



UZJMCS



Tashkent State
Transport University

***Uzbekistan Journal of
Mathematics and
Computer Science***



ujmcs.tstu.uz

2025

Volume: 1

Issue: 2

Tashkent 2025

**TASHKENT STATE TRANSPORT
UNIVERSITY**



**Uzbekistan Journal of Mathematics
and Computer Science**

2025

Volume: 1

Issue: 2

ujmcs.tstu.uz

Tashkent State Transport University

Uzbekistan Journal of Mathematics and Computer Science

Volume 1, Issue 2, November, 2025

Uzbekistan Journal of Mathematics and Computer Science is a prestigious publication established by Tashkent State Transport University (TSTU). The journal focuses on mathematics, computer sciences, and physics, and aims to disseminate cutting-edge research and applied studies in the field of transport and related fields. Located at 1 Temiryoʻlchilar street, TSTU Printing House, Tashkent, Uzbekistan, 100167, the journal operates as a dynamic platform for both national and international academic and professional communities. Submissions and inquiries can be sent to the editorial team at ujmcs.tstu.uz.

Uzbekistan Journal of Mathematics and Computer Science publishes pioneering scientific and applied research conducted by universities, higher education institutions, research centers, and institutes in the fields of mathematics and computer science, both within the Republic of Uzbekistan and internationally. This journal serves as a vital platform for sharing primary scientific results from doctoral dissertations, including Doctor of Philosophy (PhD) and Doctor of Science (DSc) in the physics, mathematics, and computer sciences.

The journal is published twice a year and provides a wide range of high-quality research articles in various fields. These fields include, but are not limited to:

- Algebra
- Analysis
- Functional analysis and operator theory
- Geometry
- Topology
- Differential equations
- Mathematical physics
- Integral equations
- Combinatorics
- Probability theory
- Financial Mathematics
- Econometrics
- Numerical analysis
- Applied mathematics
- Mathematical and computer modeling
- Computational and discrete mathematics
- Dynamical systems
- Mathematical statistics
- Artificial intelligence
- Information Security
- Computational linguistics
- Information technologies in education
- Computational sciences and high-performance computing
- Cryptology
- Computer graphics
- Database
- Theory of algorithms
- Computer programming
- Information security
- Programming languages and compilers
- Applied Computer Science
- Computer networks
- Software development and programming

Articles are published in three languages: Russian and English, ensuring wide accessibility and facilitating cross-cultural academic exchange. **Uzbekistan Journal of Mathematics and Computer Science**, a leading publication in its field, continues to be an essential platform for sharing knowledge.

Editorial Team

Name	Scientific field	E-mail	Country
Editor in Chief			
<u>Eshmamatova Dilfuza</u>	Dynamic systems, graph theory, problems of mathematical biology, genetics, epidemiology and ecology	24dil@mail.ru	Uzbekistan
Deputy editor in Chief			
<u>Artikbayev Abdullaaziz</u>	Geometry and topology, Non-Euclidean Geometry	aartykbaev@mail.ru	Uzbekistan
Managing editor			
<u>Ismoilov Sherzodbek</u>	Geometry and topology, Riemannian manifold, Pseudo-Riemannian manifold.	sh.ismoilov@nuu.uz	Uzbekistan
Technical editor			
<u>Turdiyev Sirojiddin</u>	-	s.turdiyev@alumni.nsu.ru	Uzbekistan
Editors			
<u>Zakirov Botir</u>	Functional analysis, operator theory, theory Banach-Kantorovich space	botirzakirov@list.ru	Uzbekistan
<u>Begmatov Akrom</u>	Ill-posed problems of mathematical physics and analysis, weakly and strongly ill-posed problems of integral geometry, integral equations, tomography, d'Alembert maps	akrambegmatov@mail.ru	Uzbekistan
<u>Azamov Abdulla</u>	Dynamical Systems, Game Theory, Differential Equations	abdulla.azamov@gmail.com	Uzbekistan
<u>Formanov Shokir</u>	Probability Theory and Mathematical Statistics	shakirformanov@yandex.ru	Uzbekistan
<u>Rozikov Utkir</u>	Functional analysis, mathematical physics	rozikovu@mail.ru	Uzbekistan

<u>Shadimetov Kholmatvay</u>	Computational mathematics	kholmatshadimetov@mail.ru	Uzbekistan
<u>Hayotov Abdullo</u>	Computational mathematics	a.hayotov@centralasian.uz	Uzbekistan
<u>Aripov Mirsaid</u>	Database Theory of algorithms Computer programming Information security	mirsaidaripov@mail.ru	Uzbekistan
<u>Ravshanov Normaxmat</u>	Computational mathematics	ravshanzade-09@mail.ru	Uzbekistan
<u>Chilin Vladimir</u>	Functional analysis, noncommutative integration, operator theory, theory Banach- Kantorovich space	vladimirchilin@gmail.com	Uzbekistan
<u>Rakhmonov Zafar</u>	Mathematical modeling, numerical methods	zraxmonov@inbox.ru	Uzbekistan
<u>Sharipov Olimjon</u>	Probability theory and mathematical statistics	osharipov@mail.ru	Uzbekistan
<u>Raimova Gulnora</u>	Probability Theory and Mathematical Statistics, Quantitative Methods in Economics, Econometrics, Financial Mathematics, Systems Analysis, Decision Making in Management	raimova27@gmail.com	Uzbekistan
<u>Sharipov Anvarjon</u>	Geometry and topology	asharipov@inbox.ru	Uzbekistan
<u>Ashurov Ravshan</u>	Mathematical Analysis, Differential Equations, Mathematical Physics	ashurovr@gmail.com	Uzbekistan
<u>Karimov Erkin</u>	Partial differential equations, Special functions, Direct and inverse problems	erkinjon@gmail.com	Uzbekistan
<u>Uteuliev Nietbay</u>	Mathematical modeling	utewlievn@mail.ru	Uzbekistan
<u>Azimov Jahongir</u>	Theory of branching random processes, stochastic models with a discrete set of states, asymptotic analysis of statistical estimates	azimovjb@gmail.com	Uzbekistan

<u>Isanov Rovshanbek</u>	Inverse problems of equations of mathematical physics	diyora.isanova.97@bk.ru	Uzbekistan
<u>Kasimov Shuxrat</u>	Fuel balance of energy, solid fuels	shuxrat1812@mail.ru	Uzbekistan
<u>Kendjaev Ravshan</u>	Probability theory, mathematical statistics	lovsan63@mail.ru	Uzbekistan
<u>Sharipova Lola</u>	Probability theory, partial differential equations	lolaxon@gmail.com	Uzbekistan
<u>Tuychiyeva Savyora</u>	Mathematical modeling of dynamic problems of porous media, Mathematical analysis	sayyora-tohirzoda@mail.ru	Uzbekistan
<u>Yusupov Farrux</u>	Dynamic systems, graph theory, problems of mathematical biology, genetics, epidemiology and ecology	farrukhyusupovchambil@mail.ru	Uzbekistan
<u>Khudoykulov Shohruh Shuhratovich</u>	Differential Equations, Mathematical Physics	xudoykulov1194@gmail.com	Uzbekistan
<u>Sipatdinova Biybinaz Kenesbayevna</u>	Differential Equations, Mathematical Physics	sbiybinaz@mail.ru	Uzbekistan
<u>Mokhbonu Tadzhieva Akram khizi</u>	Dynamic systems, graph theory, problems of mathematical biology, genetics, epidemiology and ecology	mohbonut@mail.ru	Uzbekistan
<u>Turdiyev Malikjon</u>	Deformable solid mechanics	malikjon_ts@mail.ru	Uzbekistan
International editors			
<u>Aleksey Tuzilin</u>	Differential geometry, calculus of variations, graph theory and combinatorics	alexey.tuzhilin@yahoo.com	Russian Federation
<u>Josef Mikeš</u>	Riemannian geometry, geodesic mappings, holomorphically projective mappings, F-planar mappings	josef.mikes@upol.cz	Czech Republic
<u>Umar Islambekov</u>	Statistics, Machine Learning, Applied Topology, Data Science	yagol@physics.msu.ru	Russian Federation

<u>Марат Гаязович Юмагулов</u>	Differential equations, nonlinear oscillations, bifurcations	yum_mg@mail.ru	Russian Federation
<u>Юрий Степанович Волков</u>	Approximation theory, splines, numerical analysis	volkov@math.nsc.ru	Russian Federation
<u>Fedor Sukochev</u>	Theory noncommutative symmetric spaces, operator theory	f.sukochev@unsw.edu.au	Australia
<u>Tursun Yuldashev</u>	Differential equations, computational mathematics, approximation methods of optimal control	tursun.k.yuldashev@gmail.com	Kyrgyzstan
<u>Alexander Katz</u>	Functional analysis, operator theory	katza@stjohns.edu	USA
<u>Semyon Litvinov</u>	Theory noncommutative symmetric spaces, operator theory	snl2@psu.edu	USA
<u>Nurlan Temirbekov</u>	Computational mathematics, mathematical modeling	temirbekov@rambler.ru	Kazakhstan
<u>Farrukh Mukhamedov</u>	Operator algebras, Functional analysis, Dynamical systems	farrukh.m@uaeu.ac.ae	UAE
<u>Allaberen Ashyralyev</u>	Delay differential equations, numerical functional analysis, stochastic differential equations	aallaberen@gmail.com	Turkey
<u>Dilmurat Azimov</u>	Trajectory optimization, guidance, navigation and control, analytical methods of integration	azimov@hawaii.edu	USA

CONTENTS

A.X. Бегматов, А.С. Исмоилов. Об устойчивости решения задачи интегральной геометрии по неполным данным в пространстве R^4	1
A. Y. Khamrayev, A.R. Doniyorov. Non hyperbolic trajectory of a quasi-non Volterra cubic stochastic operator	12
Мирзаев И., Турдиев М.С., Рахматов Н.Б. Защита Зданий от Сейсмических Волн с Помощью Сухого Трения и Демпферов	19
D.B.Eshmamatova, A.A.Alimov, M.A.Tadzhieva. Analysis of the dynamics of quadratic mappings of a simplex with skew-symmetric matrices that are not in general position	25
А. Артикбаев, Г. Холмуродова. Решение уравнения Монжа-Ампера с использованием геометрических преобразований	36
М.З. Саъдуллаева, Ш. Салимов, Т. Мавланов. Исследование Устойчивости Цилиндрических Оболочек, Связанных с Кольцевой Пластиной	42
Т. К. Юлдашев, М. А. Тлеубергенова, А. К. Танкеева, А. Молюбайкызы. Двухточечная краевая задача для системы функционально-дифференциальных уравнений с максимумами	49
A.Elmuurodov, A.Sotvoldiyev. Structure-preserving scheme for two-phase convection reaction diffusion system	58
Shomurodov Nozmbek, To'rayev Alimardon. Asymptotic Properties of the Wilcoxon-Mann-Whitney Statistics	75
М.С. Расулов, М.Т. Умирхонов. Задача со свободной границей для уравнения нелинейной диффузии	82
Yumagulov Marat, Gabdrakhmanov Robert. Multiple Turing and Andronov-Hopf Bifurcations in a Reaction-Diffusion System	90
Sh. Kh. Eshtemirova. Idempotent probability measures spaces on Π-complete spaces and maps	98
С.З. Джамалов, Х.Ш. Туракулов, Б.К. Сипатдинова. О гладкости периодической краевой задачи для трёхмерного уравнения Чаплыгина в неограниченном параллелепипеде	105
Эшкабилов Алишер, Рауфов Хумоюн, Шамсиева Угиллой. Определение оптимального состава портфеля с помощью математической модели финансового портфеля	114

Об устойчивости решения задачи интегральной геометрии по неполным данным в пространстве $\mathbb{R}^4$

Бегматов Акрам Х.* Исмоилов Алишер С.

Аннотация

В статье изучается задача восстановления функции по интегралам по прямым, лежащим в плоскостях, проходящих через фиксированную точку в $\mathbb{R}^4$, при условии, что направления в каждой плоскости ограничены сектором. Рассматривается постановка с неполными данными и доказываются теоремы об единственности и логарифмической устойчивости. Отмечаются геометрические особенности задачи.

Ключевые слова: интегральная геометрия; неполные данные; устойчивость; гармоническая мера; грассманиан.

Предметная классификация AMS (2020): 44A12; 35R30; 65R32.

Введение

Задачи интегральной геометрии представляют собой класс задач, в которых по значениям интегралов неизвестной функции по определённым семействам подмногообразий требуется восстановить саму функцию. Наиболее известным примером является задача восстановления функции по её значениям на прямых — рентгеновское преобразование. Такие задачи находят широкое применение в томографии, геофизике, астрофизике и других прикладных областях.

Однако в большинстве случаев задачи интегральной геометрии оказываются некорректными. В классической монографии М.М. Лаврентьева [2] была предложена классификация задач интегральной геометрии на слабо и сильно некорректные. Задачи, в которых оператор обращения не является непрерывным даже в пространствах с конечным числом производных, относятся к сильно некорректным.

В более ранней работе [1] была исследована задача восстановления функции по её значениям рентгеновского преобразования при ограниченном наборе направлений в плоском секторе. В работе была получена логарифмическая оценка устойчивости в условиях сильной некорректности задачи.

Метод, основанный на применении гармонической меры и геометрического построения пучков прямых, оказался актуальным и применимым в ряде последующих исследований. В частности, в статьях Салазара [3, 4], Уотерса и Ульмана [5], а также в ряде работ Стефанова, Яна, Сало и др. [6–10] методологические идеи, изложенные в [1], использовались как основа для анализа устойчивости в задачах геодезического рентгеновского преобразования, в задачах с временными коэффициентами, а также в задачах на многообразиях с лоренцевой метрикой.

Для полноты изложения кратко напомним постановку задачи и основные результаты, полученные нами ранее в работе [1].

Рассматривалась задача восстановления функции $f \in C_0^5(\Omega)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область, по значениям её интегралов по прямым, проходящим через фиксированную точку x_0 и направленным вдоль неполного множества направлений $\omega \in \Gamma \subset S^2$. Это соответствует рентгеновскому преобразованию:

$$Rf(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0 + s\omega) ds, \quad \omega \in \Gamma.$$

При этом множество направлений Γ описывается как сектор на сфере с центральным углом $2\theta_0$, что приводит к постановке задачи с неполными данными.

В указанной работе была доказана теорема об единственности восстановления функции, а также получена логарифмическая оценка устойчивости решения. Основным инструментом служило сведение задачи к двумерной с помощью конформного отображения сектора на полудиск и применение теории гармонической меры в плоскости.

В настоящей работе рассматривается задача восстановления функции по значениям её интегралов по прямым, проходящим через фиксированную вершину двуполостного конуса направлений — точку $x_0 \in \mathbb{R}^4$, расположенную вне замкнутой области B , содержащей носитель искомой функции. Рассматриваются значения интегралов этой функции по прямым, проходящим через x_0 и направленным вдоль неполного множества направлений ω в каждой двумерной плоскости, содержащей x_0 .

В пространстве $\mathbb{R}^4$ множество возможных двумерных направлений описывается грассманианом $G(2, 4)$ — многообразием всех двумерных линейных подпространств четырёхмерного пространства. Каждая точка этого многообразия соответствует плоскости, проходящей через x_0 . В каждой из этих плоскостей рассматриваются прямые, ограниченные заданным углом, что позволяет свести задачу устойчивости к двумерной, где применимы методы анализа на основе гармонической меры. Полученные локальные оценки затем объединяются путём интегрирования по $G(2, 4)$, что и даёт глобальную оценку устойчивости.

Однако важно подчеркнуть, что переход от трёхмерного к четырёхмерному пространству $\mathbb{R}^4$ требует не просто обобщения ранее полученных результатов, а постановки принципиально новой задачи. Методы, использованные в [1] для доказательства устойчивости задачи с неполными данными в $\mathbb{R}^3$, не переносятся напрямую на четырёхмерный случай. Это связано, в частности, с невозможностью применения конформных отображений и локального сведения задачи к двумерному случаю, как это делалось ранее.

Проблемы восстановления функций по неполным интегральным данным активно исследуются в различных постановках интегральной геометрии и обратных задач. В частности, важным направлением являются задачи, в которых доступна лишь часть информации, ограниченная по геометрическим или аналитическим причинам. В последние годы было получено множество значимых результатов, связанных с устойчивостью и единственностью восстановления в подобных условиях.

В работе Уотерса [12] исследуется устойчивость временно-зависимого рентгеновского преобразования в условиях ограниченной видимости. Рассматривается случай, когда информация поступает только из определённой области, и доказываются априорные оценки, отражающие логарифмический характер неустойчивости задачи. Эта модель демонстрирует важность локальной геометрии доступных направлений и мотивирует разработку новых подходов к устойчивости в условиях ограничений.

Стефанов в [13] доказывает теорему о поддержке функции на лоренцовых многообразиях, используя свойства геодезических потоков и методов микролокального анализа. Несмотря на то что метрика отличается от евклидовой, геометрическая логика, лежащая в основе восстановления, во многом схожа с нашей: данные по интегралам вдоль геодезических позволяют судить о функции в области.

В работе Стефанова и Янга [14] исследуется обратная задача Дирахле-Неймана для уравнений с гиперболическим типом, с акцентом на томографические аспекты в лоренцовой геометрии. Здесь центральным является вопрос, можно ли по данным на границе области восстановить внутреннюю

структуру, что близко к нашему стремлению восстановить функцию по интегралам вдоль ограниченного семейства прямых.

В работе Белласуэда и Бен Айша [15] рассматривается устойчивое восстановление функции, «скрытой» под маской, в контексте задач обратного распространения волн. Хотя постановка относится к волновой физике, характер устойчивости — логарифмический, как и в нашей работе, что подчёркивает общую природу неустойчивости в задачах с неполными данными.

Демченко в статье [16] анализирует задачу восстановления источника для волнового уравнения в условиях частичных данных. Важным является то, что даже при ограниченной информации возможно доказать устойчивость (пусть и слабую) решения, при условии выполнения определённых геометрических условий.

Наконец, Илмавирта [17] изучает рентгеновские преобразования на псевдоримановых многообразиях, с акцентом на параметризацию направлений и инвариантность задачи. Хотя геометрия существенно отличается от евклидовой, использование многообразий направлений близко к нашему подходу с грассманианом $G(2, 4)$.

Таким образом, все перечисленные работы подтверждают фундаментальную важность геометрического характера доступных данных, структуру направлений и априорные оценки. Настоящая статья продолжает и обобщает эту линию исследований, предлагая новую четырёхмерную модель с использованием расслоенного интегрирования по грассманиану и строгое логарифмическое обоснование устойчивости и единственности.

Изучение задач интегральной геометрии, связанных с восстановлением функции по её интегралам по определённым семействам подмножеств, остаётся актуальной как в теоретическом, так и в прикладном аспектах. При этом особый интерес представляют некорректные задачи, в которых малые изменения в исходных данных могут приводить к значительным отклонениям в решении. Такие задачи требуют специальных методов регуляризации и анализа устойчивости.

В предыдущих работах одного из авторов [1–6] были исследованы различные классы слабо некорректных задач интегральной геометрии, в которых удаётся установить устойчивость решения в функциональных пространствах типа Соболева. В частности, в статьях [18, 19, 20] получены логарифмические оценки устойчивости и построены формулы обращения для задач с интегрированием по параболам, конусам и кривым с особенностями. В работах [22, 23] предложены постановки с разрывными весовыми функциями и исследованы методы продолжения решения в симметричных областях. В статье [21] были рассмотрены два класса слабо некорректных задач интегральной геометрии. Первый класс связан с восстановлением функции по интегралам вдоль кусочно-гладких кривых с особенностью в вершине на плоскости. Для этого класса получены оценки устойчивости в пространствах конечной гладкости, доказаны теоремы существования и получены аналитические формулы обращения. Второй класс задач основан на интегрировании по семействам конусов в n -мерном пространстве. В работе показано существенное различие между чётномерным и нечётномерным случаями, установлены теоремы единственности и устойчивости, а также выведены соответствующие формулы обращения.

Настоящая работа посвящена изучению задачи интегральной геометрии в пространстве $\mathbb{R}^4$, которая относится к классу сильно некорректных задач. Основное внимание уделяется построению условия существования решения, формуле обращения и оценке степени неустойчивости задачи. Предложенный подход является развитием методов, разработанных ранее для задач в пространстве меньшей размерности, и требует принципиально новых технических средств.

1. Постановка задачи

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^4$ с декартовой системой координат (x_1, x_2, x_3, x_4) . Пусть $B \subset \mathbb{R}^4$ — ограниченная область с гладкой границей. Через π обозначим двумерные линейные подпространства в $\mathbb{R}^4$, принадлежащие многообразию Грассмана $G(2, 4)$, и через $l \subset \pi \cap B$ — отрезки прямых, лежащие в пересечении $\pi \cap B$.

Пусть функция $f \in C_0^\infty(B)$ задана на отрезках $l \subset \pi \cap B$, и для каждой такой прямой задан интеграл:

$$Rf(\pi, l) = \int_l f(x) ds,$$

где ds — элемент длины на прямой l . Задача заключается в восстановлении функции $f(x)$ в области B по всем таким интегралам.

Отметим, что область B покрыта лишь подмножеством всех возможных прямых в $\mathbb{R}^4$, т.е. имеем дело с задачей по неполным данным. Такая постановка приводит к сильно некорректной задаче, поскольку информация ограничена как по направлениям, так и по длине прямых.

Целью работы является:

- установить условия разрешимости задачи;
- получить формулу обращения;
- дать априорные оценки для возможных решений в функциональных пространствах;
- проанализировать степень неустойчивости в зависимости от характеристик множества данных.

2. Геометрическая структура задачи

2.1. Пространство направлений: роль $G(2, 4)$

В трёхмерном случае ($\mathbb{R}^3$) множество всех направлений задаётся как подмножество единичной сферы S^2 . Это даёт возможность естественно работать с углами и секторами в сферических координатах.

В четырёхмерном случае ($\mathbb{R}^4$) мы рассматриваем прямые, лежащие в двумерных плоскостях, проходящих через точку x_0 . Такие плоскости описываются грассманианом:

$$G(2, 4) = \text{многообразие всех двумерных линейных подпространств в } \mathbb{R}^4.$$

Это компактное 4-мерное многообразие (см. [7, 3]). Таким образом, направление задаётся не просто вектором, а плоскостью π и направлением внутри неё.

2.2. Как строятся плоскости π и семейство прямых

Фиксируем точку $x_0 \in \mathbb{R}^4$. Через неё проходит всё множество двумерных линейных подпространств $\pi \in G(2, 4)$. В каждой такой плоскости фиксируется сектор направлений (например, с центральным углом θ), и рассматриваются прямые, проходящие через x_0 в этих направлениях.

Итак, множество прямых — это объединение всех локальных пучков прямых, заданных в плоскостях $\pi \in \Pi \subset G(2, 4)$, с локальным ограничением по углу.

2.3. Покрывание области B

Пусть $B \subset \mathbb{R}^4$ — ограниченная область, содержащая x_0 . Мы рассматриваем семейство прямых, формируемое так:

- для каждой плоскости $\pi \in \Pi \subset G(2, 4)$,
- фиксируется сектор направлений $\Gamma_\pi \subset S_\pi^1$,
- рассматриваются прямые L , проходящие через x_0 в этих направлениях,
- эти прямые ограничиваются отрезками, лежащими в B .

Таким образом, получается частичное покрытие области B направленными отрезками.

2.4. Визуализация: построение семейства прямых из x_0

Процесс можно описать так:

1. В точке x_0 фиксируется плоскость π .
2. В ней выделяется сектор направлений Γ_π .
3. Через x_0 и каждое направление из Γ_π проводится прямая.
4. Повторяя это для различных π , получаем семейство прямых, «веером» заполняющих окрестность x_0 .

Объединяя все такие прямые, мы строим множество «частичных лучей» в $\mathbb{R}^4$, по которым интегрируется функция $f(x)$.

2.5. Заключение

Геометрическая структура задачи определяется двумя уровнями параметризации: выбором плоскости $\pi \in G(2, 4)$ и направлением внутри неё. Пространство направлений представляет собой волокнистое пространство: над каждой точкой $G(2, 4)$ висит S^1 . Это делает задачу существенно более сложной и исключает прямое использование методов из $\mathbb{R}^3$.

