$$x \rightarrow y \text{ in } T_1 \iff f(x) \rightarrow f(y) \text{ in } T_2.$$

If no such mapping exists, the tournaments are non-isomorphic. The number of non-isomorphic tournaments grows as  $m$  increases. The following table in Moon [3] shows the number of all non-isomorphic tournaments:

| $m$ | Non-isomorphic tournaments |
|-----|----------------------------|
| 2   | 1                          |
| 3   | 2                          |
| 4   | 4                          |
| 5   | 12                         |
| 6   | 56                         |

From the table, it can be seen that when  $m=6$ , the number of non-isomorphic tournaments is 56. Out of these 56 tournaments, we took 6 homogeneous ones; we find the determinants of their corresponding skew-symmetric matrices using the Pfaffian.

## 2. Pfaffian

**Definition 2.1.** [1] For a  $2n \times 2n$  skew-symmetric matrix  $A$  (that is,  $A^T = -A$ ), the Pfaffian  $\text{Pf}(A)$  is a polynomial in the matrix entries such that its square is equal to the determinant:  $\text{Pf}(A)^2 = \det(A)$ .

For an odd-dimensional skew-symmetric matrix ( $m \times m$ ,  $m$  odd), the Pfaffian is defined as zero because  $\det(A) = 0$ .

Explicitly, for a  $2n \times 2n$  matrix  $A = (a_{ij})$ , the Pfaffian is:

$$\text{Pf}(A) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\sigma \in S_{2n}} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(2i-1), \sigma(2i)},$$

where  $S_{2n}$  is the symmetric group, and  $\text{sgn}(\sigma)$  is the signature of permutation  $\sigma$ . Alternatively, it can be expressed on partitions of  $\{1, \dots, 2n\}$  into pairs. For a matrix  $0 \times 0$ ,  $\text{Pf}(A) = 1$  is the convention.

The expansion of  $\text{Pf}(A)^2$  results in 56 monomials involving six variables each. Listing all these terms explicitly is feasible but lengthy; here we provide symbolic representation:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{56} c_i \cdot a_{i_1 i_2} a_{i_3 i_4} a_{i_5 i_6} a_{j_1 j_2} a_{j_3 j_4} a_{j_5 j_6}.$$

### Examples:

For a  $2 \times 2$  skew-symmetric matrix  $A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\text{Pf}(A) = a_{12}$ .

For a  $4 \times 4$  skew-symmetric matrix  $A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\text{Pf}(A) = a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23}$ .

The determinant of a  $6 \times 6$  skew-symmetric matrix consists of the square of the following Pfaffian expression:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 & a_{45} & a_{46} \\ -a_{15} & -a_{25} & -a_{35} & -a_{45} & 0 & a_{56} \\ -a_{16} & -a_{26} & -a_{36} & -a_{46} & -a_{56} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \text{Pf}(A) = & a_{12}a_{34}a_{56} - a_{12}a_{35}a_{46} + a_{12}a_{36}a_{45} + a_{13}a_{24}a_{56} \\ & - a_{13}a_{25}a_{46} + a_{13}a_{26}a_{45} + a_{14}a_{23}a_{56} - a_{14}a_{25}a_{36} \\ & + a_{14}a_{26}a_{35} + a_{15}a_{23}a_{46} - a_{15}a_{24}a_{36} + a_{15}a_{26}a_{34} \\ & + a_{16}a_{23}a_{45} - a_{16}a_{24}a_{35} + a_{16}a_{25}a_{34}. \end{aligned}$$