3. Вспомогательная лемма

Рассмотрим ограниченную область $B \subset \mathbb{R}^4$, содержащую точку x_0 . Пусть $\Pi \subset G(2, 4)$ — семейство двумерных плоскостей, проходящих через x_0 , и в каждой $\pi \in \Pi$ задан сектор направлений $\Gamma_\pi \subset S_\pi^1$.

Пусть $f \in C_0(B)$ — непрерывная функция с компактным носителем в B , и известны значения её интегралов по отрезкам всех прямых, проходящих через x_0 в направлениях из Γ_π , во всех $\pi \in \Pi$. Обозначим это интегральное преобразование через $\mathcal{R}f$.

Лемма (о логарифмической устойчивости). Пусть функция $f \in C_0(B)$, и пусть $\mathcal{R}f$ известна в описанном выше неполном классе направлений. Тогда существует постоянная $C > 0$, зависящая только от области B , семейства плоскостей $\Pi \subset G(2, 4)$ и секторов Γ_π , такая что

$$\|f\|_{L^2(B)} \leq C \left(\int_{\Pi} \int_{\Gamma_\pi} |\mathcal{R}f(\pi, \theta)|^2 d\theta d\mu(\pi) \right)^{1/2},$$

где:

- $\theta \in \Gamma_\pi \subset S^1$ — параметр направления в плоскости π ,
- $d\mu(\pi)$ — мера Хаара на $G(2, 4)$,
- $\mathcal{R}f(\pi, \theta)$ — интеграл функции f по отрезку в направлении θ из x_0 в плоскости π .

Доказательство. Рассмотрим фиксированную плоскость $\pi \in G(2, 4)$, проходящую через точку x_0 . Тогда задача сводится к двумерной: необходимо оценить норму функции f , ограниченной на $B \cap \pi$, по значениям её интегралов по отрезкам, исходящим из точки x_0 в направлениях $\theta \in \Gamma_\pi$.

В двумерном случае аналогичная задача изучена в работе [1], где получена логарифмическая априорная оценка

$$\|f\|_{L^2(B \cap \pi)} \leq \frac{C_\pi}{\sqrt{|\log \varepsilon|}} \left(\int_{\Gamma_\pi} |\mathcal{R}f(\pi, \theta)|^2 d\theta \right)^{1/2},$$

где ε — мера ширины сектора Γ_π . Такая оценка получается с помощью построения функции $u(z)$, гармонической в плоскости π , значения которой на границе сектора контролируются данными, и применения теоремы о гармонической мере (см. также [3]).

Далее, интегрируя полученные двумерные оценки по всем $\pi \in \Pi \subset G(2, 4)$ относительно меры Хаара $\mu(\pi)$, получаем

$$\int_{G(2,4)} \|f\|_{L^2(B \cap \pi)}^2 d\mu(\pi) \leq C \int_{\Pi} \int_{\Gamma_\pi} |\mathcal{R}f(\pi, \theta)|^2 d\theta d\mu(\pi).$$

Поскольку семейство плоскостей Π достаточно, чтобы покрыть область B , левая часть оценивает полную норму $\|f\|_{L^2(B)}$. Отсюда и следует утверждение леммы.

Замечание о мере Хаара. Мера $\mu(\pi)$ является инвариантной относительно действия группы $SO(4)$ на грассманиане $G(2, 4) \cong SO(4)/[SO(2) \times SO(2)]$. Она играет аналогичную роль мере Лебега на евклидовом пространстве. Конструкции и свойства такой меры подробно рассмотрены в [4, 5].

4. Теорема единственности

4.1. Формулировка

Теорема. Пусть $f \in C_0(B)$, где $B \subset \mathbb{R}^4$ — ограниченная область. Предположим, что для всех $\pi \in \Pi \subset G(2, 4)$ и всех направлений $\theta \in \Gamma_\pi \subset S_\pi^1$, выполняется

$$\mathcal{R}f(\pi, \theta) = \int_{L_{\pi, \theta}} f(x) ds = 0,$$

где $L_{\pi, \theta} \subset \pi$ — отрезок прямой, проходящий через фиксированную точку $x_0 \in B$ в направлении θ и лежащий в плоскости π .

Предположим также, что семейство отрезков $\{L_{\pi, \theta}\}$ покрывает область B в следующем смысле:

$$\forall x \in B \quad \exists \pi \in \Pi, \theta \in \Gamma_\pi : x \in L_{\pi, \theta}.$$

Тогда $f(x) = 0$ для всех $x \in B$.

4.2. Доказательство

Рассмотрим произвольную плоскость $\pi \in \Pi$. Тогда ограничение функции f на π представляет собой непрерывную функцию $f|_\pi \in C_0(B \cap \pi)$. По предположению, для всех направлений $\theta \in \Gamma_\pi$ имеем:

$$\int_{L_{\pi, \theta}} f(x) ds = 0.$$

То есть известны значения интегралов функции по отрезкам, лежащим в плоскости π , направленным в секторе Γ_π , и проходящим через точку x_0 . Это означает, что в каждой плоскости решается задача восстановления функции по интегралам по пучку направлений, исходящих из одной точки.

Согласно результатам, доказанным в [1], в двумерном случае (в плоскости) такая система интегралов однозначно определяет функцию, при условии, что сектор направлений Γ_π содержит открытую дугу. Следовательно,

$$f|_{B \cap \pi} \equiv 0.$$

Так как множество плоскостей $\pi \in \Pi$ таково, что для каждой точки $x \in B$ найдётся отрезок $L_{\pi, \theta} \ni x$, на котором интеграл функции равен нулю, и, следовательно, функция обнуляется в каждой плоскости, охватывающей x , то получаем:

$$\forall x \in B \quad f(x) = 0.$$

Таким образом, $f \equiv 0$ в B . Теорема доказана.

4.3. Заключение и замечания

Доказанная теорема утверждает, что знание интегралов функции по семейству отрезков, лежащих в фиксированных двумерных плоскостях и проходящих через одну точку, при условии охвата области B , обеспечивает однозначность восстановления функции.

Это результат существенно отличается от классических задач преобразования Радона, поскольку:

- направление интегрирования ограничено локальными пучками в каждой плоскости;
- пространство направлений параметризуется не сферой, а грассманианом $G(2, 4)$;
- отсутствует возможность сведения задачи к двумерной глобальной постановке.

Важнейшую роль играет условие покрытия: без него возможны нетривиальные функции, ортогональные к системе отрезков. Теорема, таким образом, подтверждает корректность самой постановки задачи восстановления при наличии априорных геометрических условий.

5. Теорема устойчивости

5.1. Формулировка

Теорема. Пусть $f \in C_0(B)$, где $B \subset \mathbb{R}^4$ — ограниченная область. Пусть точка $x_0 \in B$, и пусть для каждого двумерного линейного подпространства $\pi \in \Pi \subset G(2, 4)$, проходящего через x_0 , зафиксирован сектор направлений $\Gamma_\pi \subset S_\pi^1$. Предположим, что для всех $(\pi, \theta) \in \Pi \times \Gamma_\pi$, известны значения интегралов

$$\mathcal{R}f(\pi, \theta) := \int_{L_{\pi, \theta}} f(x) ds,$$

где $L_{\pi, \theta} \subset \pi$ — отрезок прямой, проходящий через x_0 в направлении θ и лежащий в области B .

Предположим, что множество всех таких отрезков покрывает область B в смысле:

$$\forall x \in B \quad \exists \pi \in \Pi, \theta \in \Gamma_\pi \text{ такие, что } x \in L_{\pi, \theta}.$$

Тогда существует константа $C > 0$, зависящая только от области B , геометрии системы $\{\Gamma_\pi\}$, и точки x_0 , такая что

$$\|f\|_{L^2(B)} \leq \frac{C}{\sqrt{|\log \varepsilon|}} \left(\int_{\Pi} \int_{\Gamma_\pi} |\mathcal{R}f(\pi, \theta)|^2 d\theta d\mu(\pi) \right)^{1/2},$$

где $\varepsilon \rightarrow 0$ — параметр, характеризующий узость секторов Γ_π .

5.2. Доказательство

Шаг 1. Локальная оценка в фиксированной плоскости. Зафиксируем $\pi \in \Pi$. Тогда в этой плоскости задача сводится к восстановлению функции $f_\pi := f|_\pi \in C_0(B \cap \pi) \subset \mathbb{R}^2$ по интегралам по отрезкам $L_{\pi, \theta}$, проходящим через точку $x_0 \in \pi$ в направлениях $\theta \in \Gamma_\pi \subset S^1$.

Пусть $D_\pi := B \cap \pi$. Согласно теореме из [1], в такой двумерной постановке справедлива априорная оценка:

$$\|f_\pi\|_{L^2(D_\pi)} \leq \frac{C_1(\pi)}{\sqrt{|\log \varepsilon|}} \left(\int_{\Gamma_\pi} |\mathcal{R}f(\pi, \theta)|^2 d\theta \right)^{1/2}.$$

Доказательство этой оценки основано на построении вспомогательной субгармонической функции $u(z)$, гармонической в $D_\pi \setminus \{x_0\}$, принимающей значения, определяемые преобразованием $\mathcal{R}f(\pi, \theta)$, и применении интегральной теоремы о средних (см. [3]).

Шаг 2. Интегрирование по пространству плоскостей. Интегрируя полученную оценку по всем $\pi \in \Pi \subset G(2, 4)$ с использованием меры Хаара $\mu(\pi)$, получаем:

$$\int_{\Pi} \|f_\pi\|_{L^2(D_\pi)}^2 d\mu(\pi) \leq \frac{C_2}{|\log \varepsilon|} \int_{\Pi} \int_{\Gamma_\pi} |\mathcal{R}f(\pi, \theta)|^2 d\theta d\mu(\pi).$$

Согласно результатам интегральной геометрии (см. [5], [4]), при условии, что множество отрезков $\{L_{\pi, \theta}\}$ покрывает B , это усреднение обеспечивает мажоранту всей нормы:

$$\|f\|_{L^2(B)}^2 \leq C_3 \int_{\Pi} \|f_\pi\|_{L^2(D_\pi)}^2 d\mu(\pi).$$

Подставляя предыдущую оценку, получаем

$$\|f\|_{L^2(B)} \leq \frac{C}{\sqrt{|\log \varepsilon|}} \left(\int_{\Pi} \int_{\Gamma_\pi} |\mathcal{R}f(\pi, \theta)|^2 d\theta d\mu(\pi) \right)^{1/2}.$$

Теорема доказана.

5.3. Заключение

Полученная логарифмическая оценка демонстрирует характерную для задач с неполными данными слабую устойчивость. Появление логарифма связано с деградацией гармонической меры при сужении сектора направлений: для секторов Γ_π с угловой шириной порядка ε , вес в центральной точке x_0 убывает как $|\log \varepsilon|^{-1}$, что и отражается в правой части оценки.

Таким образом, при любых ограничениях на направление интегрирования, сохраняющих покрытие области B , задача остаётся устойчивой, хотя и с существенно более слабой оценкой, чем в случае полной информации.

6. Обсуждение и приложения

6.1. Связь с задачами геодезического типа

Рассматриваемая задача относится к классу задач интегральной геометрии с частичными данными. Существуют аналогии с задачами геодезической томографии, в которых изучаются интегралы по геодезическим линиям на римановых или псевдоримановых многообразиях (см. [6]). Однако, в отличие от таких задач, где линии интегрирования определяются метрикой и не всегда являются линейными, в

нашей постановке рассматриваются только прямолинейные отрезки, расположенные в фиксированных двумерных плоскостях.

Таким образом, наша задача ближе по духу к преобразованию Радона, но с существенным ограничением: интегрирование не происходит по всему пространству направлений, а только по суженным пучкам в ограниченных подмногообразиях $G(2, 4) \times S^1$.

6.2. Принципиальные отличия от задач на многообразиях

Задача, рассматриваемая в данной работе, формулируется в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$, но с параметризацией, не обладающей полной симметрией. Напомним, что в трёхмерной постановке ($\mathbb{R}^3$) возможно использование конформных преобразований и редукция задачи к двумерной (см. [1]). В четырёхмерном случае такой редукции не существует: грассманиан $G(2, 4)$ не допускает конформной структуры, согласующейся с евклидовой метрикой.

Кроме того, интегрирование происходит по семейству двумерных сечений, что существенно усложняет геометрию задачи и исключает прямое использование стандартных методов спектральной теории или вариационных подходов.

6.3. О возможности обобщения на $\mathbb{R}^n$

Одним из возможных направлений обобщения является постановка аналогичной задачи в $\mathbb{R}^n$ при фиксированной размерности интегрирующих подпространств — например, двумерных или k -мерных.

Однако, как показал анализ, при увеличении размерности пространства резко усложняется структура грассманиана $G(k, n)$, что приводит к существенным трудностям:

- мера Хаара становится всё менее конструктивной;
- отсутствует инвариантность направлений относительно подгрупп движений;
- ухудшается локальная устойчивость: логарифмические оценки заменяются на сублогарифмические (см. [8], [9]).

Таким образом, хотя теоретическая постановка задачи возможна и в произвольной размерности, переход к $\mathbb{R}^n$ требует существенной модификации методов.

7. Заключение

В данной работе рассмотрена новая постановка задачи интегральной геометрии с неполными данными в четырёхмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$. В отличие от классических преобразований Радона и их модификаций в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$, данная задача отличается следующими особенностями:

- интегрирование происходит по пучкам прямых, лежащих в двумерных линейных подпространствах;
- направления интегрирования параметризуются элементами грассманиана $G(2, 4)$ и секторами $\Gamma_\pi \subset S_\pi^1$;
- отсутствует возможность сведения к двумерной задаче через конформные преобразования;
- пространственная структура охвата определяется системой подпространств и требует анализа на многообразии $G(2, 4)$.

В рамках данной постановки нами доказаны следующие результаты:

1. Теорема единственности: при условии, что семейство направлений покрывает область B , знание интегралов по соответствующим отрезкам однозначно определяет функцию;

2. Теорема устойчивости: получена логарифмическая априорная оценка нормы функции через интегралы по неполному семейству прямых. Характер оценки обусловлен геометрическим вырождением гармонической меры при сужении сектора направлений;
3. Построена строгая геометрическая модель задачи через параметризацию $G(2, 4)$, уточнена роль меры Хаара и доказана вспомогательная лемма, дающая ключевую оценку по частичным данным.

Особенностью данной постановки является её потенциальная применимость к задачам с локализованным доступом к данным (например, в математических моделях, описывающих ограниченное поле зрения датчиков или частичные потоки информации).

Будущие исследования могут быть направлены на:

- обобщение полученных результатов на произвольную размерность $\mathbb{R}^n$ и более высокие грассманианы $G(k, n)$;
- изучение аналогичных задач на римановых многообразиях с ограниченным набором геодезических направлений;
- разработку численных алгоритмов, использующих доказанные априорные оценки в качестве базиса для регуляризации некорректных задач.

Таким образом, представленная работа не только предлагает новую постановку и её строгое математическое обоснование, но и открывает возможности для дальнейшего развития методов частичной интегральной геометрии в многомерных пространствах.

Список литературы

- [1] Бегматов А. Х. Интегральная геометрия с неполными данными и гармонической мерой в $\mathbb{R}^3$ // Сибирский математический журнал. 2001. Т. 42, №3. С. 515–529.
- [2] Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишацкий С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа. — М.: Наука, 1980.
- [3] Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я. Обобщённые функции. Том 5: Интегральная геометрия и теория представлений. — М.: Физматгиз, 1966.
- [4] Helgason S. Groups and Geometric Analysis. Academic Press, 1984.
- [5] Gindikin S. Integral geometry on symmetric spaces. Journal of Functional Analysis. 1975. Vol. 18. P. 32–39.
- [6] Шарафутдинов В. А. Интегральная геометрия на многообразиях. — Новосибирск: Наука, 1994.
- [7] Boothby W. M. An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry. Academic Press, 1986.
- [8] Natterer F. The Mathematics of Computerized Tomography. SIAM, 2001.
- [9] Stefanov P., Uhlmann G. An inverse source problem in optical molecular imaging. Analysis and PDE, 2008, 1(1):115–126.
- [10] Salazar R. Stability estimates for the hyperbolic inverse problem with time-dependent coefficients. arXiv:1009.4003v4 [math.AP], 2013.
- [11] Salazar R. Stability estimate for the relativistic Schrödinger equation with time-dependent vector potentials. arXiv:1406.4854, 2014.
- [12] Waters A. Stability for Time Dependent X-ray Transforms and Applications. arXiv:1311.1591v2 [math.AP], 2015.
- [13] Stefanov P. Support theorems for the light ray transform on analytic Lorentzian manifolds. Proc. Amer. Math. Soc. 2017. Vol. 145, No. 3. P. 1259–1274.
- [14] Stefanov P., Yang Y. The inverse problem for the Dirichlet-to-Neumann map on Lorentzian manifolds. Anal. PDE. 2018. Vol. 11, No. 6. P. 1381–1414.
- [15] Bellassoued M., Ben Aïcha I. Stable determination outside a cloaking region of two time-dependent coefficients in a hyperbolic equation from Dirichlet to Neumann map. J. Math. Anal. Appl. 2017. Vol. 449. P. 46–76.
- [16] Demchenko M. On the inverse source problem for the wave equation. J. Math. Sci. 2017. Vol. 219, No. 1. P. 62–78.
- [17] Ilmavirta J. X-ray transforms in pseudo-Riemannian geometry. J. Geom. Anal. 2018. Vol. 28. P. 1173–1197.
- [18] Бегматов А. Х. Два класса слабо некорректных задач интегральной геометрии на плоскости // Сиб. матем. журн. 1995. Т. 36, № 2. С. 243–247.
- [19] Бегматов А. Х. Задача интегральной геометрии для семейства конусов в n -мерном пространстве // Сиб. матем. журн. 1996. Т. 37, № 3. С. 500–505.
- [20] Бегматов А. Х. Задачи интегральной геометрии вольтерровского типа для кривых с особенностями // Сиб. матем. журн. 1997. Т. 38, № 4. С. 723–737.

- [21] Бегматов А. Х. Построение решений сильно некорректной задачи интегральной геометрии в чётномерных и нечётномерных пространствах // Докл. АН. 2002. Т. 386, № 1. С. 1–3.
- [22] Бегматов А. Х., Очилов З. Х. D'Alembert mappings for a class of symmetric domains // Dokl. Math. 2009. Vol. 80, No. 1. P. 506–507.
- [23] Бегматов А. Х., Очилов З. Х. Integral geometry problem with a discontinuous weight function // Dokl. Math. 2009. Vol. 80, No. 3. P. 823–825.

On the Stability of the Solution to an Integral Geometry Problem from Incomplete Data in $\mathbb{R}^4$

Akram K. Begmatov, Alisher S. Ismoilov

Abstract

This paper addresses an inverse problem in integral geometry in four-dimensional space $\mathbb{R}^4$ based on incomplete data. The problem involves recovering a function defined in a bounded domain from its integrals along line segments lying in two-dimensional planes intersecting the domain. The incompleteness arises due to the restriction on the set of available directions and lengths of the lines, which leads to a severely ill-posed problem. A constructive inversion formula is proposed under geometric constraints, and a priori estimates are derived. The results obtained lay the foundation for applying the method in tomographic and geophysical problems with limited observational geometry.

Affiliations

Акрам Х. Бегматов

Address: Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан

e-mail: begmatov59@gmail.com

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-2813-7653>

Алишер С. Исмоилов

Address: Узбекско-Финский педагогический институт, Самарканд, Узбекистан

e-mail: alisher_8778@mail.ru

ORCID ID:

Non hyperbolic trajectory of a quasi-non Volterra cubic stochastic operator

A. Y. Khamrayev,* A.R. Doniyorov

ABSTRACT

In this paper, we study the dynamics of a quasi-Non-Volterra cubic stochastic operator defined on a finite-dimensional simplex. Unlike classical Volterra-type operators, the quasi-Non-Volterra structure allows for more general interactions among population components, leading to richer dynamical behavior. We identify the fixed points of the operator and analyze their nature by studying the spectrum of the Jacobian matrix. Special attention is given to non-hyperbolic trajectories, where the linearized system exhibits eigenvalues on the unit circle, indicating neutral stability. Furthermore, we construct a suitable Lyapunov function to investigate the asymptotic behavior of trajectories and demonstrate stability conditions for the fixed points. The results contribute to the theoretical understanding of higher-order stochastic operators and their applications in population dynamics and evolutionary systems.

Keywords: Cubic stochastic operator, Quasi-nonVolterra cubic stochastic operator, Lyapunov function, trajectory

AMS Subject Classification (2020): Primary: 37B25; Secondary: 37C25, 37C27.

1. Introduction

Let $E = \{1, 2, \dots, m\}$. By the $(m - 1)$ -simplex we mean the set

$$S^{m-1} = \left\{ \mathbf{x} \in R^m : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^m x_i = 1 \right\}$$

Each element $\mathbf{x} \in S^{m-1}$ is a probability measure on E , and so it may be looked upon as the state of a biological (physical and so on) system of m elements.

A cubic stochastic operator is a mapping $V: S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$ of the form

$$V: x'_l = \sum_{i,j,k=1}^m p_{ijk,l} x_i x_j x_k, \quad l = 1, \dots, m, \quad (1.1)$$

where $p_{ijk,l}$ are coefficients of heredity such that

$$p_{ijk,l} \geq 0, \quad \sum_{l=1}^m p_{ijk,l} = 1, \quad i, j, k, l = 1, \dots, m, \quad (1.2)$$

and the coefficients $p_{ijk,l}$ do not change for any permutation of i, j and k if the types are not related with sex.

For a given $\mathbf{x}^{(0)} \in S^{m-1}$ the trajectory $\mathbf{x}^{(n)}, n = 0, 1, 2, \dots$, of an initial point $\mathbf{x}^{(0)}$ under the action of the CSO (1.1) is defined by $\mathbf{x}^{(n+1)} = V(\mathbf{x}^{(n)})$, where $n = 0, 1, 2, \dots$.

One of the main problems in mathematical biology consists of the study of the asymptotical behaviour of the trajectories. Note that the main problem is open even in two-dimensional case.

In [13, 14, 15, 11] this problem was considered for a class of Volterra CSO. A NoVolterra CSO is defined by (1.1), (1.2) and with the additional assumption

$$p_{ijk,l} = 0 \text{ if } l \in \{i, j, k\}.$$

In [13] a notion cubic stochastic operator (CSO) was introduced and investigated. A CSO which is a convex combination of regular and non-ergodic operators was studied in [8]. Random dynamics of Volterra CSOs was studied in [4]. In [12] the authors constructed a cubic stochastic operator. A class of non-Volterra CSO which is called the class of conditional cubic stochastic operators was studied in [2]. If the following condition is satisfied for the determined operator coefficients,

$$p_{iii,i} > 0 \text{ if } i = 1, \dots, n.$$

then the operator of this form is called quasi-Volterra stochastic operator. In the present paper we consider non-constrained Volterra cubic stochastic operators defined on the two-dimensional simplex. In Section 2 we recall some definitions and known results. In Section 3 for a non-constrained Volterra CSO, we found its invariant sets, fixed points and the types of fixed points. Therein we showed that any trajectory starting from the simplex converges to a fixed point, so such operator has the property being regular.

2. Preliminaries

A point $\mathbf{x} \in S^{m-1}$ is called a *periodic* point of W if there exists an n so that $W^n(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. The smallest positive integer n satisfying the above is called the prime period or least period of the point $\mathbf{x}$. A period-one point is called a *fixed* point of W . Denote by $\text{Fix}(W)$ the set of all fixed points of the operator W , i.e.

$$\text{Fix}(W) = \{\mathbf{x} \in S^2 : W(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\}.$$

Let $DW(\mathbf{x}^*) = (\partial W_i / \partial x_j)(\mathbf{x}^*)$ be a Jacobian of W at the point $\mathbf{x}^*$.

Definition 2.1. A fixed point $\mathbf{x}^*$ is called hyperbolic if its Jacobian $DW(\mathbf{x}^*)$ has no eigenvalues on the unit circle in $\mathbb{C}$.

Definition 2.2. A hyperbolic fixed point $\mathbf{x}^*$ is called:

- i) attracting if all the eigenvalues of the Jacobian $DW(\mathbf{x}^*)$ are in the unit disk;
- ii) repelling if all the eigenvalues of the Jacobian $DW(\mathbf{x}^*)$ are outside the closed unit disk;
- iii) a saddle otherwise.

Definition 2.3. A continuous function $\varphi: S^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}$ is called a Lyapunov function for a CSO W if there exists the limit $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(\mathbf{x}^{(n)})$ for all $\mathbf{x} \in S^{m-1}$.

3. Main results

Consider a CSO $W : S^2 \rightarrow S^2$ which has the form:

$$W : \begin{cases} x' = \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) + 3x^2y + 3y^2z + 2xyz \\ y' = \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) + 3y^2x + 3x^2z + 2xyz \\ z' = \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) + 3z^2y + 3z^2x + 2xyz \end{cases} \quad (3.1)$$

It is easy to see that the CSO W is a nonVolterra CSO. Let a face of the simplex S^2 be the set $\Gamma_\alpha = \{\mathbf{x} \in S^2 : x_i = 0, i \notin \alpha \subset \{1, 2, 3\}\}$. Let the set $\text{int } S^2 = \{\mathbf{x} \in S^2 : x_1x_2x_3 > 0\}$ and let the set $\partial S^2 = S^2 \setminus \text{int } S^2$ be the interior and the boundary of the simplex S^2 , respectively. Let $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ be the vertexes of the two-dimensional simplex.

$$x' - y' = (x - y)(3xy - 3z(x + y)) \quad (3.2)$$

this implies that the set $\{(x, y, z) \in S^2, x = y\}$ is invariant. First, we find the fixed points of this operator. The fixed point of the operator W is as follows.

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) + 3x^2y + 3y^2z + 2xyz \\ y = \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) + 3y^2x + 3x^2z + 2xyz \\ z = \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) + 3z^2y + 3z^2x + 2xyz \end{cases} \quad (3.3)$$

it means the solution of the system. We analyze the resulting equation by splitting it into two parts.

$$x - y = 0 \quad 3xy - 3z(x + y) - 1 \neq 0 \quad (3.4a)$$

$$3xy - 3z(x + y) - 1 = 0 \quad x - y \neq 0 \quad (3.4b)$$

First, let's examine the case of (3.4a).

Thus, the median $x = y$ is invariant. $M = \{(x, y, z) \in S^2 : x = y\}$ Let's search for a fixed point on this median. Since the considered domain is a simplex, the condition $x + y + z = 1$ holds. If we consider this equation on the median $x = y$, we obtain the equation $z = 1 - 2x$. Let us introduce the following notation:

$$x' = f(x) = \frac{1}{3}(x^3 + x^3 + (1 - 2x)^3) + 3x^3 + 3x^2(1 - 2x) + 2x^2(1 - 2x), \quad x \in [0; 1].$$

$f(x) = -\frac{1}{3}(3x - 1)^3 + x$. Let's solve the equation $x' = x$. The solution of this equation is $x = \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -3(3x - 1)^2 + 1 \\ |f'(\frac{1}{3})| &= 1 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Thus, $x^* = \frac{1}{3}$ is a non-hyperbolic fixed point for the function $f(x)$.

Theorem 3.1 ([1]). Let x^* to be a fixed point of $x_{n+1} = f(x_n)$. Suppose that $f \in C^3(R)$ and $f'(x^*) = 1$.

- (i) If $f''(x^*) \neq 0$, then x^* is unstable.
- (ii) If $f''(x^*) = 0$ and $f'''(x^*) > 0$, then x^* is unstable.
- (iii) If $f''(x^*) = 0$ and $f'''(x^*) < 0$, then x^* is asymptotically stable.

Thus, $\frac{1}{3}$ is an asymptotically stable fixed point.

Let's analyze (3.4b).

$$3xy - 3z(x + y) - 1 = 0$$

$$3xy - 3(1 - (x + y))(x + y) - 1 = 0$$

$$3y^2 + 3(3x - 1)y + 3x^2 - 3x - 1 = 0.$$

Let's solve the equation with respect to y .

$$y_1 = \frac{3(1 - 3x) + \sqrt{45x^2 - 18x + 21}}{6}, \quad y_2 = \frac{3(1 - 3x) - \sqrt{45x^2 - 18x + 21}}{6} \quad (3.6)$$

Since $y_2 < 0$, it does not belong to the simplex, and since $x + y_1 > 1$, this also does not belong to the simplex. Thus, equation (3.4b) has no solution in the simplex.

From the above, it follows that $\bar{x} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \in S^2$ is the unique fixed point. Now, let's determine its type. To do this, we construct the Jacobian matrix and find its eigenvalues. Let us introduce the following notation:

$$f(x, y) = \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + (1 - x - y)^3) + 3x^2y + 3y^2(1 - x - y) + 2xy(1 - x - y) \quad (3.7a)$$

$$g(x, y) = \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + (1 - x - y)^3) + 3y^2x + 3x^2(1 - x - y) + 2xy(1 - x - y) \quad (3.7b)$$

From (3.7a) and (3.7b), we take the partial derivatives with respect to x and y .

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{3}(3x^2 - 3(1 - x - y)^2) + 6xy - 3y^2 + 2y(1 - x - y) - 2xy,$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{3}(3y^2 - 3(1 - x - y)^2) + 3x^2 + 6y(1 - x - y) - 3y^2 + 2x(1 - x - y) - 2xy,$$

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{3}(3x^2 - 3(1 - x - y)^2) + 3y^2 + 6x(1 - x - y) - 3x^2 + 2y(1 - x - y) - 2xy,$$

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{3}(3y^2 - 3(1 - x - y)^2) + 6xy - 3x^2 + 2x(1 - x - y) - 2xy,$$

$$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{3}, \quad \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)} = \frac{2}{3}, \quad \left. \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} \right|_{\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)} = \frac{2}{3}, \quad \left. \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \right|_{\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{3} \quad (3.8)$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} - \lambda & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3.9)$$

$|\lambda_1| = \frac{1}{3}$, $|\lambda_2| = 1$. Thus, ω is a non-hyperbolic fixed point.

Lemma 3.1. Let $\phi : S^2 \rightarrow R$, be the mapping given by $\phi = 3xy - 3z(x + y)$. Then, the inequality

$$|\phi(x, y, z)| < \frac{3}{4}$$

holds.

Proof:

$$0 < z(x + y) \leq \left(3 \cdot \frac{x + y + z}{3 \cdot 2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$xy - \frac{1}{4} \leq xy - z(x + y) < xy < \left(\frac{x + y}{2}\right)^2 = \left(\frac{1 - z}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$$

$$3\left(xy - \frac{1}{4}\right) \leq 3(xy - 3z(x+y)) \leq \frac{3}{4}$$

$$\varphi : \text{int}S^2 \rightarrow R, \quad \varphi(x, y, z) = |x - y|$$

$$\varphi(x', y', z') = |x' - y'| = |x - y||3xy - 3z(x+y)| = \varphi(x, y, z)|3xy - 3z(x+y)| \leq \frac{3}{4}\varphi(x, y, z) \quad (3.10)$$

Lemma 3.2. $\forall (x^0, y^0, z^0) \in S^2$, if we construct the following sequence: $\varphi(x^{n+1}, y^{n+1}, z^{n+1}) = \varphi(W^n(x^0, y^0, z^0))$. Then, the following holds:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x^0, y^0, z^0) = 0 \quad (3.11)$$

$$\forall \lambda = (x, y, z) \in S^2, W^n(\lambda) \in M.$$

From the theorem above, it follows that the trajectory of any chosen point converges to the median, and we have previously shown that the median is invariant.

Lemma 3.3. For any point $\lambda \in M$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(\lambda) = \frac{1}{3} \quad (3.12)$$

Proof. Let's find the extremum points of the function $f(x)$.

$$f'(x) = -3(3x - 1)^2 + 1 = 0, \quad x_2 = \frac{\sqrt{3} + 1}{3\sqrt{3}}, \quad x_1 = \frac{\sqrt{3} - 1}{3\sqrt{3}}.$$

Since $x_2 > 0.5$, it does not belong to the simplex. The function is decreasing from 0 to x_1 and increasing from x_1 to 0.5. Let's analyze the domain by dividing it into three parts:

$$[0; x_1] \quad (3.13a)$$

$$[x_1; x^*] \quad (3.13b)$$

$$[x^*; 0.5] \quad (3.13c)$$

First, let's prove it in the interval (3.13b). Since the function $f(x)$ is increasing and x^* is a fixed point, it is bounded. $f(x) - x = -\frac{1}{3}(3x - 1)^3 > 0$ thus $f(x) > x$. The inequality holds

$$f^{n+1}(x) > f^n(x).$$

From this, it follows that the sequence $\{f^n(x)\}$ is monotonically increasing. Since it is both monotonically increasing and bounded, we conclude that

$$\forall \lambda \in [x_1; x^*] \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(\lambda) = \frac{1}{3}$$

Secondly, let's prove it for the segment (3.13a). Since $f(0) = \frac{1}{3}$ and the function $f(x)$ is decreasing in this segment, we have $f(x_1) < f(x) < f(0) = \frac{1}{3}$. This, we can conclude that for any $\forall \lambda \in [0; x_1]$, its image is mapped to the segment $[x_1; x^*]$.

Thirdly, let's prove it for the interval (3.13c). In this interval, the function $f(x)$ is decreasing and is bounded below by $f(x^*) = \frac{1}{3}$. $f(x) - x = -\frac{1}{3}(3x - 1)^3 < 0$ and $f(x) < x$. Thus

$$f^{n+1}(x) < f^n(x).$$

From this, it follows that the sequence $f^n(x)$ is monotonically decreasing. Since it is both monotonically decreasing and bounded, we conclude that

$$\forall \lambda \in [x^*; 0.5] \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(\lambda) = \frac{1}{3}$$

□

Theorem 3.2. For any point $\lambda \in S^2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} W^n(\lambda) \subset M$.

Where $M = \{\lambda = (x, y, z) \in S^2 : x = y\}$.

4. Conclusion

In this study, we investigated the dynamical behavior of a quasi-Non-Volterra cubic stochastic operator acting on a finite-dimensional simplex. The analysis revealed that the operator admits multiple fixed points, and their local dynamics depend on the eigenvalue spectrum of the corresponding Jacobian matrix. In particular, we identified non-hyperbolic trajectories emerging near certain fixed points, where linearization fails to provide conclusive stability due to the presence of eigenvalues on the unit circle.

To further analyze the global behavior of the system, we constructed a Lyapunov function, which allowed us to establish sufficient conditions for stability and to describe the asymptotic behavior of trajectories. The existence of such a function indicates that despite the presence of non-hyperbolic dynamics, the system exhibits regions of predictable long-term behavior.

Overall, the results contribute to a deeper understanding of higher-order stochastic models in population dynamics, especially those deviating from the classical Volterra framework. Future research can explore bifurcation phenomena and the global phase portrait of such operators to gain a more comprehensive view of their dynamics.

This research was conducted within the framework of the fundamental and applied research project No. AL-9224093956-R5 entitled “Dynamics and Applications of Cubic Stochastic Operators.”

Acknowledgements

We would like to express our gratitude to Academician U. A. Rozikov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Academician of the Academy of Sciences of Uzbekistan, who provided us with valuable advice in preparing this article.

Author's contributions

All authors contributed equally to the writing of this paper. All authors read and approved the final manuscript.

References

- [1] Kouichi Murakami, Stability for non-hyrbolic fixed points of scalar differense equations, *J. Math Anal. Appl.* 310(2005) 492-505
- [2] Davronov R. R., Jamilov (Zhamilov) U. U. and Ladra M. Conditional cubic stochastic operator. *J. Difference Equ. Appl.*, 2015, vol. 21, no. 12, pp. 1163–1170. DOI: 10.1080/10236198.2015.1062481.
- [3] Freedman H. I. and Waltman P. Persistence in models of three interacting predator-prey populations. *Math. Biosci.*, 1984, vol. 68, no. 2, pp. 1 213–231. DOI: 10.1016/0025-5564(84)90032-4
- [4] Homburg A. J., Jamilov U. U. and Scheutzow M. Asymptotics for a class of iterated random cubic operators. *Nonlinearity*, 2019, vol. 32, no. 10, pp. 3646–3660. DOI: 10.1088/1361-6544/ab1f24.

- [5] Jamilov U. U. Khamraev A. Yu. and Ladra M. On a Volterra cubic stochastic operator. *Bull. Math. Biol.*, 2018, vol. 80, no. 2, pp. 319–334. DOI: 10.1007/s11538-017-0376-0.
- [6] Jamilov U. U. and Ladra M. On identically distributed non-Volterra cubic stochastic operator. *Jour. Appl. Nonlin. Dyn.*, 2017, vol. 6, no. 1, pp. 79–90. DOI: 10.5890/JAND.2017.03.006.
- [7] Jamilov U. U. and Reinfelds A. On constrained Volterra cubic stochastic operators. *J. Difference Equ. Appl.*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 261–274. DOI: 10.1080/10236198.2020.1720664.
- [8] Jamilov U. U. and Reinfelds A. A family of Volterra cubic stochastic operators. *Journal Convex Analysis*, 2021, vol. 28, no. 1, pp. 19–30. DOI: <https://www.heldermann.de/JCA/JCA28/JCA281/jca28003.html>
- [9] Mukhamedov F. M., Embong A. F. and Rosli A. Orthogonal preserving and surjective cubic stochastic operators. *Ann. Funs. Anal.* 2017, vol. 8, no. 4, pp. 490–501. DOI: 10.1215/20088752-2017-0013.
- [10] Mukhamedov F. M., Pah C. H. and Rosli A. On non-ergodic Volterra cubic stochastic operators. *Qual. Theory Dyn. Syst.* 2019, vol. 18, no. 3, pp. 1225–1235. DOI: 10.1007/s12346-019-00334-8.
- [11] Rozikov U. A. and Khamraev A. Yu. On cubic operators defined on finite-dimensional simplices. *Ukrainian Math. J.*, 2004, vol. 56, no. 10, pp. 1699–1711. DOI: 10.1007/s11253-005-0145-3.
- [12] Rozikov U. A. and Khamraev A. Yu. On construction and a class of non-Volterra cubic stochastic operators. *Nonlinear Dyn. Syst. Theory.*, 2014, vol. 14, no. 1, pp. 92–100.
- [13] Khamraev A. Yu. On cubic operators of Volterra type. *Uzbek. Math. Zh.*, 2004, no. 2, pp. 79–84. (in Russian)
- [14] Khamraev A. Yu. A condition for the uniqueness of a fixed point for cubic operators. *Uzbek. Math. Zh.*, 2005, no. 1, pp. 79–87. (in Russian)
- [15] Khamraev A. Yu. On a Volterra-type cubic operator. *Uzbek. Math. Zh.*, 2009, no. 3, pp. 65–71. (in Russian)
- [16] Khamraev A. Yu. and Tursunova A. Kh. *Prob. Comp. App. Math.* Full description of the behavior of trajectories of a cubic operator. 2020, vol. 2, no. 26, pp. 32–38. (in Russian)

Affiliations

A. Y. KHAMRAYEV

ADDRESS: Karshi State University, Karshi. Uzbekistan.

E-MAIL: khamrayev-ay@yandex.ru

ORCID ID:0009-0005-4858-9285

A. R. DONIYOROV

ADDRESS: Karshi State University, Karshi. Uzbekistan.

E-MAIL: third@author.com

ORCID ID:0009-0005-5310-1256

Защита Зданий от Сейсмических Волн с Помощью Сухого Трения и Демпферов

Мирзаев И., Турдиев М.С.* и Рахматов Н.Б.

Аннотация

В данной исследовательской работе рассматривается задача сейсмоизоляции девятиэтажного здания под воздействием 4 различных реальных сейсмических волн путем совместного использования сейсмоизоляторов сухого трения и резинометаллических демпферов. Изучено влияние сейсмических волн на величину сдвиговой силы в здании в результате увеличения и уменьшения их количества.

Ключевые слова: сухое трение; сейсмоизоляция; резинометаллический демпфер.

Предметная классификация AMS (2020): Основная: 74-XX; Дополнительная: 74Jxx; 74Kxx; 74K10; 70F35; 74Pxx; 86A15.

Введение

В мире особое внимание уделяется строительству зданий с сейсмозащитными устройствами, позволяющими повысить сейсмостойкость и надежность зданий и сооружений при воздействии сильных сейсмических волн. В настоящее время в развитых странах, таких как США, Япония, Германия, Россия, Италия и Китай, ведутся работы по созданию новых эффективных типов сейсмозащитных устройств для различных частей несущих конструкций зданий и сооружений с широким использованием местного сырья, учитывая их долговременную эксплуатацию [1-3]. В данной исследовательской работе рассматривается задача сейсмоизоляции девятиэтажного здания под воздействием 4 различных реальных сейсмических волн путем совместного использования сейсмоизоляторов сухого трения и резинометаллических демпферов. Изучено влияние сейсмических волн на величину сдвиговой силы в здании в результате увеличения и уменьшения их количества.

1. Метод

Пусть горизонтальное движение основания конструкции задано в виде акселерограммы действительного землетрясения. Здание представим одномерной сдвиговой моделью с сосредоточенными массами и безынерционными упругими связями. Для данной конструкции применяем конечные элементы смещения, в результате чего приходим к следующей системе простых дифференциальных уравнений [4, 5]:

$$\begin{aligned} [M] \cdot \{\ddot{U}\} + [C] \cdot \{\dot{U}\} + [K] \cdot \{U\} &= \{Q(t)\}, \\ \{U\} &= 0, \quad \{\dot{U}\} = 0 \quad \text{при } t = 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $[M]$ – диагональная матрица масс, $[K]$ – матрица жесткостей; $[C] = \alpha[M] + \beta[K]$ – матрица вязкости, $\{U\}$ – вектор перемещений. Для сейсмоизолятора сухого трения условие взаимосвязи массы ростверка M_0 и скользящего фундамента принимает следующий вид:

$$u_0 = u_g - u_r, \quad \text{если } |F_0| < |F_{fr}|, \quad \text{т.е. при совместном движении}, \quad (1.2)$$

$$F_0 = F_{fr}, \text{ при скольжении,} \quad (1.3)$$

где u_0 — горизонтальное перемещение ростверка, u_g — перемещение фундамента, u_r — величина сдвига в момент времени в начале текущего совместного движения без скольжения нижней части фундамента и движения ростверка, т.е. разность между значениями перемещений нижней части фундамента и ростверка (в начальный момент времени $u_r = 0$), F_0 — неизвестное значение силы сцепления между верхним и нижним фундаментами;

$$F_{fr} = \text{sign}(\dot{u}_g - \dot{u}_0) \cdot f \cdot P. \quad (1.4)$$

P — значение силы сухого трения, f — коэффициент сухого трения; P — вес здания. Если сухое трение скольжения осуществляется на основе материала фторопласта-4, то $f = 0.05$. При совместном движении перемещение u_0 определяется по равенству (1.2) и уравнение движения массы M_1 имеет вид [4],[5]:

$$M_1 \ddot{u}_1 + k u_1 + c_1 \dot{u}_1 - k_2(u_2 - u_1) - c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) = k_1 u_0 + c_1 \dot{u}_0 \quad (1.5)$$

В этом случае $Q_1 = k_1 u_0 + c_1 \dot{u}_0$, остальные элементы вектора $\{Q\}$, соответствующие горизонтальным перемещениям сосредоточенных масс, равны нулю.

Скольжение с сухим трением наступает только тогда, когда выполняется условие (1.3). В этом случае демпферная сила имеет вид $F_{dm} = k_0 u_r + c_0 \dot{u}_r$. Рассматриваемая задача (1.1), (1.2), (1.3) является нелинейной задачей, при этом отсутствуют условия вычисления неизвестной функции F_0 , а также во время динамического процесса изменяются размерности матриц $[M]$ и $[K]$. При скольжении имеет место уравнение для массы $[M_0]$ [4, 5]:

$$M_0 \ddot{u}_0 + k_0 u_0 - k_1(u_1 - u_0) + c_0 \dot{u}_0 - c_1(\dot{u}_1 - \dot{u}_0) = F_{fr} + k_0 u_g + c_0 \dot{u}_g, \quad (1.6)$$

где $Q_0 = F_{fr} + k_0 u_g + c_0 \dot{u}_g$; k_0 , c_0 — жесткость и вязкость резинометаллического изолятора, дополнительно размещенного между фундаментом и ростверком. Для решения задачи в целом воспользуемся следующим алгоритмом. На каждом шаге по времени решаем задачи в трех постановках:

1. Уравнение (1.1) решаем с условием (1.2);
2. Уравнение (1.1) решаем с условием (1.3), при $F_0 = f \cdot P$;
3. Уравнение (1.1) решаем с условием (1.3), при $F_0 = -f \cdot P$.

При этом матрицы $[M]$ и $[K]$ в первой постановке имеют размер $m \times m$ (здесь m количество этажей здания), а во второй и третьей постановках $(m+1) \times (m+1)$. Выбор действительного решения из этих трех решений осуществляется следующим образом. Если относительные скорости $\dot{u}_g - \dot{u}_0$ во втором и третьем условиях задач имеют разные знаки, правильное решение является решением задачи в первом условии, поскольку сила сухого трения приводит фундамент в движение в разных направлениях, и поэтому неизвестная сила меньше порогового значения силы сухого трения, то есть скольжения нет. Если относительные скорости во втором и третьем условиях задачи имеют одинаковый знак, то решение при условии наименьшего абсолютного значения относительной скорости является действительным, так как сила сухого трения всегда направлена против относительного движения. Все три задачи решаются методом Ньюмарка [4, 5].

1.1. Результат.

Проанализируем результаты вычислений с помощью следующих примеров. Даны характеристики 9-этажного здания, а также действительные сейсмографические записи следующих землетрясений. Приближенное сопоставление расчетов проведено с использованием результатов воздействия 4 типов землетрясений:

- №1. Абхарское землетрясение (Иран 20.06.1990) 8 баллов по шкале MSK-64: ускорение – 1.93 м/с²; скорость – 0.19 м/с; перемещение – 0.0641 м, продолжительность – 36 сек.
- №2. Газлинское землетрясение (Узбекистан 17.05.1978) более 9 баллов по шкале MSK-64: ускорение – 7.22 м/с²; скорость – 0.62 м/с; перемещение – 0.18 м; продолжительность – 28 сек.
- №3. Землетрясение Duzce (Турция 17.08.1999) магнитудой 9 по шкале MSK-64: ускорение – 3.66 м/с², скорость – 0.45 м/с; перемещение – 0.1065 м, продолжительность – 36 сек.
- №4. Табасское (Иран) землетрясение 16.09.1978 баллов выше 9 по шкале MSK-64: ускорение – 10.17 м/с²; скорость – 0.88 м/с; перемещение – 0.3446 м; продолжительность – 78.398 сек.