Hence, the determinant of the skew-symmetric matrix is equal to the square of the Pfaffian:

$$\det(A) = \text{Pf}(A)^2.$$

### 3. Main results

#### 3.1. Python script for tournament graph generation and visualization

This Python script automates the creation and visualization of tournament graphs, which are complete directed graphs used in combinatorics and game theory. The script allows users to input a skew-symmetric adjacency matrix (where  $a_{ij} = -a_{ji}$ ), ensuring the graph represents a valid tournament. Using networkx and matplotlib, the program generates an interactive visualization of the graph, displaying nodes in a circular layout with directed edges. Additionally, the script produces LaTeX Tikz code, enabling seamless integration into academic papers or presentations. By converting the adjacency matrix into a structured TikZ diagram, researchers can efficiently document and analyze tournament structures without manual drawing. This tool is particularly useful for mathematicians and computer scientists studying graph theory, game tournaments, or discrete dynamical systems, as it bridges computational analysis with formal typesetting. The generated LaTeX output can be directly compiled to produce publication-ready figures, streamlining the workflow for theoretical research.

**Key Features:**

**User-Friendly Input:** The script prompts for the upper triangular part of the adjacency matrix, automatically enforcing skew-symmetry.

**Visualization:** Use networkx to render the graph, aiding in immediate visual verification.

**LaTeX Integration:** Output TikZ code for high-quality vector graphics in academic documents.

**Reproducibility:** Saves the LaTeX code to a file, ensuring that the results are reproducible and editable.

This approach exemplifies how scripting can enhance mathematical research by combining computational tools with traditional publishing formats. Future extensions could include automated analysis of graph properties (e.g., Hamiltonian cycles) or support for weighted edges.

The program consists of the following steps:

#### 1. Construction of a Skew-Symmetric Matrix.

The skew-symmetric matrix satisfies the following condition:

$$A^T = -A$$

This means that if  $a_{ij} = 1$ , then  $a_{ji} = -1$ . The user only inputs the upper triangular values, and the rest are automatically filled:

```
def get_adjacency_matrix(n):
    A = np.zeros((n, n), dtype=int)
    for i in range(n):
        row = list(map(int, input(f"Row {i+1} (only {n-i-1} values): ").split()))
        for j in range(i + 1, n):
            A[i, j] = row[j - (i + 1)]
            A[j, i] = -A[i, j]
    return A
```

## 2. Drawing the Tournament Graph.

The following code uses `networkx` and `matplotlib` to visualize the tournament graph:

```
def draw_tournament_graph(A):
    G = nx.DiGraph()
    for i in range(len(A)):
        for j in range(len(A)):
            if A[i, j] == 1:
                G.add_edge(i, j)
    pos = nx.circular_layout(G)
    nx.draw(G, pos, with_labels=True, node_color='lightblue', edge_color='gray',
            arrows=True)
    plt.show()
```

## 3. LaTeX TikZ Code Generation.

To use the tournament graph in academic papers we need to draw it in format, because of this we generate TikZ code of it:

```
def adjacency_to_latex(A):
    latex_code = "\\begin{center}\\textbf{T1}\\n"
    latex_code += "\\begin{tikzpicture}[->,>=stealth',shorten >=1pt,auto,
    node distance=1cm,\\n"
    latex_code += "thick,main node/.style={circle,draw,minimum size=0.5cm,
    font=\\sffamily\\scriptsize}]\\n\\n"
    angles = np.linspace(0, 360, len(A), endpoint=False)
    for i in range(len(A)):
        latex_code += f"\\node[main node] ({i}) at ({angles[i]}:1.5cm)
        {{{i+1}}};\\n"
    for i in range(len(A)):
        for j in range(len(A)):
            if A[i, j] == 1:
                latex_code += f"\\path ({i}) edge ({j});\\n"
    latex_code += "\\end{tikzpicture}\\end{center}"
    return latex_code
```

## 4. Main function.

The main function integrates all components. It receives input data and outputs the final result.

```

def main():
    n = int(input("Enter the number of nodes: "))
    A = get_adjacency_matrix(n)
    print("Adjacency Matrix:")
    print(A)
    draw_tournament_graph(A)
    latex_code = adjacency_to_latex(A)
    print("\nLaTeX Code:")
    print(latex_code)
    with open("tournament_graph.tex", "w") as f:
        f.write(latex_code)
    print("\nLaTeX code saved to tournament_graph.tex")

```

After program run:

- User inputs number of nodes;
- Skew-symmetric matrix is generated;
- Graph corresponding the matrix is drawn;
- LaTeX TikZ code is generated and saved into file.