Таблица 1. Землетрясение №1

Этаж	Без скольжения $q_{\max}$ (кН)	При скольжении $f = 0.05$ и числе резинометаллических демпферов $q_{1 \max}$ (кН)					
		27 та	23 та	19 та	15 та	9 та	0 та
1	13200	11400	13000	12200	14300	13100	2350
2	11700	12800	14100	11200	13700	14200	2680
3	10700	11600	12500	10900	13800	13600	2910
4	9510	12200	13300	11400	13100	12900	3000
5	8140	12600	14000	11400	13600	12200	2900
6	6640	11700	11600	11800	13300	11700	2650
7	5040	11800	11700	12600	12000	11600	2310
8	3350	11000	10800	11800	13000	11300	1710
9	1600	7050	6850	7150	8960	7560	876

Таблица 2. Землетрясение №2

Этаж	Без скольжения $q_{\max}$ (кН)	При скольжении $f = 0.05$ и числе резинометаллических демпферов $q_{1 \max}$ (кН)					
		27 та	23 та	19 та	15 та	9 та	0 та
1	68100	14800	15900	20300	18400	16100	12300
2	61000	11300	13000	12100	11500	13800	11000
3	56300	12100	12700	13400	12100	13900	10400
4	50700	12200	14700	15300	11200	13500	10200
5	44000	11300	13900	15300	10600	14000	10000
6	36400	12200	13000	13400	12300	14700	9800
7	28700	12800	13400	12400	13000	12900	9200
8	19800	10400	13200	12500	11300	12800	7150
9	9640	6760	8390	7560	7410	8020	6400

Таблица 3. Землетрясение №3

Этаж	Без скольжения $q_{\max}$ (кН)	При скольжении $f = 0.05$ и числе резинометаллических демпферов $q_{1 \max}$ (кН)					
		27 та	23 та	19 та	15 та	9 та	0 та
1	19400	15700	13900	15200	14600	15700	2210
2	18100	11300	9470	10000	11600	11300	2450
3	16500	11900	9310	12000	9890	11900	2670
4	14600	11400	8500	10900	8900	11400	2850
5	12500	10800	8380	10700	9280	10800	2950
6	10200	11500	7450	11600	10500	11500	2890
7	7770	9600	7330	10100	10700	14900	2580
8	5150	9070	8620	10000	9990	15000	1950
9	2460	5740	5470	7020	5980	9310	1000

Таблица 4. Землетрясение №4

Этаж	Без скольжения $q_{\max}$ (кН)	При скольжении $f = 0.05$ и числе резинометаллических демпферов $q_{1 \max}$ (кН)					
		27 та	23 та	19 та	15 та	9 та	0 та
1	131000	18700	14800	20900	19900	19300	21000
2	124000	13600	12200	13100	15300	13400	12800
3	115000	12700	13000	13300	14900	15200	14200
4	104000	12500	12700	12900	13900	15500	14300
5	90800	13200	13600	13000	13200	15300	12600
6	74900	11700	15200	13500	12500	15100	13200
7	57200	11300	15200	15400	14100	16400	13300
8	38200	11300	12700	15400	15300	15000	13100
9	18300	7510	7710	10000	10000	9380	8180

Существующие записи сильных землетрясений взяты из европейской базы данных [6].

Девятиэтажное здание серии 76-017СП/53 имеет следующие характеристики: крупнопанельное здание размером в плане 291.6 м^2 ; сосредоточенные массы в уровнях верхней части фундамента и этажей $M_0 = 449000 \text{ кг}$, $M_1 = 379500 \text{ кг}$, $M_2 = 379500 \text{ кг}$, $M_3 = 379500 \text{ кг}$, $M_4 = 379500 \text{ кг}$, $M_5 = 379500 \text{ кг}$, $M_6 = 379500 \text{ кг}$, $M_7 = 379500 \text{ кг}$, $M_8 = 379500 \text{ кг}$, $M_9 = 341000 \text{ кг}$, при этом общий вес здания, давящий на нижнюю часть фундамента, равен $P = 37494800 \text{ Н}$; сдвиговые жесткости по этажам одинаковы $k = 32.357 \cdot 10^9 \text{ Н/м}$; вязкость материала здания по этажам одинакова $\mu_i = 10.58 \cdot 10^6 \text{ Нс/м}$. Значения частот собственных колебаний с жесткой заделкой фундамента: $\omega_1 = 79 \text{ Гц}$, $\omega_2 = 160 \text{ Гц}$, $\omega_3 = 239 \text{ Гц}$, $\omega_4 = 314 \text{ Гц}$, $\omega_5 = 380 \text{ Гц}$. Для защиты рассматриваемого 9 этажного здания от сейсмических волн, наряду с сухим трением, мы используем 27 резинометаллических демпферов. Демпферы производства компании FIR. Жесткость одного демпфера в серии SI-S 600/152 равна $k_0 = 0.74 \cdot 10^6 \text{ Н/м}$ [?]. Проанализируем результаты,

уменьшив количество демпферов соответственно до 27 ($k_0 = 19.98 \cdot 10^6$ Н/м), 23 ($k_0 = 17.02 \cdot 10^6$ Н/м), 19 ($k_0 = 14.06 \cdot 10^6$ Н/м), 15 ($k_0 = 11.1 \cdot 10^6$ Н/м) и 9 ($k_0 = 6.66 \cdot 10^6$ Н/м), а также рассчитаем вариант без резинометаллического демпфера. При численном решении задач с сухим трением, не зависимо от выбора явной или неявной конечно-разностной схемы, шаг по времени необходимо подбирать для обеспечения достаточной точности. В наших примерах расчетный шаг по времени был равен 0.0001.

Заключение.

В данной исследовательской работе на основе различных записей реальных сейсмических волн показано, что сейсмическая изоляция с совместным использованием сухого трения и резинометаллических изоляторов менее эффективна, чем сейсмическая изоляция только с сухим трением (табл. Использование демпферов компании FIP для сейсмоизоляции зданий обходится дорого. Использование фторопласта, материала, обеспечивающего скольжение, значительно дешевле, чем демпферы.

Список литературы

- [1] Hiroki, A., Kotaro, K., Kohei, F., Izuru, T.: Critical Response of Nonlinear Base-Isolated Building Considering Soil-Structure Interaction Under Double Impulse as Substitute for Near-Fault Ground Motion. *Front. Built Environ.* 4, 1-13 (2018).
- [2] FIP Industriale: Резинометаллические Изоляторы серии SI S02. (2014).
- [3] Curved Surface Sliders. Homepage. Available at: <https://docplayer.net/133188454-Curved-surface-sliders.html>.
- [4] Mirzaev, I., Turdiev, M. S.: Vibrations of buildings with a sliding foundation having lateral yielding contact under real seismic impacts. *AIP Conf. Proc.* 2432, 030050, 1-6 (2022).
- [5] Мирзаев, И., Турдиев, М. С.: Колебания зданий с подвижным фундаментом при реальных сейсмических воздействиях разного спектра частот. *Transportda resurs tejamlar texnologiyalar*, 502-506 (2023).
- [6] Ambraseys, N. N., et al.: Internet site for European strong-motion data. *Boll. Geof. Teor. Appl.* 45 (3), 113-129 (2004). Available at: http://www.isesd.hi.is/ESD_local/frameset.htm.

Protection of Buildings From Seismic Waves Using Dry Fracture and Dampers

Mirzayev I., Turdiyev M.S. and Raxmatov N.B.

Abstract

In this research work, the problem of seismic isolation of a nine-story building under the influence of 4 different real seismic waves through the joint use of dry friction isolators and rubber-metal dampers is considered. The influence of seismic waves on the magnitude of the shear force in the building as a result of their increase and decrease was studied.

Affiliations

Mirzayev I.

Address: Doctor of physical and mathematical sciences, Professor, Professor of the Department of Applied Mechanics, Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan.

e-mail: ibrakhim.mir@mail.ru

ORCID ID: 0000-0002-8616-9717

Turdiyev M.S.

Address: Associate Professor of the Department of Applied Mechanics, Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan.

e-mail: malikjon_t@mail.ru

ORCID ID: 0000-0002-2499-0243

Raxmatov N.B.

Address: Assistant of the Department of Differential Equations and Mathematical Physics, National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan.

e-mail: nodirbekrakhmatov0@gmail.com

ORCID ID:

Analysis of the dynamics of quadratic mappings of a simplex with skew-symmetric matrices that are not in general position

D.B.Eshmamatova * A.A.Alimov and M.A.Tadzhieva

ABSTRACT

The Lotka – Volterra systems arise in questions of biology, population genetics, epidemiology, ecology, economics as well as in some branches of theoretical physics, in particular, in solid state physics. Some important questions of ecology (for example, biogens cycles) can be studied using Lotka – Volterra mappings operating in a four-dimensional simplex with homogeneous tournaments. In this regard, the work is devoted to the construction and study of cards of fixed points of Lotka – Volterra mappings operating in a four-dimensional simplex in the case of homogeneous tournaments (for arbitrary coefficients of a skew-symmetric matrix). The card of fixed points gives us a more detailed understanding of the asymptotic behavior of the trajectories of discrete dynamical Lotka – Volterra systems. In the paper, we show that even if the tournaments corresponding to the Lotka – Volterra mappings are homogeneous, among them it is possible to distinguish a class of mappings with skew-symmetric matrices that are not matrices in a general position. It is not possible to generalize this kind of mappings; each of them represents a map of fixed points of a different type. This is clearly noted in the work. It is also shown that even in the case when the tournament corresponding to the Lotka – Volterra mapping is homogeneous, the set of fixed points is infinite and the card of fixed points consists of a convex hull of fixed points belonging to strong faces.

Keywords: fixed point; homogeneous tournament; quadratic Lotka – Volterra mapping; simplex.

AMS Subject Classification (2020): Primary: 37B25 ; Secondary: 37C25; 37C27.

1. Introduction

One of the main problems in mathematical biology, epidemiology and ecology is the study of the asymptotic behavior of the trajectories of dynamical systems. The works [1-4] are devoted to the study of continuous dynamical systems and the asymptotic behavior of their trajectories. The proposed work is devoted to the analysis of the trajectories of interior points of quadratic Lotka – Volterra mappings operating in a four-dimensional simplex that are not in a general position. Before presenting the main results, let us start with preliminary information and a review of the literature.

Let

$$S^{m-1} = \{x \in \mathbb{R}^m : x = (x_1, \dots, x_m) : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^m x_i = 1\}$$

the standard simplex in $\mathbb{R}^m$ and $A = (a_{ki})$, $k, i = \overline{1, m}$ – is a skew-symmetric matrix with conditions $|a_{ki}| \leq 1$.

The mapping $V : S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$ defined by equality

$$V : x'_k = x_k \left(1 + \sum_{i=1}^m a_{ki} x_i \right), \quad k = \overline{1, m}, \quad (1.1)$$

is called the discrete Lotka – Volterra operator. Mappings of the form (1.1) arise in problems of population genetics that describe the evolution of a certain population over time, and time is considered discrete [5].

Each Lotka – Volterra operator and its corresponding skew-symmetric matrix are associated with a complete oriented tournament graph [6], [7] and a partially oriented graph [8].

A complete directed graph – tournament is constructed if the skew-symmetric matrix is in the general position [6]. To build a tournament, let us take m points numbered $1, 2, \dots, m$ on the plane and connect the point with the number k to the point with the number i with an arc directed from k to i if $a_{ki} < 0$ and in the opposite direction if $a_{ki} > 0$.

So, the graph constructed in this way is called a tournament corresponding to the Lotka – Volterra operator and we denote it by T_m .

A tournament is called strong if there is a path from any vertex to any other according to the orientation (direction of the arc).

A tournament that does not have strong subtournaments is called a transitive.

Definition 1.1. [9] A tournament is called homogeneous if any of its sub-tournaments is either strong or transitive.

Theorem 1.2. A is a skew-symmetric matrix, then the sets

$$P = \{x \in S^{m-1} : Ax \geq 0\} \quad \text{and} \quad Q = \{x \in S^{m-1} : Ax \leq 0\}$$

non-empty convex polyhedra.

Theorem 1.3. If A is a generic skew-symmetric matrix, then the set P (respectively Q) consists of a single point.

2. The card of fixed points of the operator V

Let us recall the concept of a card of fixed points for a dynamic system (1.1) [9], [10]:

Let $\alpha \subset I = \{1, \dots, 5\}$. We represent the set of all fixed points $\{x \in S^4 : Vx = x\}$ of the operator V as points on the plane, then for each $\alpha \subset I$ the fixed point Q_α is connected by an arc to a fixed point P_α directed from P_α to Q_α . The resulting directed graph is called the card of fixed points of the operator V we denote it by G_V .

It is known [11], [12] that for $m = 5$, only the next four tournaments are homogeneous. These are the tournaments shown in Figure 1.

In case a), the tournament is transitive. If the tournament is transitive, then any trajectory of the Lotka – Volterra mapping converges to one of the vertices of the simplex [10]. This means that the fixed point card G_V coincides with the tournament itself T_5 . In the case of transitivity, the operator has no fixed points except the vertices of the simplex [12]. Next, we mark the vertices of the tournaments with the numbers $1, 2, 3, 4, 5$ from top to bottom, and the substructure with vertices, for example $1, 2, 5$, is denoted by $\overline{125}$.

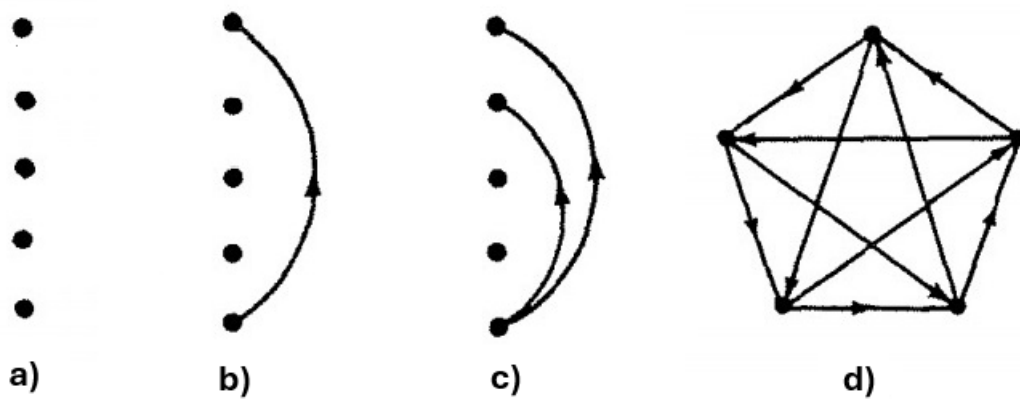


Figure 1. Homogeneous tournament.

Definition 2.1.[11] A skew-symmetric matrix $A = (a_{ki})$ is called a general position matrix if all major minors of even order are nonzero.

If the skew-symmetric matrix of general position, then the corresponding Lotka – Volterra mapping V with coefficients a_{ki} is also a general position operator. The task assigned to us is to study quadratic Lotka – Volterra mappings operating in a four-dimensional simplex that are not in a general position. That is, we show that even if the tournament corresponding to the skew-symmetric matrix is homogeneous, but the matrix itself and, accordingly, the operator may not be in the general position. Since the skew-symmetric matrix of the system is not a matrix of general position, i.e. all major minors of the fourth order (there are only five of them in this case) are zero. Fixed point cards have been constructed and studied for such mappings, since the structure of fixed point cards gives a detailed idea of the asymptotic behavior of the trajectories of interior points of discrete Lotka – Volterra dynamical systems.

In [12], [13] it is proved that skew-symmetric matrices of general position form an open and everywhere dense subset in the set of all skew-symmetric matrices.

For example, the mapping of Lotka-Volterra $V : S^3 \rightarrow S^3$ has the form:

$$\begin{cases} x'_1 = x_1(1 + a_{12}x_2 - a_{13}x_3 + a_{14}x_4), \\ x'_2 = x_2(1 - a_{12}x_1 + a_{23}x_3 - a_{24}x_4), \\ x'_3 = x_3(1 + a_{13}x_1 - a_{23}x_2 + a_{34}x_4), \\ x'_4 = x_4(1 - a_{14}x_1 + a_{24}x_2 - a_{34}x_3), \end{cases}$$

where $a_{ki} \in [-1; 1]$, $k, i = \overline{1, 4}$

This operator is a general position operator if and only if the coefficients $a_{ki} \in [-1; 1]$, $k, i = \overline{1, 4}$ satisfy the following conditions:

$$a_{ki} \neq 0, k, i = \overline{1, 4} \text{ and } a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23} \neq 0.$$

Fixed point cards for the Lotka – Volterra operators were first introduced in [5] and it also introduced the concept of a homogeneous card for Lotka – Volterra mappings. Many other useful properties of the fixed point card are given in [12], [13]. But these papers do not consider in detail the cases when the skew-symmetric matrix corresponding to the Lotka – Volterra mapping is not in the general position. Our goal is to consider these cases in more detail, since these mappings can serve as a discrete model of the biogen

cycle in an ecosystem. In [14], the Lotka – Volterra mapping is investigated, acting in a four-dimensional simplex as a discrete model of the phosphorus and carbon cycle, depending on the nature of the card of fixed points of this mapping. Here we show that among those operators there can also be those that are not in general position and the set of their fixed points is an infinite set. Let us go over each case in detail.

3. Main results

a) Consider the Lotka – Volterra operator acting in

$$S^4 = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5, x_i \geq 0, \sum_{i=1}^5 x_i = 1\},$$

with the corresponding transitive tournament T_5 .

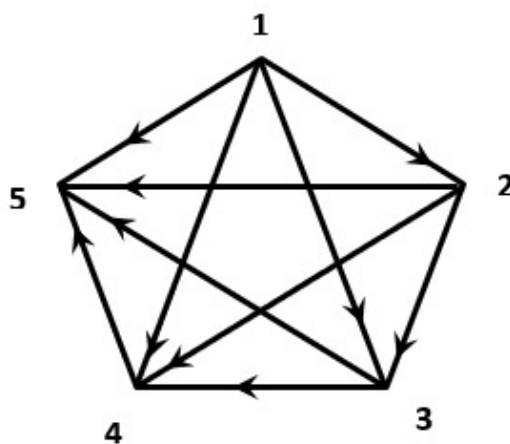


Figure 2. Transitive tournament.

The skew-symmetric matrix corresponding to this operator has the form:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} & -a_{15} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & -a_{24} & -a_{25} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & -a_{34} & -a_{35} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & 0 & -a_{45} \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & 0 \end{pmatrix}$$

where $|a_{ki}| \leq 1$.

It is easy to see from the classical algebra course that there are only five major minors of the fourth order for this matrix.

$$A_1^{11} = \begin{pmatrix} 0 & -a_{23} & -a_{24} & -a_{25} \\ a_{23} & 0 & -a_{34} & -a_{35} \\ a_{24} & a_{34} & 0 & -a_{45} \\ a_{25} & a_{35} & a_{45} & 0 \end{pmatrix}$$

The determinant of the skew-symmetric matrix A_1^{11} is equal to the following expression:

$$A_1^{11} = \begin{vmatrix} 0 & -a_{23} & -a_{24} & -a_{25} \\ a_{23} & 0 & -a_{34} & -a_{35} \\ a_{24} & a_{34} & 0 & -a_{45} \\ a_{25} & a_{35} & a_{45} & 0 \end{vmatrix} = (a_{23}a_{45} - a_{24}a_{35} + a_{25}a_{34})^2.$$

Similarly, we can calculate the values of the remaining fourth-order minors:

$$A_2^{22} = (a_{15}a_{34} - a_{14}a_{35} + a_{13}a_{45})^2,$$

$$A_3^{33} = (a_{15}a_{24} - a_{14}a_{25} + a_{12}a_{45})^2,$$

$$A_4^{44} = (a_{15}a_{23} - a_{13}a_{25} + a_{12}a_{35})^2,$$

$$A_5^{55} = (a_{14}a_{23} - a_{13}a_{24} + a_{12}a_{34})^2.$$

Now we can select the elements of the skew-symmetric matrix so that the values of these minors are zero,

$$a_{12} = a_{13} = a_{14} = a_{15} = a_{23} = a_{34} = a_{45} = \frac{1}{3}, \quad a_{24} = a_{35} = \frac{2}{3}, \quad a_{25} = 1$$

i.e.

$$A_1^{11} = (a_{23}a_{45} - a_{24}a_{35} + a_{25}a_{34})^2 = (1 - 4 + 3)^2 = 0$$

$$A_2^{22} = (a_{15}a_{34} - a_{14}a_{35} + a_{13}a_{45})^2 = (1 - 2 + 1)^2 = 0,$$

$$A_3^{33} = (a_{15}a_{24} - a_{14}a_{25} + a_{12}a_{45})^2 = (2 - 3 + 1)^2 = 0,$$

$$A_4^{44} = (a_{15}a_{23} - a_{13}a_{25} + a_{12}a_{35})^2 = (1 - 3 + 2)^2 = 0,$$

$$A_5^{55} = (a_{14}a_{23} - a_{13}a_{24} + a_{12}a_{34})^2 = (1 - 2 + 1)^2 = 0.$$

The picture is clear here, since the tournament is transitive, the card of fixed points completely coincides with it.

The tournament shown in Figure is strong and in its expanded form looks as shown in Figure 3.

From the Figure 3 we see that T_5 has three cyclic triples $\bar{1}25, \bar{1}35, \bar{1}45$, i.e. three strong substructures with three vertices. It is known [1, 2] that if a tournament with three vertices is strong, then the mapping corresponding to this tournament has a fixed point inside the simplex, unlike its vertices. Below we will find the coordinates of these points.

The skew-symmetric matrix corresponding to this strong tournament has the form:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} & a_{15} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & -a_{24} & -a_{25} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & -a_{34} & -a_{35} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & 0 & -a_{45} \\ -a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & 0 \end{pmatrix}$$

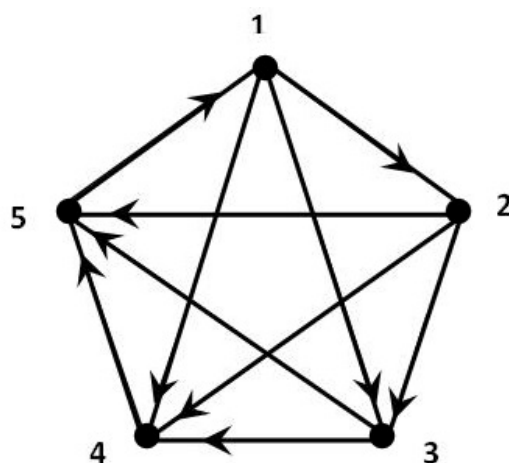


Figure 3. Strong tournament.

In [], the same operator was investigated when it is in a general position and it is proposed as a discrete model of the carbon and phosphorus cycle in an ecosystem, depending on the type of fixed point map. But as it turned out, for this operator, too, the elements of the skew-symmetric matrix can be selected so that all major minors of the fourth order are equal to zero,

$$a_{14} = a_{15} = a_{23} = a_{25} = a_{34} = a_{35} = a_{45} = \frac{1}{3}, \quad a_{13} = a_{24} = \frac{2}{3}, \quad a_{12} = 1$$

$$A_1^{11} = (a_{23}a_{45} - a_{24}a_{35} + a_{25}a_{34})^2 = (1 - 2 + 1)^2 = 0$$

$$A_2^{22} = (a_{14}a_{35} - a_{13}a_{45} + a_{15}a_{34})^2 = (1 - 2 + 1)^2 = 0,$$

$$A_3^{33} = (a_{14}a_{25} - a_{12}a_{45} + a_{15}a_{24})^2 = (1 - 3 + 2)^2 = 0,$$

$$A_4^{44} = (a_{13}a_{25} - a_{12}a_{35} + a_{15}a_{23})^2 = (2 - 3 + 1)^2 = 0,$$

$$A_5^{55} = (a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23})^2 = (1 - 4 + 3)^2 = 0.$$

The mapping in this case looks like

$$\begin{cases} x'_1 = x_1(1 - x_2 - \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5), \\ x'_2 = x_2(1 + x_1 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5), \\ x'_3 = x_3(1 + \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5), \\ x'_4 = x_4(1 + \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_5), \\ x'_5 = x_5(1 - \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4). \end{cases} \quad (3.1)$$

and it is not in the general position, since all major minors of the fourth order are zero and the card of fixed points for this operator has the form shown in Figure 4.

The card of fixed points has the form of an undirected graph, which means that the set of fixed points is infinite and consists of a convex hull of three fixed points that belong to the strong faces of the simplex

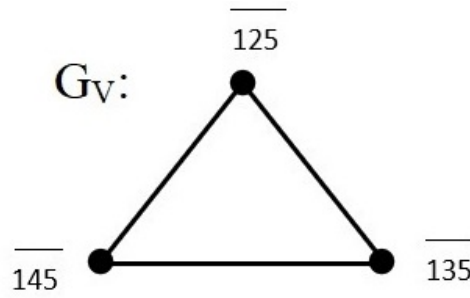


Figure 4. The card of fixed point for homogeneous tournament.

$\Gamma_{125}, \Gamma_{135}, \Gamma_{145}$. Now, in order to investigate the characters of fixed points belonging to the convex hull of fixed points belonging to strong faces, we first find their coordinates explicitly by solving the equation $Vx = x$, according to [10]:

$$M_1 \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, 0, 0, \frac{3}{5} \right), \quad M_2 \left(\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{2} \right), \quad M_3 \left(\frac{1}{3}, 0, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

Now let us take their convex hull:

$$M_1 \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, 0, 0, \frac{3}{5} \right) | \alpha$$

$$M_2 \left(\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{2} \right) | \beta$$

$$M_3 \left(\frac{1}{3}, 0, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) | \gamma$$

For the considered mapping, an arbitrary fixed point belonging to this shell has coordinates of the form:

$$M \left(\frac{1}{5}\alpha + \frac{1}{4}\beta + \frac{1}{3}\gamma; \frac{1}{5}\alpha; \frac{1}{4}\beta; \frac{1}{3}\gamma; \frac{3}{5}\alpha + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{3}\gamma \right), \quad 0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 1$$

Let $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{3}$, then the fixed point has the form $M \left(\frac{47}{180}, \frac{1}{15}, \frac{1}{12}, \frac{1}{9}, \frac{43}{90} \right)$.

Now we calculate the eigenvalues for this fixed point, i.e. we analyze the spectrum of the Jacobian at this point and get the following:

$$\lambda_1 = \frac{1}{90} (90 + i\sqrt{510})$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{90} (90 - i\sqrt{510})$$

$$\lambda_3 = 1, \quad \lambda_4 = 1, \quad \lambda_5 = 1.$$

It is easy to see that the modulo eigenvalues are greater than one. This means that the entire convex hull consists of repulsive fixed points. The definitions describing the characters of fixed points are given in [11], [12].

Now, let us move on to the third tournament from Figure 1 (see Figure 5).

This strong tournament, unlike the previous one, has four strong sub-tournaments, with three vertices - $135, 145, 235, 245$. Each of these strong triples has one interior fixed point. Let us select the elements of the

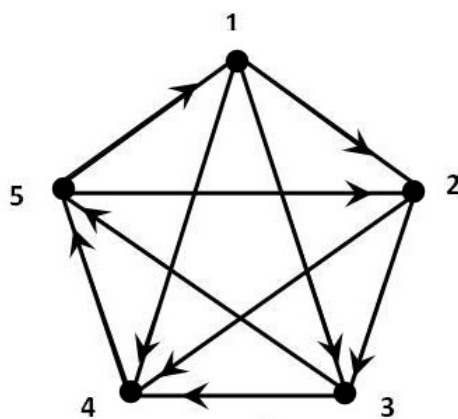


Figure 5. The homogeneous tournament.

skew-symmetric matrix

$$a_{12} = a_{14} = a_{24} = a_{25} = a_{34} = a_{35} = a_{45} = 1, \quad a_{15} = a_{23} = 2, \quad a_{13} = 3$$

and then

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

we get the minors equal to zero, i.e.

$$A_1^{11} = (a_{24}a_{35} - a_{23}a_{45} + a_{25}a_{34})^2 = (1 - 2 + 1)^2 = 0$$

$$A_2^{22} = (a_{14}a_{35} - a_{13}a_{45} + a_{15}a_{34})^2 = (1 - 3 + 2)^2 = 0,$$

$$A_3^{33} = (a_{12}a_{45} - a_{15}a_{24} + a_{14}a_{25})^2 = (1 - 2 + 1)^2 = 0,$$

$$A_4^{44} = (a_{12}a_{35} - a_{15}a_{23} + a_{13}a_{25})^2 = (1 - 4 + 3)^2 = 0,$$

$$A_5^{55} = (a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23})^2 = (1 - 3 + 2)^2 = 0.$$

Since in this case there are four interior fixed points belonging to strong faces, the card of fixed points looks like a convex hull of them (see Figure 6).

Here, as in the previous case, we can explicitly calculate the coordinates of the vertices of the card and check the characters of the fixed points belonging to this card.

The last – fourth tournament has five strong sub-tournaments, which means that the card has interior fixed points belonging to the faces of the simplex Γ_{124} , Γ_{134} , Γ_{135} , Γ_{235} and Γ_{245} . Here, you can also select the elements of a skew-symmetric matrix, so that all its fourth-order minors are equal to zero.

$$a_{12} = a_{13} = a_{14} = a_{15} = a_{24} = a_{25} = a_{35} = 1, \quad a_{23} = a_{45} = 2, \quad a_{34} = 3$$

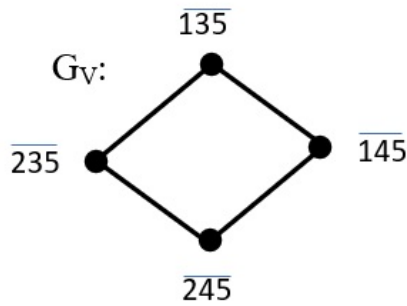


Figure 6. The card of fixed point for homogeneous tournament.

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_1^{11} = (a_{24}a_{35} - a_{23}a_{45} + a_{25}a_{34})^2 = (1 - 4 + 3)^2 = 0$$

$$A_2^{22} = (a_{13}a_{45} - a_{15}a_{34} + a_{14}a_{35})^2 = (1 + 2 - 3)^2 = 0,$$

$$A_3^{33} = (a_{14}a_{25} - a_{12}a_{45} + a_{15}a_{24})^2 = (1 - 2 + 1)^2 = 0,$$

$$A_4^{44} = (a_{12}a_{35} - a_{15}a_{23} + a_{13}a_{25})^2 = (1 - 2 + 1)^2 = 0,$$

$$A_5^{55} = (a_{13}a_{24} - a_{12}a_{34} + a_{14}a_{23})^2 = (1 - 3 + 2)^2 = 0.$$

The fixed points card of this operator has the form shown in Figure 7.

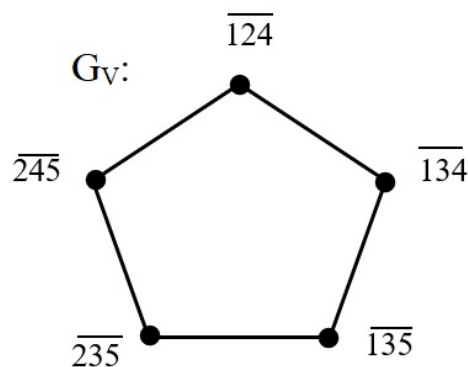


Figure 7. The card of fixed point for homogeneous tournament.

In conclusion, we have constructively proved the following theorem.

Corollary 3.1. Let give a discrete Lotka – Volterra mapping of the form (1.1). If all the major minors of the second order of the skew-symmetric matrix corresponding to this mapping are nonzero, then

- if all fourth-order minors are nonzero, then all eigenvalues of the skew-symmetric matrix are complex numbers and the kernel is zero,

$$\det A \neq 0, \quad \text{Ker} A = \{0\},$$

that is, the mapping is in the general position;

- if all the major minors of the fourth order are zero, then the core of the skew-symmetric matrix will be nonzero, i.e. $\text{Ker} A \neq \{0\}$. The equation $Ax = 0$ has a solution and the eigenvalues of the skew-symmetric matrix are modulo greater than one, which means that the card of fixed points consists of repulsive fixed points.

4. Conclusion

The main result of this paper, in contrast to works [5], [11], [12], is the study of quadratic Lotka – Volterra mappings that are not mappings in general position. Mappings of this nature can be proposed as a discrete model to study the biogen cycle in the ecosystem [13]. In the paper, we analyze the cases where all the principal minors of even order are equal to zero, the set of fixed points is infinite, and the card of fixed points consists of the convex hull of fixed points belonging to strong faces. The main result of the work is Theorem 3, in which the kernel of a skew-symmetric matrix and its eigenvalues are analyzed. As a result, the nature of the fixed points of the considered mappings is determined. The cases considered in this paper can be used as a discrete model of the nitrogen cycle. We will consider the application in the next paper. In the paper we use elements of the graph theory in order to clearly see the dynamic picture of the considered mappings, since the use of elements of graph theory and the construction of cards of fixed points helps to visually build a picture in problems of ecology, epidemiology etc.

Acknowledgements

We, the authors of the paper Analysis of the dynamics of quadratic mappings of a simplex with skew-symmetric matrices that are not in general position would like to thank the Tashkent State Transport University for the opportunity to publish our work.

References

- [1] Brin, M. and Stuck, G. Introduction to Dynamical Systems. Cambridge University Press. (2004).
- [2] Cvetkovich, M. and Karapinar, E. and Rakocevic, V. Fixed point results for admissible Z-contractions. Fixed Point Theory.Math. — 19 — (2). — P. — 515-526. (2018).
- [3] O. Galor, Discrete dynamical systems. Springer. Berlin. — P. 153. (2007).
- [4] Murray J.D. Mathematical biology. Third Edition. Springer. p. 776. (2009).
- [5] Ganikhodzhaev R.N. Quadratic stochastic operators, Lyapunov function and tournaments, Acad. Sci. Sb. Math., 76(2), p. 489-506. (1993)
- [6] Harary F., Palmer E.M. Graphical enumeration. Academic Press New York and London. 1973.
- [7] G. Chartrand and H. Jordan and V. Vatter and P. Zhang. Graphs and Digraphs. CRC Press. p. 364. (2024)
- [8] Kh. Koh and F. Dong and E.G. Tay. Introduction to graph theory. World Scientific. p. 308. (2024)
- [9] Ganikhodzhaev R.N., Tadzhieva M.A. Stability of fixed points of discrete dynamic systems of Volterra type. AIP Conference Proceedings, 2021. V. 2365. P. 060005-1 — 060005-7. <https://doi.org/10.1063/5.0057979>. (Scopus. IF=0.7).
- [10] Ganikhodzhaev R.N., Tadzieva M.A., Eshmatova D.B. Dynamical Properties of Quadratic Homeomorphisms of a Finite-Dimensional Simplex. Journal of Mathematical Sciences — 245 — (3). — P. — 398-402.

- [11] Ganikhodzhaev R.N., Eshmamatova D.B. Quadratic automorphisms of a simplex and the asymptotic behavior of their trajectories. Vladikavkaz. Mat. Zh., 2006, Volume 8, Number 2, 12-28.
- [12] Eshmamatova D.B., Ganikhodzhaev R.N. Tournaments of Volterra type transversal operators acting in the simplex S^{m-1} . AIP Conference Proceedings 2365, 060009 (2021). <https://doi.org/10.1063/5.0057303>.
- [13] Ganikhodzhaev R.N. A chart of fixed points and Lyapunov functions for a class of discrete dynamical systems, Math. Notes, 56 (5-6), (1994) pp.1125-1131.
- [14] D.B. Eshmamatova and R.N. Ganikhodzhaev and M.A. Tadzhiyeva. Degenerate Cases in Lotka-Volterra Systems. AIP Conference Proceedings, 2024. V. 2781. <https://doi.org/10.1063/5.0057979>. (Scopus. IF=0.7).

Affiliations

ESHMATOVA, D.B.

ADDRESS: Doctor of physical and mathematical sciences, head of the department of higher mathematics, Tashkent State Transport University, Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Senior Researcher. Tashkent, Uzbekistan.

E-MAIL: 24dil@mail.ru

ORCID ID: 0000-0002-1096-2751

ALIMOV A.A.

ADDRESS: Associate Professor, head of the department of higher mathematics, Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan.

E-MAIL: alimovakrom63@yandex.ru

ORCID ID: 0000-0002-3070-2674

TADZHIYeva M.A.

ADDRESS: PhD, head of the department of higher mathematics, Tashkent State Transport University, Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Senior Researcher. Tashkent, Uzbekistan.

E-MAIL: mohbonut@mail.ru

ORCID ID: 0000-0001-9232-3365

Решение уравнения Монжа-Ампера с использованием геометрических преобразований

Абдуллаазиз Артикбаев, Гулноза Холмуродова *

Аннотация

Геометрическая задача восстановления выпуклой поверхности по заданной функции эквивалентна решению определенного уравнения Монжа-Ампера. В этом случае внешняя кривизна определяется как функция борелевских множеств. И. Я. Бакельман построил эту теорию и доказал существование и единственность решения уравнения Монжа-Ампера эллиптического типа в односвязной выпуклой области. А. Артыкбаев обобщил это решение на случай неодносвязной области, применяя геометрию галилеева пространства. Данная работа посвящена аналитическому решению уравнения Монжа-Ампера в неодносвязной области. Внешняя кривизна поверхности определяется в неодносвязной области, ограниченной концентрическими окружностями. Применяя преобразование, представляющее собой движение галилеева пространства, и переход в полярную систему координат, уравнение модифицируется, в котором можно разделить переменные решения, уравнение ищется для суммы трех функций. В результате получен аналитический вид решения в неодносвязной области, ограниченной концентрическими окружностями.

Ключевые слова: Галилеево движение; уравнение Монжа-Ампера; группа Гейзенберга; полная кривизна; полярная система координат.

Предметная классификация AMS (2020): Основная: 00A00 ; Дополнительная: 00B00; 00C00; 00D00; 00E00; 00F00.

1. Введение

Геометрический метод решения эллиптического уравнения Монжа-Ампера показывает эквивалентность решения этого уравнения в выпуклой односвязной области задаче восстановления выпуклой поверхности по внешней кривизне [1-4]. Используя геометрию неевклидовых пространств, А. Артыкбаев доказал существование и единственность решения уравнения Монжа-Ампера эллиптического типа в двусвязной области [5]. В данной работе мы найдем решение уравнения Монжа-Ампера эллиптического типа в неодносвязной области.

2. Предварительные сведения

Пусть дана плоскость π и на ней задана система координат Oxy . В этом случае любая точка плоскости имеет свою пару координат (x, y) . Расстояние между точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ равно [6]:

$$d = \begin{cases} |x_2 - x_1|, & x_1 \neq x_2 \\ |y_2 - y_1|, & x_1 = x_2 \end{cases} \quad (2.1)$$

Пусть дано следующее аффинное преобразование:

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = hx + y + b \end{cases} \quad (2.2)$$

Это преобразование представляет собой галилеевское движение в плоскости, сохраняющее заданное расстояние (2.1) [7]. Галилеевское движение относится к группе преобразований Гейзенберга, в которой матрица перехода имеет следующий вид [8,9]:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h & 1 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Здесь, поскольку $\det C = 1$, площадь области также инвариантна относительно этого преобразования. Движение (2.2) состоит из следующих двух частей [10]:

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases} \quad \begin{cases} x' = x \\ y' = hx + y \end{cases} \quad (2.4)$$

Первый из них — параллельный перенос, а второй — поворот на плоскости Галилея. При этом ось Oy сохраняет своё направление, а ось Ox заменяется прямой $y = hx + l$. Геометрическое значение параметра h вводится через понятие угла между прямыми. Пусть дана выпуклая регулярная поверхность F . Мы можем найти её уравнение по её полной кривизне. Нахождение поверхности по её полной кривизне, то есть когда известна правая часть, эквивалентно решению уравнения Монжа-Ампера:

$$z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = \phi(x, y, z, z_x, z_y) \quad (2.5)$$

Левая часть уравнения представляет собой оператор Монжа-Ампера. Ниже мы найдём решение уравнения Монжа-Ампера (2.5) в частном случае, используя преобразование (2.2), когда полная кривизна является функцией, заданной на кольцевой области. Для этого, прежде всего, найдём вид уравнения Монжа-Ампера в полярной системе координат:

3. Основной результат

Рассмотрим следующую замену:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases} \quad (3.1)$$

Подставив эту замену в уравнение (2.2), получим следующее уравнение:

$$\begin{cases} x' = \rho \cos \varphi + a \\ y' = \rho(h \cos \varphi + \sin \varphi) + b \end{cases} \quad (3.2)$$

Вид уравнения Монжа-Ампера в новой системе координат следующий:

$$z_{x'x'}z_{y'y'} - z_{x'y'}^2 = K(x', y') \quad (3.3)$$

Ниже мы находим частные производные:

$$z_\rho = z_{x'} \cos \varphi + z_{y'} (h \cos \varphi + \sin \varphi), \quad z_\varphi = z_{x'} (-\rho \sin \varphi) + z_{y'} (\rho (-h \sin \varphi + \cos \varphi))$$

$$z_{\rho\rho} = z_{x'x'} \cos^2 \varphi + 2z_{x'y'} \cos \varphi (h \cos \varphi + \sin \varphi) + z_{y'y'} (h \cos \varphi + \sin \varphi)^2 \quad (3.4)$$

$$\frac{z_\rho}{\rho} + \frac{z_{\varphi\varphi}}{\rho^2} = z_{x'x'} \sin^2 \varphi + 2z_{x'y'} (h \sin^2 \varphi - \sin \varphi \cos \varphi) + z_{y'y'} (\cos \varphi - h \sin \varphi)^2 \quad (3.5)$$

$$\frac{z_{\rho\varphi}}{\rho} - \frac{z_\varphi}{\rho^2} = -z_{x'x'} \sin \varphi \cos \varphi + z_{x'y'} (\cos 2\varphi - h \sin 2\varphi) + z_{y'y'} (h \cos 2\varphi - (h^2 - 1) \sin \varphi \cos \varphi) \quad (3.6)$$

Из них получаем следующую систему уравнений относительно производных второго порядка:

$$\begin{cases} z_{x'x'} + 2hz_{x'y'} + (h^2 + 1)z_{y'y'} = z_{\rho\rho} + \frac{z_\rho}{\rho} + \frac{z_{\varphi\varphi}}{\rho^2} \\ z_{x'y'} + hz_{y'y'} = \frac{1}{2} \left(z_{\rho\rho} - \frac{z_\rho}{\rho} - \frac{z_{\varphi\varphi}}{\rho^2} \right) \sin 2\varphi + \left(\frac{z_{\rho\varphi}}{\rho} - \frac{z_\varphi}{\rho^2} \right) \cos 2\varphi \\ z_{x'x'} + 2hz_{x'y'} + (h^2 - 1)z_{y'y'} = \left(z_{\rho\rho} - \frac{z_\rho}{\rho} - \frac{z_{\varphi\varphi}}{\rho^2} \right) \cos 2\varphi - 2 \left(\frac{z_{\rho\varphi}}{\rho} - \frac{z_\varphi}{\rho^2} \right) \sin 2\varphi \end{cases} \quad (3.7)$$

Из (3.7) получаем:

$$z_{x'x'} = \frac{h^2 + 1}{2} \left(z_{\rho\rho} + \frac{z_\rho}{\rho} + \frac{z_{\varphi\varphi}}{\rho^2} \right) + \left(\frac{1 - h^2}{2} \cos 2\varphi - h \sin 2\varphi \right) \left(z_{\rho\rho} - \frac{z_\rho}{\rho} - \frac{z_{\varphi\varphi}}{\rho^2} \right) +$$

$$+ \left(\frac{3h^2 - 1}{2} \sin 2\varphi - 2h \cos 2\varphi \right) \left(\frac{z_{\rho\varphi}}{\rho} - \frac{z_\varphi}{\rho^2} \right) \quad (3.8)$$

$$z_{x'y'} = -\frac{h}{2} \left(z_{\rho\rho} + \frac{z_\rho}{\rho} + \frac{z_{\varphi\varphi}}{\rho^2} \right) + \frac{\sin 2\varphi + h \cos 2\varphi}{2} \left(z_{\rho\rho} - \frac{z_\rho}{\rho} - \frac{z_{\varphi\varphi}}{\rho^2} \right) + (\cos 2\varphi - h \sin 2\varphi) \left(\frac{z_{\rho\varphi}}{\rho} - \frac{z_\varphi}{\rho^2} \right) \quad (3.9)$$

$$z_{y'y'} = \frac{1}{2} \left(z_{\rho\rho} + \frac{z_\rho}{\rho} + \frac{z_{\varphi\varphi}}{\rho^2} \right) - \frac{\cos 2\varphi}{2} \left(z_{\rho\rho} - \frac{z_\rho}{\rho} - \frac{z_{\varphi\varphi}}{\rho^2} \right) + \sin 2\varphi \left(\frac{z_{\rho\varphi}}{\rho} - \frac{z_\varphi}{\rho^2} \right) \quad (3.10)$$

Если подставить найденные выражения в уравнение Монжа-Ампера, то найдем его уравнение в полярных координатах:

$$z_{x'x'}z_{y'y'} - z_{x'y'}^2 = z_{\rho\rho} \left(\frac{z_\rho}{\rho} + \frac{z_{\varphi\varphi}}{\rho^2} \right) + \left(\frac{z_{\rho\varphi}}{\rho} - \frac{z_\varphi}{\rho^2} \right) \left(\frac{h^2 + 1}{4} \sin 2\varphi \left(z_{\rho\rho} + \frac{z_\rho}{\rho} + \frac{z_{\varphi\varphi}}{\rho^2} \right) - \frac{h^2 + 1}{4} \left(z_{\rho\rho} - \frac{z_\rho}{\rho} - \frac{z_{\varphi\varphi}}{\rho^2} \right) \right) +$$

$$+ \left(\frac{z_{\rho\varphi}}{\rho} - \frac{z_\varphi}{\rho^2} \right)^2 \left(\frac{h^2 - 1}{2} \sin^2 2\varphi - \cos^2 2\varphi \right) \quad (3.11)$$

Отсюда следует следующая основная теорема:

Теорема 3.1. Если положительная непрерывная функция задана формулой

$$\Phi \left(\sqrt{x^2 + y^2 - b^2}, \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \right)$$

определенной на кольцевой области $x^2 + y^2 = a^2$ и $x^2 + y^2 = b^2$ ($b < a$), общее решение эллиптического уравнения Монжа-Ампера:

$$z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = \Phi \left(\sqrt{x^2 + y^2 - b^2}, \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \right)$$

имеет следующее:

$$z(\rho, \varphi) = \int \left[\sqrt{\lambda^2 + d_1 + \int 2\rho \cdot \Phi(\sqrt{\rho^2 - b^2}, \sqrt{a^2 - \rho^2}) d\rho} \right] d\rho + \rho(c_1 \cos \varphi + c_2 \sin \varphi) + d_2 \quad (3.12)$$

где, $z(\rho, \varphi) = z\left(\sqrt{x^2 + y^2}, \arctg \frac{y}{x}\right)$, и $\lambda, c_i, d_i - const, i = 1, 2$.

Доказательство теоремы. Решение ищем в следующем виде [11,12]:

$$z(\rho, \varphi) = (f(\rho) + g(\varphi))\rho \quad (3.13)$$

$$z_\rho = \rho f' + f + g, \quad z_\varphi = \rho g', \quad z_{\rho\rho} = \rho f'' + 2f', \quad z_{\varphi\varphi} = \rho g'', \quad z_{\rho\varphi} = z_{\varphi\rho} = g'$$

Если подставить найденные выражения в правую часть равенства (3.11), то получим следующее:

$$(\rho f'' + 2f') \left(f' + \frac{f}{\rho} + \frac{1}{\rho} (g'' + g) \right) = \Phi(\sqrt{\rho^2 - b^2}, \sqrt{a^2 - \rho^2}) \quad (3.14)$$

Упростив это выражение, получим:

$$g'' + g = \frac{\rho \cdot \Phi(\sqrt{\rho^2 - b^2}, \sqrt{a^2 - \rho^2}) - (\rho f'' + 2f') \cdot (\rho f' + f)}{\rho f'' + 2f'} = \lambda \quad (3.15)$$

где, $\lambda - const$.

Общее решение левой части (3.15) имеет следующий вид:

$$g(\varphi) = c_1 \cos \varphi + c_2 \sin \varphi + \lambda \quad (3.16)$$

Упростив правую часть, получим:

$$((\rho f' + f) + \lambda)^2 = \int 2\rho \cdot \Phi(\sqrt{\rho^2 - b^2}, \sqrt{a^2 - \rho^2}) d\rho + \lambda^2 + d_1$$

Из этого уравнения мы получаем только одно решение:

$$(\rho f' + f) + \lambda = \sqrt{\int 2\rho \cdot \Phi(\sqrt{\rho^2 - b^2}, \sqrt{a^2 - \rho^2}) d\rho + \lambda^2 + d_1}$$

Из этого,

$$(\rho f)' = -\lambda + \sqrt{\int 2\rho \cdot \Phi(\sqrt{\rho^2 - b^2}, \sqrt{a^2 - \rho^2}) d\rho + \lambda^2 + d_1}$$

Интегрируя, получаем следующее уравнение:

$$f(\rho) = -\lambda + \frac{1}{\rho} \int \left[\sqrt{\int 2\rho \Phi(\sqrt{\rho^2 - b^2}, \sqrt{a^2 - \rho^2}) d\rho + \lambda^2 + d_1} \right] d\rho + \frac{d_2}{\rho} \quad (3.17)$$

Подставляя уравнения (3.16)-(3.17) в выражение (3.13), получаем следующее общее решение (3.12):

$$z(\rho, \varphi) = \rho(f(\rho) + g(\varphi)) = \int \left[\sqrt{\lambda^2 + d_1 + \int 2\rho \cdot \Phi(\sqrt{\rho^2 - b^2}, \sqrt{a^2 - \rho^2}) d\rho} \right] d\rho + \rho(c_1 \cos \varphi + c_2 \sin \varphi) + d_2$$

Теорема доказана.