Example execution: If  $n = 5$  and with input:

```

Row 1 (only 4 values): 1 1 -1 1
Row 2 (only 3 values): -1 -1 1
Row 3 (only 2 values): 1 1
Row 4 (only 1 values): -1
Row 5 (only 0 values):

```

The resulting matrix:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

The graph of this skew-symmetric matrix is shown in Figure 1.

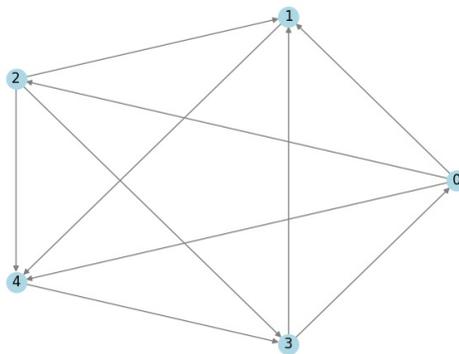


Figure 1. Tournament graph generated from the skew-symmetric matrix using Python.

The program produces a ready-to-use TikZ code:

LaTeX Code:

```
\begin{center}\textbf{T}
\begin{tikzpicture}[->,>=stealth',shorten >=1pt,auto,node distance=1cm,
thick,main node/.style={circle,draw,minimum size=0.5cm, font=\sffamily\scriptsize}]

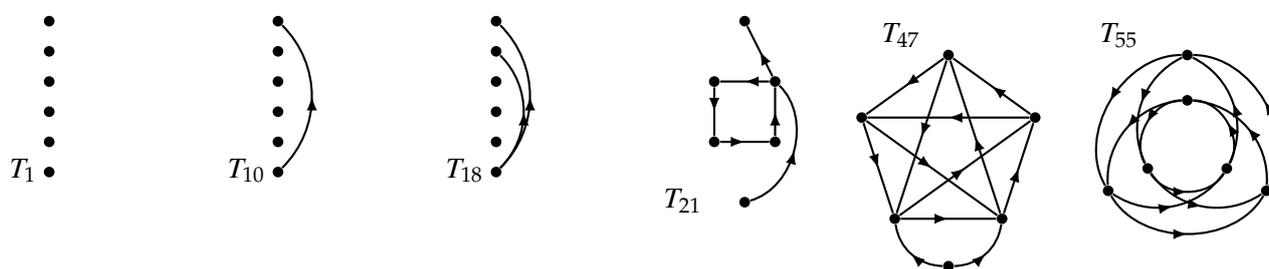
\node[main node] (0) at (0.0:1.5cm) {1};
\node[main node] (1) at (72.0:1.5cm) {2};
\node[main node] (2) at (144.0:1.5cm) {3};
\node[main node] (3) at (216.0:1.5cm) {4};
\node[main node] (4) at (288.0:1.5cm) {5};

\path (0) edge (1);
\path (0) edge (2);
\path (0) edge (4);
\path (1) edge (4);
\path (2) edge (1);
\path (2) edge (3);
\path (2) edge (4);
\path (3) edge (0);
\path (3) edge (1);
\path (4) edge (3);
\end{tikzpicture}\end{center}
```

This Python program enables the export of a tournament graph for use in LaTeX. The generated program allows the user to create visually appealing diagrams in a LaTeX environment (e.g., Overleaf or other LaTeX compilers).

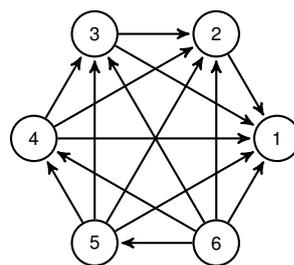
### 3.2. Homogeneous Tournaments

In J. Moon’s monograph [3], fifty-six non-isomorphic tournament graphs with six vertices are presented, each possessing distinct properties. In this article, we have used these tournament graphs to identify and separate homogeneous tournaments among them. The following drawing drawings are used to illustrate tournaments. Not all of the arcs have been included in the drawings; if an arc joining two nodes has not been drawn, then it should be understood that the arc is oriented from the higher node to the lower node.



To study the dynamics of homogeneous tournaments, we visualized the graphs in a convenient form using Python software. Additionally, we calculated the determinants of the corresponding skew-symmetric matrices for these homogeneous tournaments using the Pfaffian method.

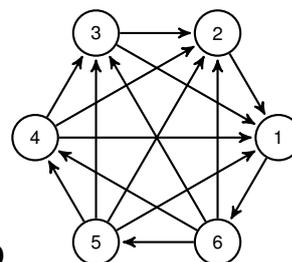
$$T_1 = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 & a_{45} & a_{46} \\ -a_{15} & -a_{25} & -a_{35} & -a_{45} & 0 & a_{56} \\ -a_{16} & -a_{26} & -a_{36} & -a_{46} & -a_{56} & 0 \end{bmatrix},$$



**T1**

$$\det(T_1) = (a_{16}a_{25}a_{34} - a_{15}a_{26}a_{34} + a_{12}a_{56}a_{34} - a_{16}a_{24}a_{35} + a_{14}a_{26}a_{35} + a_{15}a_{24}a_{36} - a_{14}a_{25}a_{36} + a_{16}a_{23}a_{45} - a_{13}a_{26}a_{45} + a_{12}a_{36}a_{45} - a_{15}a_{23}a_{46} + a_{13}a_{25}a_{46} - a_{12}a_{35}a_{46} + a_{14}a_{23}a_{56} - a_{13}a_{24}a_{56})^2.$$

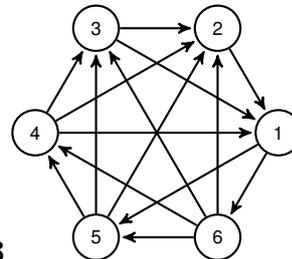
$$T_{10} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & -a_{16} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 & a_{45} & a_{46} \\ -a_{15} & -a_{25} & -a_{35} & -a_{45} & 0 & a_{56} \\ a_{16} & -a_{26} & -a_{36} & -a_{46} & -a_{56} & 0 \end{bmatrix},$$



**T10**

$$\det(T_{10}) = (-a_{14}a_{26}a_{35} + a_{12}a_{46}a_{35} + a_{14}a_{25}a_{36} + a_{13}a_{26}a_{45} - a_{12}a_{36}a_{45} + a_{16}(a_{25}a_{34} - a_{24}a_{35} + a_{23}a_{45}) - a_{13}a_{25}a_{46} + a_{15}(a_{26}a_{34} - a_{24}a_{36} + a_{23}a_{46}) - a_{14}a_{23}a_{56} + a_{13}a_{24}a_{56} - a_{12}a_{34}a_{56})^2.$$

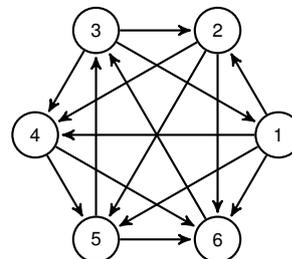
$$T_{18} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & -a_{15} & -a_{16} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 & a_{45} & a_{46} \\ a_{15} & -a_{25} & -a_{35} & -a_{45} & 0 & a_{56} \\ a_{16} & -a_{26} & -a_{36} & -a_{46} & -a_{56} & 0 \end{bmatrix},$$



**T18**

$$\det(T_{18}) = (-a_{16}a_{25}a_{34} + a_{15}a_{26}a_{34} + a_{12}a_{56}a_{34} + a_{16}a_{24}a_{35} + a_{14}a_{26}a_{35} - a_{15}a_{24}a_{36} - a_{14}a_{25}a_{36} - a_{16}a_{23}a_{45} - a_{13}a_{26}a_{45} + a_{12}a_{36}a_{45} + a_{15}a_{23}a_{46} + a_{13}a_{25}a_{46} - a_{12}a_{35}a_{46} + a_{14}a_{23}a_{56} - a_{13}a_{24}a_{56})^2.$$