4. Заключение

В данной работе получено общее решение эллиптического уравнения Монжа-Ампера в неодносвязной области с использованием геометрии неевклидовых пространств и преобразований Галилея. Галилеевское движение плоскости применяется для решения уравнения Монжа-Ампера. Результат расширяет предыдущие исследования, демонстрируя эффективность предложенного геометрического подхода к решению уравнения Монжа-Ампера.

Список литературы

- [1] Alexandrov, A.D.: Convex polyhedra. Springer Monographs in Mathematics. (2005).
- [2] Alexandrov, A.D.: Intrinsic geometry of convex surfaces. Classics of Soviet Mathematics. (2006).
- [3] Pogorelov, A.V.: Extrinsic geometry of convex surfaces. Moscow, Science. (1991).
- [4] Bakelman, I.Y.: Convex Analysis and Nonlinear Geometric Elliptic Equations Springer Verlag, Berlin, Heidelberg . (1994).
- [5] Artykbaev, A.: Recovering Convex Surfaces from the Extrinsic Curvature in Galilean space. Math.USSR. Sb. 47 (1), 195-214 (1984).
- [6] Sultanov, B.M., Kurudirek, A., Ismoilov, Sh.Sh. : Development and isometry of surfaces Galilean space. Math.Statis. 11 (6), 965-972 (2023).
- [7] Artykbaev, A., Sultanov, B.M.: Invariants of a second-order curves under a special linear transformation. Uz.Math.J. 3 (1), 19-25 (2019).
- [8] Tomter, P.: Constant mean curvature surface in the Heisenberg group Proc. of Symp. Pure Math. 54 (1), 485-495 (1993).
- [9] Dairbekov, N.S. : Otobrajeniya s ogranicheniem na gruppax Geyzenberga. Sibirian Math. J. 41, 567-590 (2000).
- [10] Artykbaev, A., Sultanov, B.M.: On the deformation of a surface preserving its total curvature. Phys.Math. Sci 3 (1), 34-40. (2022).
- [11] Polyanin, A.D., Zhurov, A.I.: Methods for separation of variables and exact solutions of nonlinear equations of mathematical physics. Moscow, Ipmex. Ran. (2020).
- [12] Polyanin, A.D.: Lectures on nonlinear equations of mathematical physics. Moscow, Ipmex. Ran. (2023).

Solving the Monge-Ampere Equation using Geometric Transformations

Abdullaaziz Artykbaev, Gulnoza Kholmurodova

Abstract

The geometric problem of recovering a convex surface from a given function is equivalent to solving a certain Monge-Ampère equation. In this case, the extrinsic curvature is defined as a function of Borel sets. I. Ya. Bakelman constructed this theory and proved the existence and uniqueness of the solution of the Monge-Ampère equation of elliptic type in a simply connected convex domain. A. Artykbaev generalized this solution for a non-simply connected domain applying the geometry of Galilean space. This paper is devoted to the analytical solution of the Monge-Ampère equation in a non-simply connected domain. The extrinsic curvature of the surface is determined in a non-simply connected domain which is bounded by concentric circles. By applying the transformation which is the motion of Galilean space and the transition to the polar coordinate system, the equation is modified, in which it is possible to separate the variables of the solution, the equation is sought for the sum of three functions. As a result, an analytical form of the solution in a non-simply connected domain bounded by concentric circles is obtained.

Affiliations

A.Artykbaev

Address: Tashkent State Transport University, Department of Higher Mathematics, 99999, Tashkent-Uzbekistan.

e-mail: aartykbaev@mail.ru

ORCID ID: 0000-0001-6228-8749

G.Kholmurodova

Address: Tashkent State Transport University, Department of Higher Mathematics, 99999, Tashkent-Uzbekistan.

e-mail: xolmurodovagulnoza3@gmail.com

ORCID ID:0009-0000-8131-8405

Исследование Устойчивости Цилиндрических Оболочек, Связанных с Кольцевой Пластиной

Саъдуллаева Мавжуда, Салимов Шоолим Музаффарович* и Мавланов Тулкин

Аннотация

Ключевые слова: конструкция; оболочка; деформация; релаксация; кольцевая пластина; устойчивость; вязкоупругий.

Предметная классификация AMS (2020): Основная: 00A00 ; Дополнительная: 00B00;

1. Введение

Теоретические и экспериментальные основы проявления нелинейных реологических свойств в различных элементах структурно-неоднородных, сложных многосвязных оболочечных конструкций изложены в фундаментальных работах [1–12]. Несмотря на это, оценка напряженно-деформированного состояния оболочечных конструкций с учетом неоднородных, вязкоупругих свойств осуществляется только в рамках линейной вязко упругости. В последнее время опубликован ряд работ [13], в которых учитывается проявление упругих, вязкоупругих линейных и нелинейных свойств материала оболочечных конструкций при динамических воздействиях. Краткое изложение некоторых из них приведено ниже. В [13] представлена расчетная модель деформаций основания фундамента, основанная на методе послойного суммирования с учетом компонент девиатора и тензора шаровой деформации, соотношение между которыми различно в разных точках фундамента. Рассматривалось нелинейное объемное деформирование грунта во времени с учетом уплотнения несущего слоя грунта. Изучена динамическая реакция грунтовых плотин [13] с учетом нелинейных и вязкоупругих свойств грунта, установлена зависимость динамических реакций от нагрузки и механических свойств грунта. На основании результатов экспериментов построены локальные закономерности взаимодействия протяженных подземных трубопроводов и фрагментов наружной поверхности подземных сооружений с грунтами нарушенной и ненарушенной структуры [14]. В [15] с использованием нелинейных реологических моделей исследовано напряженное состояние плотины. Возможность использования модели продемонстрирована путем сравнения численных результатов с результатами лабораторных испытаний.

В [16] предложены обобщенные реологические модели ненасыщенных и вод насыщенных грунтов и выведены соответствующие уравнения, используемые для количественной оценки дополнительных остаточных деформаций и напряжений в грунте. Решена одномерная задача консолидации слоя не полностью вод насыщенного грунта при циклическом изменении внешней нагрузки.

В работе [17] предложены модель и набор определяющих соотношений для реологической модели слабых грунтов. Возможность использования этой модели подтверждена рядом экспериментов по реологической консолидации при различных скоростях нагруженные.

В [18] показана тенденция к увеличению мгновенного модуля деформации с ростом ползучести. Для мягких грунтов предложена нелинейная модель ползучести, в которой затухание ползучести описывалось нелинейной функцией упрочнения и коэффициентом вязкости, а нелинейные кривые ползучести хорошо согласуются с экспериментальными данными. Поведение конкретных конструкций, использующих наследственную теорию вязко упругости, при динамическом нагружении изучено недостаточно, хотя и широко представлено в литературе [19–20]. Подавляющее число публикаций, посвященных динамическим задачам наследственной теории вязко упругости, посвящено расчету (линейных и геометрически нелинейных) тонкостенных конструкций — балок, пластин и оболочек [12, 20].

Схема решения динамических задач вязко упругости для тонкостенных конструкций достаточно стандартна. Выбором координатной функции, удовлетворяющей граничным условиям, исходная задача может быть сведена к задаче о колебаниях системы с конечным числом степеней свободы, то есть к системе линейных или нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с одной независимой временной переменной [12, 20]. В качестве координатных функций, как правило, используют тригонометрические или балочные функции. Такой выбор координатных функций ограничивает класс решаемых задач конструкциями простейших конфигураций – балками постоянного сечения, прямоугольной пластиной, цилиндрической оболочкой [12]. Авторы этих публикаций, допуская ряд неточностей в выборе координатных функций, пытались повысить точность решения системы интегро-дифференциальных уравнений. Однако для конструкций с реальной геометрией подобрать аналитические координатные функции, удовлетворяющие граничным условиям задачи, невозможно. Приведенный выше обзор известных работ показывает необходимость оценки напряженно-деформированного состояния и динамического поведения структурно-неоднородных оболочечных конструкций грунтовых сооружений с учетом не только реологических свойств оболочечных конструкций, но и особенностей неоднородной структуры и реальной геометрии. В данной работе представлены методы, алгоритм и результаты исследования динамического поведения многосвязных структурно-неоднородных оболочечных конструкций с учетом вязкоупругих свойств материала при различных динамических воздействиях.

2. Методы исследования

Многосвязные конструкции, нагруженные внешним давлением на цилиндрические части, исследуются на устойчивость. Цилиндрические оболочки, один из торцов которых жестко зашпелен, в обеих конструкциях имеют одну и ту же геометрию

$$\frac{L_1}{R} = \frac{L_2}{R} = 1, \quad R/h_u = 400. \quad (2.1)$$

Задача сводится к поиску минимального значения критической нагрузки внешнего давления, которую будем определять по формуле

$$q = \xi q_c, \quad (2.2)$$

где

$$q_c = \frac{\pi\sqrt{6}}{9z} \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \frac{h^2}{R^2}, \quad z = \frac{L^4\sqrt{(1-\nu^2)}}{\sqrt{Rh}}, \quad (2.3)$$

Прежде чем непосредственно перейти к анализу всей конструкции, рассмотрим поведение отдельных элементов конструкции. Общая длина цилиндрической части конструкции равна $2L$, но в силу подкрепления в середине её кольцевой пластиной, которая имеет большую жесткость в радиальном

направлении, можно ограничиться рассмотрением только цилиндрической оболочки длиной L . Остается вопрос о выборе граничных условий в месте стыка кольцевой пластины и цилиндрической части конструкции. Эти условия носят упругий характер, которые могут быть любыми от шарнирного опирания

$$\Gamma_6 : w = M_{11} = T_{11} = \vartheta = 0 \quad (2.4)$$

до жесткого защемления

$$\Gamma_1 : w = \theta_1 = u = \vartheta = 0. \quad (2.5)$$

Для комбинаций из этих граничных условий на торцах цилиндрической оболочки в широкой области изменения относительной длины z из работы [2] следует, что зависимости критического параметра ξ^* при $z \geq 10$ практически совпадают с пунктирными линиями на рис.1, полученными Н.А.Алфутковым на основе полубезмоментной теории В.З.Власова. С учетом реальной жесткости стыка кривая, описывающая зависимость критического параметра ξ^* от относительной длины оболочки z , будет лежать между этими линиями.

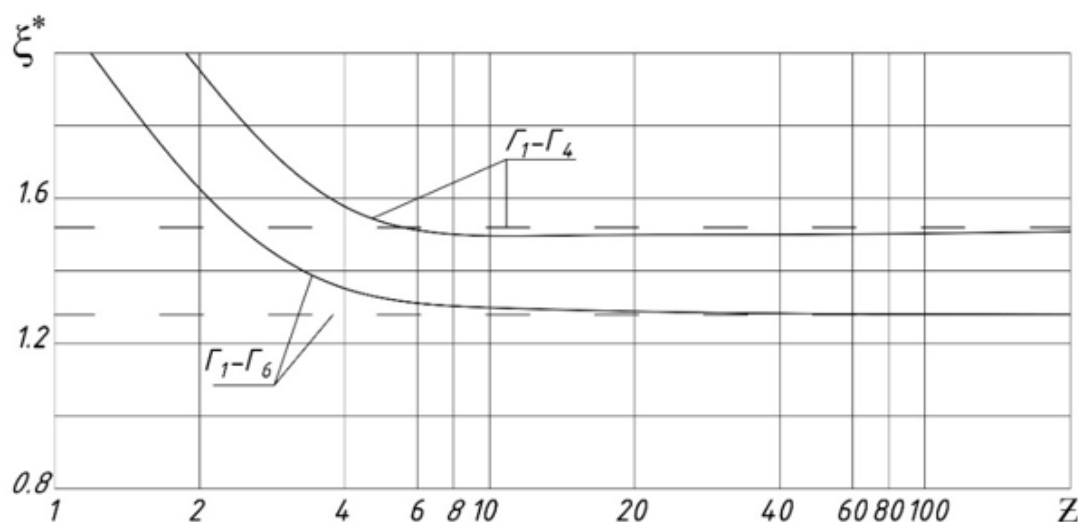


Рис. 1

Поведение кольцевой пластины со свободным внутренним краем от радиального сжатия по внешнему краю слабо изучено, поэтому было проведено исследование устойчивости кольцевой пластины с двумя вариантами граничных условий на внешнем краю

$$\Gamma_2 : w = \theta_1 = T_{11} = \vartheta = 0, \quad (2.6)$$

$$\Gamma_6 : w = M_{11} = T_{11} = \vartheta = 0. \quad (2.7)$$

Величина критического усилия определялась по формуле

$$T = -\xi^* \cdot \frac{E h_n}{(1 - \nu^2)} \cdot \left(\frac{R}{h_n} \right)^2 \cdot \left(1 + \frac{r_0}{R} \right)^3. \quad (2.8)$$

Зависимости критического параметра ξ^* в широкой области изменения внутреннего радиуса для различных значений волн в кольцевом направлении представлены на рис.2.(а).

В случае шарнирного закрепления (2.7) минимальное значение критической нагрузки получается при осесимметричной потере устойчивости $n = 0$, но при $r_0 \rightarrow R$, когда пластина может работать как кольцо,

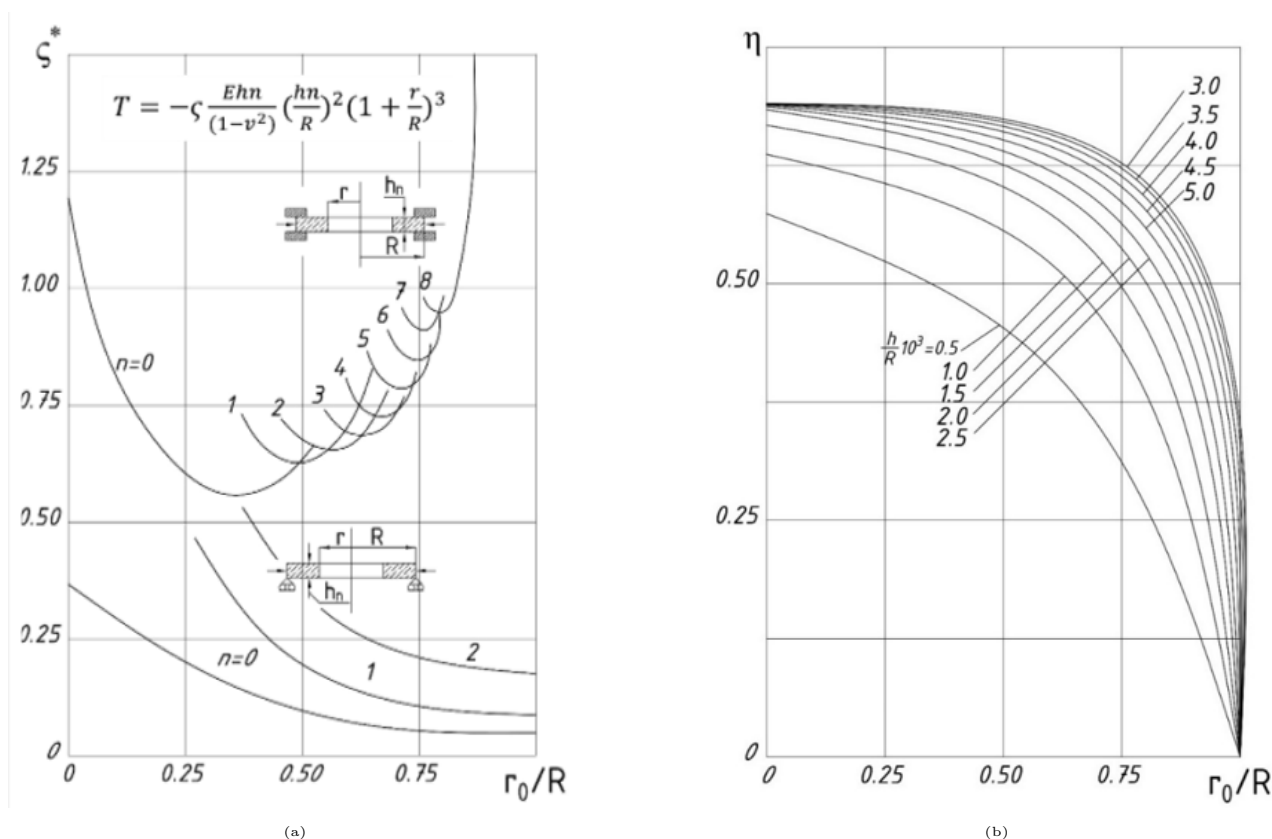


Рис. 2

возможно иное значение критической нагрузки с неосесимметричной формой потери устойчивости $n > 0$. В этом случае необходимо вычислить критическую нагрузку для пластины по схеме кольца $n = 2$

$$T = 2h_n E \cdot \left(\frac{R - r_0}{R + r_0}\right)^3 \quad (2.9)$$

и сравнить с полученными значениями из (2.8). Минимальное значение из них и определит истинную величину расчётного критического усилия. При рассмотрении граничного условия (2.6) величина параметра критической нагрузки значительно увеличивается, причём минимальные значения его наблюдаются как при осесимметричной ($r_0/R \leq 0.5$), так и при неосимметричной ($r_0/R > 0.5$) потере устойчивости. В случае неосесимметричной потери устойчивости число волн в окружном направлении растёт с увеличением r_0/R .

Результаты и Обсуждения

В результате исследования устойчивости всей конструкции по разработанному методу получены зависимости ξ^* , относящиеся к соответствующей геометрии кольцевой пластины (рис.3.(а)). На рис.3.(б) приведены формы потери устойчивости элементов конструкции. Форма, отмеченная цифрой 1 на рис.3.(б), показывает, что устойчивость теряет преимущественно пластина. В области геометрии, где в потере устойчивости участвуют явным образом все элементы конструкции (форма 2 на рис.3.(б)), величина критической нагрузки практически не изменяется, форма остается постоянной с образованием 13 волн в кольцевом направлении. Области критических значений ξ^* практически совпадают со

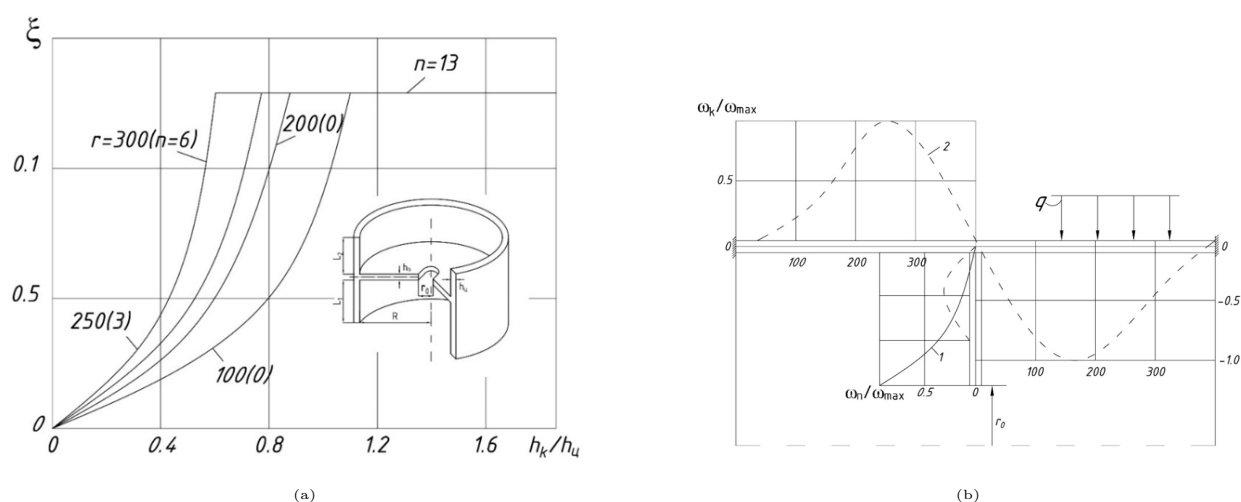


Рис. 3

значениями этого параметра для цилиндра длиной L , у которого реализуется граничные условия (2.4) и (2.5). Это подтверждает тот факт, что для исследования устойчивости рассматриваемой многосвязной конструкции можно использовать результаты работы [2], которые представлены на рис.1, совместно с формулой (2.2). В области параметров конструкции, где преимущественно теряет устойчивость пластина, следует установить какой или какими зависимостями можно ограничиться в исследовании устойчивости конструкции. Для этого выясним в какой связи находятся зависимости критических величин для пластины (2.8) и (2.9) с критическим давлением для всей конструкции. Определим из решения задачи прочности усилия приходящееся на внешний край пластины в зависимости от внешнего давления q для различной геометрии пластины. В результате проведения расчётов на рис.2.(b) приведены зависимости параметра η , через который определяется действующее на пластину усилие

$$T = \eta q R \quad (2.10)$$

Теперь из рассмотрения конкретного критического давления, для которого из выражений (2.8) и (2.9) с учетом (2.10) определяются критические значения усилия для пластины, следует, что значение критического усилия совпадает с критическим усилием для пластины с граничными условиями (2.6) на внешнем крае и определяется по формуле (2.8). Иными словами, цилиндрические оболочки при потере устойчивости пластины не позволяют ей изгибаться на внешнем крае.

Таким образом, для анализа многосвязной осесимметричной конструкции (рис.3.(a)) достаточно иметь зависимости параметров ξ^* , ζ^* и η от геометрии конструкции (рис.1, 2) и выражения (2.2), (2.8) и (2.10). Минимальное значение нагрузки для всей конструкции будет меньше из двух давлений, соответствующих критическому внешнему давлению для цилиндра длиной L с граничными условиями (2.4) и (2.5), которое определяется по формуле (2.2) с учетом зависимости ξ^* на рис.1, или внешнему давлению, вызывающему потерю устойчивости пластины и обделяемому, согласно (2.8), выражением

$$q = -\zeta^* \eta^{-1} \cdot \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \left(\frac{h_n}{R}\right)^3 \cdot \left(1 + \frac{r_0}{R}\right)^3, \quad (2.11)$$

где ζ^* берется с рис.2.(a) для граничного условия (2.6) на внешнем крае. Форма потери устойчивости конструкции принимает вид кривой 1 или 2 на рис.3.(b) в зависимости от того какая часть конструкции преимущественно теряет устойчивость.

3. Заключение

Таким образом, в этой работе получены соотношения и зависимости, которые могут быть использованы при анализе и проектировании подобных конструкций в довольно широкой области изменения геометрических параметров конструкции. Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что предложенные теоретические предпосылки с достаточной точностью моделируют динамику реальных объектов. Разработанная методика, алгоритм и программа расчета обеспечивают получение решения задачи с необходимой точностью.

Список литературы

- [1] Urzhumtsev Yu.S., Mayboroda V.P.: Technical means and methods for determining the strength characteristics of polymer structures. M.: Engineering, 1984, 168 p.
- [2] Kravchuk A.S., Mayboroda V.P., Urzhumtsev Yu.S.: Mechanics of Polymer and Composite Materials. Moscow (M): Nauka, 1985, 300 p.
- [3] Filatov A.N.: Asymptotic methods in the theory of differential and integro-differential equations. Tashkent: FAN, 1974, 216 p.
- [4] Koltunov M.A., Maiboroda V.P., Kravchuk A.S.: Applied mechanics of a deformable rigid body. M.: Higher School, 1983, 350 p.
- [5] Koltunov M.A.: Creep and relaxation. M.: Higher School, 1976, 277 p.
- [6] Ilyushin A.A., Pobedrya B.E.: Fundamentals of the mathematical theory of thermo-viscoelasticity. Moscow: Nauka, 1970, 280 p.
- [7] Koltunov M.A., Mayboroda V.P., Zubchaninov V.G.: Strength calculations of products from polymeric materials. M.: Engineering, 1983, 239 p.
- [8] Blend D.: Theory of linear viscoelasticity. M.: Mir, 1974, 338 p.
- [9] Rzhantsyn A.R.: Creep theory. M.: Stroyizdat, 1968, 416 p.
- [10] Grigorenko Ya.M., Vasilenko A.T.: Methods for shell calculation. Vol. 4, Theory of shells of variable rigidity. Kiev: Naukova Dumka, 1981, 543 p.
- [11] Karmishin A.V., Lyaskovets V.A., Myachenkov V.I., Frolov A.N.: Statics and dynamics of thin-walled shell structures. M.: Mechanical Engineering, 1975, 376 p.
- [12] Myachenkov V.I., Maltsev V.P.: Methods and algorithms for the calculation of spatial structures at computer. M.: Mechanical Engineering, 1984, 278 p.
- [13] Mirsaidov M.: Theory and methods for calculating earth structures for strength and rigidity. Tashkent: FAN, 2010, 312 p.
- [14] Mirsaidov M., Godovannikov A.M.: Earthquake Resistance of Structures. Tashkent: Uzbekistan, 2008, 220 p.
- [15] Sultanov K.S.: Wave theory of earthquake resistance of underground structures. Tashkent, 2016, 250 p.
- [16] Sh. Salimov: IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 883, 012191 (2020).
- [17] Sh. Salimov et al.: IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 883, 012192 (2020).
- [18] Sh. M. Salimov, T. Mavlanov: IOP Conf. Ser.: Earth Environ. Sci. 614, 012057 (2020).
- [19] Sh. M. Salimov et al.: "Solutions of vibration problems of structural-inhomogeneous shell structures by the Müller's method", AIP Conference Proceedings 2612, 020003 (2023). <https://doi.org/10.1063/5.0124322>
- [20] Khudainazarov S. et al.: E3S Web of Conferences 365, 03040 (2023). <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202336503040>

Study of Stability of Cylindrical Shells Connected to an Annular Plate

Sadullaeva Mavjuda, Salimov Shoolim Muzaffarovich, Mavlonov Tolkin

Abstract

The paper presents the statement and methods for solving dynamic problems of multiply connected structurally inhomogeneous shell structures, which make it possible to reduce the problem of calculating a wide class of engineering structures to computer-aided design tasks. On the basis of numerical experiments and multi-parameter analysis of the system as a whole, a number of fundamentally important applied problems

have been solved for calculating the dynamic characteristics of oscillations (frequencies, modes, determinant resonant amplitudes and damping coefficients) of special structures depending on the parameters of structural inhomogeneity. The stabilities of cylindrical shells connected to an annular plate under the action of dynamic loads are also considered. A methodics for comprehensive assessment of deformation properties is proposed in order to obtain the most rational mechanical and geometric characteristics based on mathematical modeling of deformation and relaxation processes.

Affiliations

Sadullaeva Mavjuda Ziyadullaevna

Address: Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan.

e-mail: mavjuda1975m@mail.ru

ORCID ID: 0000-0002-6999-3472

Salimov Shoolim Muzaffarovich

Address: Associate Professor, Tashkent University of Applied Sciences, Tashkent, Uzbekistan.

e-mail: salimovshoolim@yahoo.com

ORCID ID: 0000-0003-0750-8619

Tel.: +998998760950

Mavlanov Tulkin

Address: Professor, Doctor of Technical Sciences, Scientific Research Institute of Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural Mechanization Engineers, Tashkent, Uzbekistan.

e-mail: teormechanics@yandex.com

ORCID ID: 0000-0002-4349-5715

Двухточечная краевая задача для системы функционально-дифференциальных уравнений с максимумами

Т. К. Юлдашев*, М. А. Тлеубергенова, А. К. Танкеева, А. Молюбайкызы

Аннотация

В данной статье рассматриваются вопросы краевой задачи с двухточечными граничными условиями для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с максимумами. Используется метод параметризации. Получены условия сходимости и построены алгоритмы решения. Установлены необходимые и достаточные условия на коэффициенты для корректности рассматриваемой задачи. В доказательстве однозначной разрешимости функционально-интегральных уравнений в пространстве $BD([0, \omega], \mathbb{R}^n)$ используется метод сжимающих отображений.

Ключевые слова: Краевая задача, система обыкновенных дифференциальных уравнений, метод параметризации, необходимые и достаточные условия, существование и единственность решения.

Предметная классификация AMS (2020): Основная: 34A30; 34A45; Дополнительная: 34B05; 34B10.

1. Введение. Постановка проблемы

Рассмотрим линейную двухточечную краевую задачу

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + B(t) \max \{x(\tau) : \tau \in [t-h, t]\} + f(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in (0, T), \quad (1.1)$$

$$x(\xi) = \phi(\xi), \quad \xi \in [-h, 0], \quad (1.2)$$

$$B_0x(0) + C_0x(T) = D_0, \quad (1.3)$$

где $0 < h = \text{const}$ – запаздывание, $A(t), B(t)$ и $f(t)$ непрерывны на $[0, T]$, B_0 и C_0 – заданные $(n \times n)$ матрицы, D_0 – заданный n -мерный вектор, $\phi(t) \in C[-h, 0]$.

Обозначим через $C([0, T], \mathbb{R}^n)$ банахово пространство, состоящее из непрерывных вектор-функций $x(t)$ с нормой

$$\|x(t)\|_{C[0, T]} = \sqrt{\sum_{j=1}^n \max_{t \in [0, T]} |x_j(t)|}.$$

Received : 8-октябрь-2025, Accepted : 10-ноябрь-2025

* Corresponding author

Данное исследование выполнено при поддержке Министерства высшего и среднего специального образования, науки и инновационного развития Республики Узбекистан (грант F-FA-2021-424).

Мы используем линейное пространство $BD([0, T], \mathbb{R}^n)$, которое является банаховым пространством со следующей нормой

$$\|x(t)\|_{BD[0, T]} = \|x(t)\|_{C[0, T]} + h \|x'(t)\|_{C[0, T]},$$

где $0 < h = \text{const}$.

Пусть $X(t)$ – фундаментальная матрица дифференциального уравнения $\frac{dX}{dt} = A(t)X$. Тогда из уравнения (1.1) получаем

$$x(t) = \int_0^t X(t)X^{-1}(s) \left(A(s)x(s) + B(s) \max \{x(\tau) : \tau \in [s-h, s]\} + f(s) \right) ds. \quad (1.4)$$

Однозначную разрешимость уравнения (1.4) мы доказываем в пространстве $BD([0, T], \mathbb{R}^n)$.

Отметим, что решение задачи (1.1)–(1.3) – это функция $x^*(t) \in C([0, T], \mathbb{R}^n)$, непрерывно дифференцируемая на $(0, T)$ и удовлетворяющая дифференциальному уравнению (1.1) и граничному условию (1.3).

Краевые задачи для дифференциальных уравнений имеют широкий спектр применений [1]–[19]. В работах [2]–[8], [10, 12] используются различные методы качественной теории дифференциальных уравнений. На основе этих методов были установлены условия разрешимости краевых задач и предложены практические способы их решения. В работах [9, 11] особое значение приобретают приближенные и численные методы построения решений краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Данная статья посвящена установлению критериев единственной разрешимости двухточечных краевых задач для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с максимумами и построению методом параметризации приближенного решения задачи (1.1)–(1.3). Следует отметить, что метод параметризации был разработан во многих работах Д. С. Джумабаева и его учеников (см., например, [20]–[32]).

2. О разрешимости уравнения (1.4)

Воспользуемся следующей леммой.

Лемма 2.1 ([33]). Для разности двух функций с максимумами справедлива следующая оценка

$$\begin{aligned} & \|\max \{x(\tau) : \tau \in [t-h, t]\} - \max \{y(\tau) : \tau \in [t-h, t]\}\|_C \leq \\ & \leq \|x(t) - y(t)\|_C + h \left\| \frac{\partial}{\partial t} [x(t) - y(t)] \right\|_C, \end{aligned}$$

где $0 < h = \text{const}$.

Для уравнения (1.4) рассмотрим следующий итерационный процесс:

$$\begin{aligned} x^0(t) &= g(t) \equiv \int_0^t X(t)X^{-1}(s)f(s)ds, \quad t \in [0, T], \\ x^{k+1}(t) &= g(t) + \int_0^t X(t)X^{-1}(s) \left(A(s)x^k(s) + B(s) \max \{x^k(\tau) : \tau \in [s-h, s]\} \right) ds, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$

Теорема 2.1. Пусть выполнены следующие условия

$$\int_0^t \|X(t)X^{-1}(s)\|_{C([0,T] \times [0,T])} \max \left\{ \|A(s)\|_{C[0,T]}; \|B(s)\|_{C[0,T]} \right\} ds \leq C_1,$$

то функционально-интегральное уравнение (1.4) имеет единственное решение в классе $BD([0, T], \mathbb{R}^n)$, где $0 < C_1 = \text{const} < \infty$, $\|g(t)\| \leq g_0 < \infty$, $g_0 = \text{const}$ и $\rho = \max \{C_2; C_3\} < 1$, $0 < C_2$ и $0 < C_3$ определяются формулами (2.5) ниже.

Доказательство. Мы используем итерационный процесс (2.1). Тогда получаем следующие оценки:

$$\|x^0(t)\|_{C[0,T]} \leq \|g(t)\|_{C[0,T]} = \int_0^t \|X(t)X^{-1}(s)\|_{C([0,T] \times [0,T])} \|f(t)\|_{C[0,T]} ds \leq g_0, \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \|x^{k+1}(t) - x^k(t)\|_{C[0,T]} &\leq \int_0^t \|X(t)X^{-1}(s)\|_{C([0,T] \times [0,T])} \left[\|A(s)\|_{C[0,T]} \times \right. \\ &\times \|x^k(s) - x^{k-1}(s)\|_{C[0,T]} + \|B(s)\|_{C[0,T]} \left. \max \{x^k(\tau) : \tau \in [s-h, s]\} - \right. \\ &- \max \{x^{k-1}(\tau) : \tau \in [s-h, s]\} \left. \right] ds \leq C_1 \left[\|x^k(t) - x^{k-1}(t)\|_{C[0,T]} + \right. \\ &+ \left. \left\| \max \{x^k(\tau) : \tau \in [t-h, t]\} - \max \{x^{k-1}(\tau) : \tau \in [t-h, t]\} \right\|_{C[0,T]} \right]. \end{aligned}$$

Применяя лемму 2.1 к последнему неравенству, получаем

$$\|x^{k+1}(t) - x^k(t)\|_{C[0,T]} \leq C_1 \left[2\|x^k(t) - x^{k-1}(t)\|_{C[0,T]} + h \left\| \frac{d}{dt} (x^k(t) - x^{k-1}(t)) \right\|_{C[0,T]} \right]. \quad (2.3)$$

Аналогично, из уравнения (1.1) выводим

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d}{dt} (x^{k+1}(t) - x^k(t)) \right\|_{C[0,T]} &\leq \|A(t)\|_{C[0,T]} \|x^k(t) - x^{k-1}(t)\|_{C[0,T]} + \\ &+ \|B(t)\|_{C[0,T]} \left\| \max \{x^k(\tau) : \tau \in [t-h, t]\} - \max \{x^{k-1}(\tau) : \tau \in [t-h, t]\} \right\|_{C[0,T]} \leq \\ &\leq \left(\|A(t)\| + \|B(t)\| \right) \|x^k(t) - x^{k-1}(t)\|_{C[0,T]} + h \left\| \frac{d}{dt} (x^k(t) - x^{k-1}(t)) \right\|_{C[0,T]}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Обозначим

$$C_2 \geq \max \left\{ 2C_1; \|A(t)\|_{C[0,T]} + \|B(t)\|_{C[0,T]} \right\}, \quad C_3 \geq \max \left\{ h C_1; h \|B(t)\|_{C[0,T]} \right\}. \quad (2.5)$$

Тогда из оценок (2.3) и (2.4) получаем

$$\|x^{k+1}(t) - x^k(t)\|_{BD[0,T]} \leq \rho \|x^k(t) - x^{k-1}(t)\|_{BD[0,T]}, \quad (2.6)$$

где $\rho = \max \{C_2; C_3\}$. Из оценок (2.2) и (2.6) следует, что оператор в правой части уравнения (1.4) является сжимающим отображением, и уравнение (1.4) имеет единственное решение в пространстве $BD[0, T]$. Теорема доказана. $\square$

3. Практические способы нахождения единственного решения

Выберем некоторый шаг $h_0 > 0$, такой что $Nh_0 = T$ ($N \in \mathbb{N}$), и разобьем интервал $[0, T]$ на подынтервалы:

$$[0, T] = \bigcup_{r=1}^N [(r-1)h_0, rh_0).$$

Обозначено через $C([0, T], h_0, \mathbb{R}^{nN})$ банахово пространство непрерывных вектор-функций $x(t) \in \mathbb{R}^{nN}$ с нормой

$$\|x(t)\|_1 = \max_{r=1:N} \sup_{t \in [(r-1)h_0, rh_0)} \|x_r(t)\|,$$

где $\lim_{t \rightarrow rh_0-0} x_r(t)$ для всех $r = \overline{1, N}$ – конечно. Обозначим через $x_r(t) = \begin{cases} x_r(t) = x(t), & t \in [(r-1)h_0, rh_0), \\ r = \overline{1, N} \end{cases}$ ограничение вектор-функции $x(t)$ на r -й интервал $[(r-1)h_0, rh_0)$ и сведем задачу (1.1)–(1.3) к эквивалентной многоточечной краевой задаче:

$$\frac{d}{dt}x_r(t) = A(t)x_r + B(t) \max \{x_r(\tau) : \tau \in [t-h, t]\} + f(t), \quad t \in ((r-1)h_0, rh_0), \quad (3.1)$$

$$x(\xi) = \phi(\xi), \quad \xi \in [-h, 0], \quad (3.2)$$

$$B_0x_1(0) + C_0 \lim_{t \rightarrow Nh_0-0} x_N(t) = D_0, \quad (3.3)$$

$$\lim_{t \rightarrow lh_0-0} x_l(t) = x_{l+1}(lh_0), \quad l = \overline{1, (N-1)}, \quad (3.4)$$

где (3.4) – условия, связывающие решение задачи (1.1)–(1.3) во внутренних точках разбиения интервала $[0, T]$. Пусть λ_r – значение функции $x_r(t)$ в точке $t = (r-1)h_0$. Производя замену $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$, $r = \overline{1, N}$ на интервале $[(r-1)h_0, rh_0)$, из (3.1)–(3.4) получаем многоточечную краевую задачу с параметрами:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u_r(t) &= (A(t) + B(t))\lambda_r + \\ &+ A(t)u_r(t) + B(t) \max \{u_r(\tau) : \tau \in [t-h, t]\} + f(t), \quad t \in ((r-1)h_0, rh_0), \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$u_0(\xi) = \phi_0(\xi), \quad \xi \in [-h, 0], \quad t \in [0, h_0 - h], \quad (3.6)$$

$$u_r((r-1)h_0) = 0, \quad r = \overline{2, N}, \quad (3.7)$$

$$B_0\lambda_1 + C_0\lambda_N + C_0 \lim_{t \rightarrow Nh_0-0} u_N(t) = D_0, \quad (3.8)$$

$$\lambda_l + \lim_{t \rightarrow lh_0-0} u_l(t) = \lambda_{l+1}, \quad l = \overline{1, N-1}. \quad (3.9)$$

Пара $(\lambda^*, u^*(t))$ с элементами $\lambda^* \in \mathbb{R}^{nN}$, $u^*(t) \in C([0, T], h_0, \mathbb{R}^{nN})$ является решением задачи (3.5)–(3.9). Здесь функция $u_r^*(t)$ является решением задачи (3.5), (3.7) при $\lambda_r = \lambda_r^*$, $r = \overline{1, N}$. Для λ_r^* и $\lim_{t \rightarrow rh_0-0} u_r^*(t)$, $r = \overline{1, N}$ выполняются равенства (3.8), (3.9).

Если $x^*(t)$ является решением задачи (1.1)–(1.3), то пара $(\lambda^*, u^*(t))$ является решением задачи (3.5)–(3.9). Наоборот, если пара $(\tilde{\lambda}, \tilde{u}(t))$ является решением задачи (3.5)–(3.9), то функция

$$\tilde{x}(t) = \tilde{\lambda}_r + \tilde{u}_r(t), \quad t \in [(r-1)h_0, rh_0), \quad r = \overline{1, N}$$

является решением задачи (1.1)–(1.3) и $\tilde{x}(T) = \tilde{\lambda}_N + \lim_{t \rightarrow Nh_0-0} \tilde{u}_N(t)$.

Для дальнейшего изложения используем следующие обозначения: пусть $P(t)$ – произвольная квадратная матрица, непрерывная на интервале $[(r-1)h_0, rh_0]$ и имеющая конечный предел $\lim_{t \rightarrow rh_0-0} P(t)$, $r = \overline{1, N}$. Возьмем число $\nu \in \mathbb{N}$ и обозначим через $E_{\nu, r}(A(\cdot), P(\cdot), t)$ сумму

$$\begin{aligned} & \int_{(r-1)h_0}^t P(s_1) ds_1 + \int_{(r-1)h_0}^t A(s_1) \int_{(r-1)h_0}^{s_2} P(s_2) ds_2 ds_1 + \dots + \\ & + \int_{(r-1)h_0}^t A(s_1) \dots \int_{(r-1)h_0}^{s_{\nu-2}} A(s_{\nu-1}) \int_{(r-1)h_0}^{s_{\nu-1}} P(s_\nu) ds_\nu ds_{\nu-1} \dots ds_1, \quad t \in [(r-1)h_0, rh_0], \quad r = \overline{1, N}. \end{aligned}$$

Сумма $E_{\nu, r}(A(\cdot), P(\cdot), t)$ непрерывна на $[(r-1)h_0, rh_0]$ и имеет конечный предел

$$\lim_{t \rightarrow rh_0-0} E_{\nu, r}(A(\cdot), P(\cdot), t) = E_{\nu, r}(A(\cdot), P(\cdot), rh_0) \text{ для всех } \nu \in \mathbb{N}, \quad r = \overline{1, N}.$$

Очевидно, что $E_{*, r}(A(\cdot), P(\cdot), t) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} E_{\nu, r}(A(\cdot), P(\cdot), t)$ является суммой равномерно сходящегося ряда на $[(r-1)h_0, rh_0]$, и эта сумма непрерывна на интервале $[(r-1)h_0, rh_0]$ и имеет конечный предел

$$\lim_{t \rightarrow rh_0-0} E_{*, r}(A(\cdot), P(\cdot), t) = E_{*, r}(A(\cdot), P(\cdot), rh_0), \quad r = \overline{1, N}.$$

Для фиксированного значения параметра λ_r , $r = \overline{1, N}$, из уравнения (3.1) получаем интегральное уравнение Вольтерры второго рода:

$$\begin{aligned} u_r(t) = & \int_{(r-1)h_0}^t [A(s) + B(s)] \lambda_r ds + \int_{(r-1)h_0}^t f(s) ds + \int_{(r-1)h_0}^t A(s) u_r(s) ds + \\ & + \int_{(r-1)h_0}^t B(s) \max \{u_r(\tau) : \tau \in [s-h, s]\} ds, \quad t \in [(r-1)h_0, rh_0], \quad r = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Подставляя правую часть (3.10) в $u_r(s)$ в (3.10) и повторяя этот процесс ν ($\nu \in \mathbb{N}$) раз, получаем следующее представление функции $u_r(t)$:

$$u_r(t) = F_{\nu, r}(t) \lambda_r + G_{\nu, r}(u_r, t) + H_{\nu, r}(u_r, t) + K_{\nu, r}(t), \quad t \in [(r-1)h_0, rh_0], \quad r = \overline{1, N}, \quad (3.11)$$

где

$$F_{\nu, r}(t) = E_{\nu, r}(A(\cdot), A(\cdot) + B(\cdot), t), \quad K_{\nu, r}(t) = E_{\nu, r}(A(\cdot), f(\cdot), t), \quad H_{\nu, r}(t) = E_{\nu, r}(A(\cdot), B(\cdot) \max \{u_r(\tau)\}, t),$$

и

$$G_{\nu, r}(u_r, t) = \int_{(r-1)h_0}^t A(s_1) \dots \int_{(r-1)h_0}^{s_{\nu-1}} A(s_\nu) u_r(s_\nu) ds_\nu \dots ds_1, \quad t \in [(r-1)h_0, rh_0], \quad r = \overline{1, N}.$$

Определим $\lim_{t \rightarrow rh_0-0} u_r(t)$, $r = \overline{1, N}$ из формулы (3.11). Подставляя соответствующие выражения в (3.8), (3.9) и умножая (3.8) слева на $h_0 > 0 : Nh_0 = T$, получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно параметров:

$$Q_\nu(h_0) \lambda = -K_\nu(h_0) - G_\nu(u, h_0) - H_\nu(u, h_0), \quad \lambda \in \mathbb{R}^{nN},$$

где $Q_\nu(h_0) =$

$$\begin{pmatrix} h_0 B_0 & O & O & \dots & O & h_0 C_0(I + F_{\nu,N}(Nh_0)) \\ I + K_{\nu,1}(h_0) & -I & O & \dots & O & O \\ O & I + K_{\nu,2}(2h_0) & -I & \dots & O & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & O & \dots & -I & O \\ O & O & O & \dots & I + K_{\nu,N-1}((N-1)h_0) & -I \end{pmatrix},$$

$I : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – единичная матрица, $O : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – нулевая матрица,

$K_\nu(h_0) = (-h_0 D_0 + h_0 C_0 F_{\nu,N}(Nh_0), K_{\nu,1}(h_0), \dots, K_{\nu,N-1}((N-1)h_0)) \in \mathbb{R}^{nN}$,

$G_\nu(u, h_0) = (h_0 C_0 G_{\nu,N}(u_N, Nh_0), G_{\nu,1}(u_1, h_0), \dots, G_{\nu,N-1}(u_{N-1}, (N-1)h_0)) \cdot H_\nu(u, h_0)$.

Мы находим решение $(\lambda, u(t))$ многоточечной краевой задачи с параметрами (3.1)–(3.5). Предположим, что для заданных ν, h_0 матрица $Q_\nu(h_0) : \mathbb{R}^{nN} \rightarrow \mathbb{R}^{nN}$ имеет обратную.

а) Найдем начальное приближение для параметра $\lambda^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_N^{(0)}) \in \mathbb{R}^{nN}$, решая систему уравнений $Q_\nu(h_0)\lambda = -F_\nu(h)$.

б) Определим компоненты системы функций $u^{(0)}(t) = (u_1^{(0)}(t), u_2^{(0)}(t), \dots, u_N^{(0)}(t))$ по формулам

$$u_r^{(0)}(t) = F_{\nu,r}(t)\lambda_r^{(0)} + K_{\nu,r}(t), \quad t \in [(r-1)h_0, rh_0], \quad r = \overline{1, N}.$$

с) Найдем следующее приближение параметра $\lambda^{(1)} = (\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \dots, \lambda_N^{(1)}) \in \mathbb{R}^{nN}$, решая систему уравнений $Q_\nu(h_0)\lambda = -K_\nu(h_0) - G_\nu(u^{(0)}, h_0) - H_\nu(u^{(0)}, h_0)$.