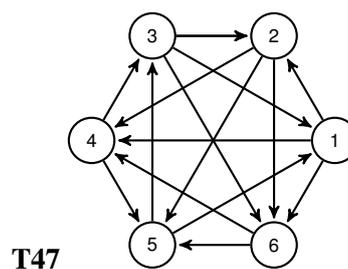
$$T_{21} = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & a_{13} & -a_{14} & -a_{15} & -a_{16} \\ a_{12} & 0 & a_{23} & -a_{24} & -a_{25} & -a_{26} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & -a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & 0 & -a_{45} & -a_{46} \\ a_{15} & a_{25} & -a_{35} & a_{45} & 0 & -a_{56} \\ a_{16} & a_{26} & -a_{36} & a_{46} & a_{56} & 0 \end{bmatrix},$$



**T21**

$$\det(T_{21}) = (-a_{16}a_{25}a_{34} + a_{15}a_{26}a_{34} - a_{12}a_{56}a_{34} - a_{16}a_{24}a_{35} + a_{14}a_{26}a_{35} + a_{15}a_{24}a_{36} + a_{14}a_{25}a_{36} + a_{16}a_{23}a_{45} - a_{13}a_{26}a_{45} + a_{12}a_{36}a_{45} - a_{15}a_{23}a_{46} + a_{13}a_{25}a_{46} + a_{12}a_{35}a_{46} + a_{14}a_{23}a_{56} - a_{13}a_{24}a_{56})^2.$$

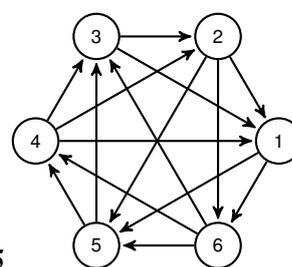
$$T_{47} = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & a_{13} & -a_{14} & a_{15} & -a_{16} \\ a_{12} & 0 & a_{23} & -a_{24} & -a_{25} & -a_{26} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} & a_{35} & -a_{36} \\ a_{14} & a_{24} & -a_{34} & 0 & -a_{45} & a_{46} \\ -a_{15} & a_{25} & -a_{35} & a_{45} & 0 & a_{56} \\ a_{16} & a_{26} & a_{36} & -a_{46} & -a_{56} & 0 \end{bmatrix},$$



**T47**

$$\det(T_{47}) = (a_{14}a_{26}a_{35} + a_{12}a_{46}a_{35} - a_{14}a_{25}a_{36} + a_{13}a_{26}a_{45} + a_{12}a_{36}a_{45} - a_{16}a_{25}a_{34} - a_{16}a_{24}a_{35} - a_{16}a_{23}a_{45} + a_{13}a_{25}a_{46} - a_{15}a_{26}a_{34} - a_{15}a_{24}a_{36} + a_{15}a_{23}a_{46} + a_{14}a_{23}a_{56} - a_{13}a_{24}a_{56} + a_{12}a_{34}a_{56})^2.$$

$$T_{55} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & -a_{15} & -a_{16} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} & -a_{25} & -a_{26} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 & a_{45} & a_{46} \\ a_{15} & a_{25} & -a_{35} & -a_{45} & 0 & a_{56} \\ a_{16} & a_{26} & -a_{36} & -a_{46} & -a_{56} & 0 \end{bmatrix},$$



**T55**

$$\det(T_{55}) = (a_{16}a_{25}a_{34} - a_{15}a_{26}a_{34} + a_{12}a_{56}a_{34} + a_{16}a_{24}a_{35} - a_{14}a_{26}a_{35} - a_{15}a_{24}a_{36} + a_{14}a_{25}a_{36} - a_{16}a_{23}a_{45} + a_{13}a_{26}a_{45} + a_{12}a_{36}a_{45} + a_{15}a_{23}a_{46} - a_{13}a_{25}a_{46} - a_{12}a_{35}a_{46} + a_{14}a_{23}a_{56} - a_{13}a_{24}a_{56})^2.$$

#### 4. Conclusion

In this paper, we conducted a comprehensive analysis of the determinants of skew-symmetric matrices associated with homogeneous tournaments, utilizing the Pfaffian method for computation. Using Python scripting with libraries such as NetworkX and Matplotlib, we successfully visualized homogeneous tournament graphs with the help of the NetworkX library and enabled their visualization using the Matplotlib library. The automated generation of LaTeX TikZ code further facilitated the production of publication-ready diagrams, enhancing the efficiency of documenting complex tournament structures. In our future work, we will continue to expand these methods utilizing the results obtained above to model the dynamics of strongly homogeneous tournaments. Using computational tools such as Python scripts, we plan to implement matrix input through a graphical user interface (GUI), identify tournament properties (e.g., Hamiltonian cycles), and automatically generate random tournament graphs.

#### Acknowledgements

We, the authors of the paper Analysis of the dynamics of quadratic mappings of a simplex with skew-symmetric matrices that are not in general position would like to thank the Tashkent State Transport University for the opportunity to publish our work.

## References

- [1] Kasteleyn, P. W. *Graph Theory and Crystal Physics*. In Graph Theory and Theoretical Physics. (1967).
- [2] Kasteleyn, P. W. *Dimer Statistics and Phase Transitions*. Journal of Mathematical Physics. **4(2)**, p.287–293,(1963).
- [3] Moon, J. W. *Topics on Tournaments*, New York: Holt, Rinehart and Winston, p. 112. (1968).
- [4] Horn, R. A., & Johnson, C. R. *Matrix Analysis*. Cambridge University. (2012).
- [5] Harary F., Palmer E.M. *Graphical enumeration*. Academic Press New York and London. (1973).
- [6] G. Chartrand and H. Jordon and V. Vatter and P. Zhang. *Graphs and Digraphs*. CRC Press. p. 364. (2024).
- [7] Koh Kh., Dong F., and Tay E.G. *Introduction to graph theory*. World Scientific. p. 308. (2024).
- [8] Ganikhodzhaev R.N. *Quadratic stochastic operators, Lyapunov function and tournaments*, Acad. Sci. Sb. Math., **76(2)**, p. 489-506. (1993)
- [9] Ganikhodzhaev R.N., Tadzhiyeva M.A. *Stability of fixed points of discrete dynamic systems of Volterra type*. AIP Conference Proceedings, 2021. V. **2365**. P. 060005-1, 060005-7. <https://doi.org/10.1063/5.0057979>. .
- [10] Ganikhodzhaev R.N., Tadzhiyeva M.A., Eshmamatova D.B. *Dynamical Properties of Quadratic Homeomorphisms of a Finite-Dimensional Simplex*. Journal of Mathematical Sciences, **245(3)**. P. 398-402.

## Affiliations

GANIKHODZHAEV R.N.

**ADDRESS:** Doctor of physical and mathematical sciences, professor of the department of Mathematics, National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan.

**E-MAIL:** [rasulganikhodzhaev@gmail.com](mailto:rasulganikhodzhaev@gmail.com)

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0001-6551-5257>

TADZHIEVA M.A.

**ADDRESS:** PhD, head of the department of higher mathematics, Tashkent State Transport University, Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Senior Researcher. Tashkent, Uzbekistan.

**E-MAIL:** [mohbonut@mail.ru](mailto:mohbonut@mail.ru)

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0001-9232-3365>

MAQSIMOVA S.V.

**ADDRESS:** Doctorate student of the department of Mathematics, Andijan State University, Andijan, Uzbekistan.

**E-MAIL:** [hayitovas20@gmail.com](mailto:hayitovas20@gmail.com)

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0009-0007-0083-0978>