д) Определим компоненты системы функций $u^{(1)}(t) = (u_1^{(1)}(t), u_2^{(1)}(t), \dots, u_N^{(1)}(t))$ по формулам

$$u_r^{(1)}(t) = F_{\nu,r}(t)\lambda_r^{(1)} + K_{\nu,r}(t) + G_{\nu,r}(u_r^{(0)}, t) + H_{\nu,r}(u_r^{(0)}), \quad t \in [(r-1)h_0, rh_0], \quad r = \overline{1, N}$$

и так далее. Продолжая этот процесс, на k -м шаге алгоритма мы получаем пару $(\lambda^{(k)}, u^{(k)}(t))$, $k = 0, 1, \dots$. Ввиду эквивалентности задач (1.1)–(1.3) и (3.1)–(3.4) получаем, что справедлива следующая теорема:

Теорема 3.1. Краевая задача (1.1)–(1.3) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда для заданного $h_0 > 0 : Nh_0 = T$ ($N \in \mathbb{N}$), $\chi \in (0, 1]$ существует $\nu = \nu(h_0, \chi)$ ($\nu \in \mathbb{N}$) такое, что матрица $Q_\nu(h_0) : \mathbb{R}^{nN} \rightarrow \mathbb{R}^{nN}$ обратима, и выполнены условия теоремы 2.1.

Заключение

В работе исследованы существование и единственность решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.1) с неизвестной функцией под знаком максимума. Система (1.1) изучается при начальных (1.2) и краевых (1.3) условиях. Метод сжимающих отображений используется для доказательства единственной разрешимости задачи (1.1)–(1.3) в пространстве $BD([0, \omega], \mathbb{R}^n)$. Практический способ решения задачи (1.1)–(1.3) с помощью метода параметризации сводится к исследованию разрешимости системы уравнений (3.1)–(3.4). Построен алгоритм решения задачи (3.1)–(3.4).

Финансирование

Данное исследование поддержано Министерством высшего и среднего специального образования, науки и инновационного развития Республики Узбекистан (грант F-FA-2021-424).

Наличие данных и материалов

Не применимо.

Not applicable.
tstu.uz/en/pub/UJMCS

Конкурирующие интересы

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Авторы заявляют об отсутствии у них конфликта интересов.

Вклад автора

Все авторы внесли равный вклад в написание данной статьи. Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Все авторы внесли равный вклад в написание этой статьи. Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Список литературы

- [1] Abramov, A. A.: On the transfer of boundary conditions for systems of ordinary linear differential equations (a variant of the dispersive method). *USSR Computat. Math. and Math. Phys.* 1 (3), 617–622 (1962).
- [2] Agarwal, Ravi P.: *Boundary value problems for higher order differential equations*. World Scientific, Singapore, Philadelphia. (1986), 307 p.
- [3] Agarwal, Ravi P., Gupta, R. C.: *Essentials of ordinary differential equations*. McGraw-Hill Book Co., Singapore, New York. (1991), 467 p.
- [4] Agarwal, Ravi P.: *Focal boundary value problems for differential and difference equations*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. (1998), 289 p.
- [5] Agarwal, Ravi P., Grace, S. R., O'Regan, D.: *Oscillation theory for second order Linear differential equations*. Kluwer Academic Publishers, The Netherlands. (2002), 672.
- [6] Agarwal, Ravi P., Lakshmikantham, V.: *Uniqueness and nonuniqueness criteria for ordinary differential equations*. World Scientific, Singapore. (1993), 312.
- [7] Agarwal, Ravi P., O'Regan, D.: *An introduction to ordinary differential equations*. Springer Science+Business Media LLC, New York. (2008), ix+314.
- [8] Dzhumabayev, D. S.: Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation. *USSR Computat. Math. and Math. Phys.* 29 (1), 34–46 (1989).
- [9] Keller, H.: *Numerical methods for two-point boundary value problems*. Waltham, Blaisdell. (1968), 184.
- [10] Кигурадзе И. Т.: Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. *Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения*. ВИНТИ АН СССР, Москва. (1987), 3–103.
- [11] Roberts, S. M., Shipman, J. S.: *Two-point boundary-value problems: Shooting methods*. Elsevier, New York. (1972), 269.
- [12] Ronto, M., Samoilenko, A. M.: *Numerical-analytic methods for investigation of periodic solutions*. World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong. (2000), 453.
- [13] Yuldashev, T. K.: Periodic solutions for an impulsive system of nonlinear differential equations with maxima. *Nanosystems: Physics. Chemistry. Mathematics*. 13 (2), 135–141 (2022). <https://doi.org/10.17586/2220-8054-2022-13-2-135-141>
- [14] Yuldashev, T. K.: Periodic solutions for an impulsive system of integro-differential equations with maxima. *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки*. 26 (2), 368–379 (2022). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1917>
- [15] Yuldashev, T. K., Abdurahobov, T. A.: On a (ω, c) – periodic solution for an impulsive system of second-order differential equation with product of two nonlinear functions and mixed maxima. *Uzbekistan Journal of Mathematics and Computer Science*. 1 (1), 20–32 (2025). <https://doi.org/10.56143/ujmcs.112032>
- [16] Yuldashev, T. K., Fayziyev, A. K.: Integral condition with nonlinear kernel for an impulsive system of differential equations with maxima and redefinition vector. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 43 (8), 2332–2340 (2022). <https://doi.org/10.1134/S1995080222110312>
- [17] Yuldashev, T. K., Fayziyev, A. K.: On a nonlinear impulsive system of integro-differential equations with degenerate kernel and maxima. *Nanosystems: Physics. Chemistry. Mathematics*. 13 (1), 36–44 (2022). <https://doi.org/10.17586/2220-8054-2022-13-1-36-44>
- [18] Yuldashev, T. K., Fayziyev, A. K.: Inverse problem for a second order impulsive system of integro-differential equations with two redefinition vectors and mixed maxima. *Nanosystems: Physics. Chemistry. Mathematics*. 14 (1), 13–21 (2023). <https://doi.org/10.17586/2220-8054-2023-14-1-13-21>
- [19] Yuldashev, T. K., Apakov, Y. P., Zhuraev, A. K.: Boundary value problem for third order partial integro-differential equation with a degenerate kernel. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 42 (6), 1317–1327. (2021)
- [20] Asanova, A. T.: On a nonlocal boundary-value problem for systems of impulsive hyperbolic equations. *Ukrainian Mathematical Journal*. 65 (3), 349–365 (2013). <https://doi.org/10.1007/s11253-013-0782-x>.
- [21] Assanova, A. T.: Solvability of a nonlocal problem for a hyperbolic equation with integral conditions. *Electronic Journal of Differential Equations*. 2017 (170), 1–12 (2017).
- [22] Assanova, A. T.: An integral-boundary value problem for a partial differential equation of second order. *Turkish Journal of Mathematics*. 43 (4), 1967–1978 (2019). <https://doi.org/10.3906/mat-1903-111>.

- [23] Assanova, A. T., Bakirova, E. A., Kadirbayeva, Z. M., Uteshova, R. E.: A computational method for solving a problem with parameter for linear systems of integro-differential equations. *Computational and Applied Mathematics*. 39 (3), Art.no. 248 (2020). <https://doi.org/10.1007/s40314-020-01298-1>.
- [24] Assanova, A. T.: On the solvability of nonlocal problem for the system of Sobolev-type differential equations with integral condition. *Georgian Mathematical Journal*. 28 (1), 49–57 (2021). <https://doi.org/10.1515/gmj-2019-2011>.
- [25] Assanova, A. T.: A generalized integral problem for a system of hyperbolic equations and its applications. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*. 52 (6), 1513–1532 (2023). <https://doi.org/10.15672/hujms.1094454>.
- [26] Assanova, A. T., Mynbayeva, S. T.: New general solution to a quasilinear Fredholm integro-differential equation and its application. *Lobachevskii Journal of Mathematics* 44 (10), 4231–4239 (2023). <https://doi.org/10.1134/S1995080223100062>.
- [27] Dzhumabaev, D. S.: On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integrodifferential equations. *J. of Comp. and Applied Math.* 294, 342–357 (2016).
- [28] Dzhumabaev, D. S.: Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation. *USSR Comput. Math. Math. Phys.* 29 (1), 34–46 (1989).
- [29] Dzhumabaev, D. S., Dzhumabaev, A. D., Assanova, A. T.: Properties of a partial Fredholm integro-differential equations with nonlocal condition and algorithms. *Mediterranean Journal of Mathematics* 21 (6), Art. No. 169 (2024). <https://doi.org/10.1007/s00009-024-02712-2>.
- [30] Tleulessova, A. B.: On the correct solvability of a two-point boundary value problem with impulsive action. *Almaty Mat. Zhurn.* 4 (3), 87–95 (2005).
- [31] Tleulessova, A. B.: On the unique solvability of a two-point boundary value problem with impulsive action. *Almaty, Mat. Zhurn.* 4 (4), 93–102 (2004).
- [32] Temesheva, S. M., Dzhumabaev, D. S., Kabdrakhova, S. S.: On one algorithm to find a solution to a linear two-point boundary value problem. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 42 (3), 606–612 (2021). <https://doi.org/10.1134/S1995080221030173>
- [33] Yuldashev, T. K., Fayziyev, A. K.: Periodic solutions of impulsive system of equations with a nonlinear function under the sign of a second-order differential and maxima. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 46 (2), 658–671 (2025). <https://doi.org/10.1134/S1995080225600256>

Two-point boundary value problem for a system of functional-differential equations with maxima

T. K. Yuldashev*, M. A. Tleubergenova, A. K. Tankeyeva, A. Molybaikyzy

Abstract

This article considers the questions of two-point boundary value problem for a system of first-order ordinary differential equations with maxima. The parametrization method is using. The convergence conditions are obtained and the algorithms of solving are built. The necessary and sufficient coefficient conditions for the well-posedness of considered problem are established. The method of contracted mapping is used in the proof of unique solvability of functional-integral equations in the space $BD([0, \omega], \mathbb{R}^n)$.

Affiliations

Yuldashev Tursun Kamaldinovich

Address: Tashkent State Transport University, Dept. of Higher Mathematics, 100169, Tashkent, Uzbekistan.

e-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-9346-5362>

Tleubergenova Madina Almukhanovna

Address: K. Zhubanov Aktobe Regional University, Dept. of Mathematics, Aktobe, Kazakhstan

e-mail: madina_1970@mail.ru

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-5572-2305>

Tankeyeva Aigerim Kiyevna

Address: K. Zhubanov Aktobe Regional University, Dept. of Mathematics, Aktobe, Kazakhstan

e-mail: aigerimtankeyeva@gmail.com

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-3897-5909>

Molybaikyzy Altynay

Address: Kazakh National Women's Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan

e-mail: altynaimolybai@gmail.com

ORCID ID: <https://orcid.org/0009-0008-2452-5932>

Structure-preserving scheme for two-phase convection reaction diffusion system

A.Elmurodov and A.Sotvoldiyev

ABSTRACT

In this paper, we introduce a novel structure-preserving explicit numerical scheme for a two-phase convection reaction diffusion system featuring a dynamically evolving interface. Hölder norm a priori estimates are established for the free boundary and the solution. Uniqueness of the solution is shown and qualitative properties of the solution are investigated. Furthermore, we conduct a comparative analysis of three discretization strategies: the upwind implicit method, the Crank Nicolson scheme, and the newly proposed explicit approach. Extensive numerical experiments confirm the robustness of the method, even in regimes dominated by strong advection and highly nonlinear reaction kinetics. The robustness and physical accuracy of the scheme make it well suited for modeling complex interface phenomena occurring in a variety of fields, including osteointegration around dental implants, biological invasion in ecological systems, and the dynamics of sharp interface phase transitions.

Keywords: free boundary problem, advection, reaction, diffusion, structure-preserving method, stability, numerical simulation.

AMS Subject Classification (2020): Primary: 35B45; Secondary: 35K20; 35K57; 35K59.

1. Introduction

Convection reaction diffusion equations constitute a cornerstone in the mathematical modeling of diverse and intricate processes across the natural physical, chemical, biological and engineering disciplines. In recent years, they have been routinely used to describe species distribution in ecology [1, 2, 3, 4, 5], concentration dynamics in chemical reactions [6, 7, 8], signal propagation in population biological tissues [9], and more recently, the evolution of tissues around biomedical implants [10, 11]. They have also been used to describe other similar processes. Generally, in a one-dimensional space, the convection reaction diffusion equation with a nonlinear term can be written in the following general form

$$\partial_t w = \nabla \cdot (D \nabla w) - c \cdot \nabla w + f(w)$$

where w denotes the concentration or population density of the substance, c the advection (mass flow) velocity, D the diffusion tensor, and $f(w)$ the nonlinear reaction term encoding the local kinetics.

This work focuses on a two-phase convection reaction diffusion system, where two distinct components occupy complementary spatial domains separated by a moving interface $s(t)$. The full convection reaction diffusion model reads as follows

$$u_t - u_{xx} - c_1 u_x = u(a_1 - b_1 u), \quad (x, t) \in D_1, \quad (1.1)$$

$$v_t - v_{xx} - c_2 v_x = v(a_2 - b_2 v), \quad (x, t) \in D_2, \quad (1.2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad -\ell \leq x \leq s(0) = 0, \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad s(0) = 0 \leq x \leq \ell, \quad (1.3)$$

$$u(-\ell, t) = \varphi_1(t), \quad u(s(t), t) = v(s(t), t) = 0, \quad v(\ell, t) = \varphi_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.4)$$

$$\dot{s}(t) = -\alpha u_x(s(t), t) + \beta v_x(s(t), t), \quad s(0) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.5)$$

where the domains are defined as $D_1 = \{(x, t) : 0 < t \leq T, -\ell < x < s(t)\}$ and $D_2 = \{(x, t) : 0 < t \leq T, s(t) < x < \ell\}$, with parameters satisfying $a_i, b_i, \alpha, \beta > 0$ and $c_i \in \mathbb{R}$. The boundary functions data φ_1, φ_2 belong to $C^{1+\gamma/2}([0, T])$ and remain strictly positive, while the initial profiles u_0, v_0 are assumed smooth and compatible with the boundary conditions

$$\begin{cases} u_0(0) = 0, & u_0 \in C^{2+\gamma}([-\ell, 0]), \\ u_0(x) > 0, & x \in [-\ell, 0), \quad u_0(-\ell) = \varphi_1(0), \end{cases} \quad \begin{cases} v_0(0) = 0, & v_0 \in C^{2+\gamma}([0, \ell]), \\ v_0(x) > 0, & x \in (0, \ell], \quad v_0(\ell) = \varphi_2(0). \end{cases}$$

Here, $u(x, t)$ and $v(x, t)$ represent the concentrations of two substances or populations, such as invasive and native species or interacting biological components. The parameters c_1, c_2 denote advection velocities, a_1, a_2 represent growth rates, b_1, b_2 indicate internal competition intensities, and α, β are proportionality coefficients in the Stefan condition. The initial functions $u_0(x)$ and $v_0(x)$ are smooth and positive, consistent with the boundary conditions.

In practice, many physical and biological systems don't unfold within a single uniform phase; instead, they develop across distinct regions separated by an interface that shifts over time. Consider osseointegration around dental implants—a case that keeps coming up in both clinical and modeling studies. Here, the titanium implant behaves as a passive, non-reactive phase, whereas the adjacent bone tissue remains metabolically active and dynamically responsive. The two never truly blend; all their interaction is confined to a moving front—the interface—whose motion is steered by biophysical feedback mechanisms [10].

This kind of two-phase layout isn't unique. It shows up again in tumor growth models, where malignant tissue pushes against healthy surroundings [12], and even in textbook examples like water freezing into ice, where phase change propagates along a sharp, evolving boundary [13].

Mathematically, these situations fall under the umbrella of free boundary problems—most classically, Stefan-type models—where the speed of the interface isn't prescribed but tied directly to the fluxes of the underlying state variables. That coupling isn't just a technical detail, it's what encodes the actual physical or biological driver behind the boundary's motion, and without it, you'd struggle to capture how the system behaves over time.

Yet, simulating such two-phase convection reaction diffusion systems numerically is far from straightforward. For one, the free boundary has to be tracked—or recomputed—at every time step, which means your mesh can't stay fixed; it has to evolve along with the solution. Then there's the issue of nonlinear reactions: take the familiar logistic term $w(a - bw)$, for example. In many standard schemes, this very term can quietly erode positivity, trigger unphysical wiggles, or even send the whole simulation off the rails [14]. And finally, even though each phase follows its own PDE, they're stitched together through nonlinear interface conditions, so your numerical method needs to handle the whole domain in a coherent, globally consistent way.

It's no surprise, then, that recent efforts have leaned heavily toward structure-preserving—or more specifically, positivity-preserving—numerical approaches [15, 16, 19]. The idea isn't just to get close to the true solution, but to do so while honoring core physical constraints: non-negativity of concentrations, natural bounds on population densities, and the tendency to settle into equilibrium when the driving forces fade.

Finding an exact analytical solution for systems of this kind is rarely feasible—the moving boundary alone introduces enough complexity to make closed-form expressions all but impossible. And yet, getting the

interface motion right is absolutely essential, without it, any description of the system's behavior quickly loses credibility.

With that in mind, we adopt a front-tracking strategy that brings together three numerical approaches: the upwind implicit scheme, the Crank–Nicolson method, and a new explicit scheme introduced here. The latter is designed specifically to preserve positivity and respect the underlying structure of the model. Our main goal isn't just to build faster algorithms, but to develop schemes that remain faithful to the physics—robust, efficient, and consistent with the core properties the continuous problem demands.

2. A priori estimates

In this section, we establish the Hölder norm a priori estimates that are essential for proving the global solvability of the problem. In particular, the maximum principle, as discussed in [19], plays a key role in our analysis.

One of the main difficulties in developing a nonlocal theory for nonlinear problems lies in obtaining suitable bounds for the first derivatives of the solution with respect to the spatial variable. Various techniques have been proposed in the literature to address this challenge.

In this study, we adopt the approach outlined in [6, 5, 19] to derive the necessary *a priori* bounds, and we follow the notations and conventions introduced in [21, 22].

Lemma 2.1. *Let the triplet $(s(t), u(x, t), v(x, t))$ be a classical solution to the system (1.1)–(1.5). Define the positive constants N_1 and N_2 as $N_1 = \max \left\{ \sup_{-\ell \leq x \leq 0} \left(\frac{u_0(x)}{-x} \right), \frac{a_1^2}{b_1 c_1} \right\}$, $N_2 = \max \left\{ \sup_{0 \leq x \leq \ell} \left(\frac{v_0(x)}{x} \right), \frac{a_2^2}{b_2 c_2} \right\}$.*

If the initial conditions satisfy $0 \leq u_0(x) \leq \frac{a_1}{b_1}$, $0 \leq v_0(x) \leq \frac{a_2}{b_2}$, then there exist positive constants $M_1 = \frac{a_1}{b_1}$, $M_2 = \frac{a_2}{b_2}$ and $M_3 = \alpha N_1 + \beta N_2$, independent of T , such that the following estimates hold

$$0 < u(x, t) \leq M_1 \quad \text{in} \quad (x, t) \in D_1, \quad 0 < v(x, t) \leq M_2 \quad \text{in} \quad (x, t) \in D_2, \quad 0 < \dot{s}(t) \leq M_3, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Proof. We begin by applying the parabolic maximum principle to equations (1.1)–(1.2). The reaction terms $f_1(u) = u(a_1 - b_1 u)$, $f_2(v) = v(a_2 - b_2 v)$ satisfy $f_i(0) = 0$, and each f_i is Lipschitz continuous. Given that $u_0(x), v_0(x) \geq 0$, and the boundary conditions $u(s(t), t) = v(s(t), t) = 0$, $u(-\ell, t) = \varphi_1(t) \geq 0$, $v(\ell, t) = \varphi_2(t) \geq 0$, it follows from the maximum principle (see, e.g., [19, Theorem 2]) that

$$u(x, t) \geq 0 \quad \text{in} \quad D_1, \quad v(x, t) \geq 0 \quad \text{in} \quad D_2.$$

If $u_0(0) = v_0(0) = 0$ and $u_0, v_0 \not\equiv 0$, then by the strong maximum principle,

$$u(x, t) > 0 \quad \text{in} \quad D_1, \quad v(x, t) > 0 \quad \text{in} \quad D_2, \quad t > 0.$$

To derive the upper bounds, introduce the auxiliary function $\omega(x, t) = \begin{cases} u(x, t), & (x, t) \in D_1, \\ v(x, t), & (x, t) \in D_2, \end{cases}$ for which the reaction term takes the form $f(x, t, \omega) = \omega(a_i - b_i \omega)$ ($i = 1, 2$). Since $\underline{\omega} = 0$ and $\bar{\omega} = \frac{a_i}{b_i}$ are sub- and supersolutions, respectively, the maximum principle yields

$$0 < u(x, t) \leq \frac{a_1}{b_1} = M_1, \quad (x, t) \in D_1, \quad 0 < v(x, t) \leq \frac{a_2}{b_2} = M_2, \quad (x, t) \in D_2.$$

Next, to estimate the gradients near the free boundary, consider the auxiliary function

$$U(x, t) = N_1(s(t) - x) - u(x, t),$$

where $N_1 > 0$ is a constant to be determined. Then U satisfies

$$\begin{cases} U_t - U_{xx} - c_1 U_x \geq c_1 N_1 - \frac{a_1^2}{b_1} \geq 0, \\ U(x, 0) = N_1(-x) - u_0(x) \geq 0, \\ U(-\ell, t) = N_1(s(t) + \ell) - \varphi_1(t) \geq 0, \\ U(s(t), t) = 0. \end{cases}$$

By the maximum principle

$$U(x, t) \geq 0 \quad \text{in } D_1$$

which implies $u(x, t) \leq N_1(s(t) - x)$, $-\ell \leq x \leq s(t)$.

Hence, taking the left-hand derivative at $x = s(t)$ yields

$$-N_1 \leq u_x(s(t), t) < 0.$$

A similar argument for the second phase gives $0 < v_x(s(t), t) \leq N_2$.

Finally, from the free boundary condition (1.5),

$$0 < \dot{s}(t) \leq \alpha N_1 + \beta N_2 = M_3,$$

which completes the proof. $\square$

To obtain upper bounds for u_x , v_x , and for the Hölder norms $|u|_Q^{(2+\gamma)}$ and $|v|_Q^{(2+\gamma)}$, we first transform the moving spatial domains into a fixed reference domain. Following the approach in [6, 19], we introduce the change of variables

$$\text{for } D_1: \quad \tau = t, \quad y = \frac{x + \ell}{\ell + s(t)}, \quad \text{for } D_2: \quad \tau = t, \quad y = \frac{x - \ell}{\ell - s(t)}.$$

This transformation maps both regions onto the fixed cylindrical domain $Q = \{(y, \tau) : 0 < y < 1, 0 < \tau < T\}$.

Define the new dependent variables $U(y, \tau) = u(x, t)$ and $V(y, \tau) = v(x, t)$. Then $U(y, \tau)$ and $V(y, \tau)$ satisfy the following boundary value problems:

$$\begin{cases} U_\tau = A_1 U_{yy} + F_1(U, U_y), & (y, \tau) \in Q, \\ U(y, 0) = U_0(y), & 0 \leq y \leq 1, \\ U(1, \tau) = 0, \quad U(0, \tau) = \varphi_1(\tau), \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\begin{cases} V_\tau = A_2 V_{yy} + F_2(V, V_y), & (y, \tau) \in Q, \\ V(y, 0) = V_0(y), & 0 \leq y \leq 1, \\ V(0, \tau) = 0, \quad V(1, \tau) = \varphi_2(\tau). \end{cases} \quad (2.2)$$

Here, the transformed initial functions are $U_0(y) = u_0(y(\ell + s(t)) - \ell)$, $V_0(y) = v_0(y(\ell - s(t)) + \ell)$ and the coefficients are given by $A_1 = \frac{4}{(\ell + s(\tau))^2}$, $A_2 = \frac{4}{(\ell - s(\tau))^2}$, $F_1 = \left[\frac{2c_1(\ell + s(\tau)) - 2s(\tau)(x + \ell)}{(\ell + s(\tau))^2} \right] U_y + U(a_1 - b_1 U)$, $F_2 = \left[\frac{-2c_2(\ell - s(\tau)) - 2s(\tau)(x - \ell)}{(\ell - s(\tau))^2} \right] V_y + V(a_2 - b_2 V)$.

By Lemma 2.1, we have $0 < u \leq M_1$, $0 < v \leq M_2$, $0 < \dot{s}(t) \leq M_3$. Moreover, since $s(t) \in [0, s_{\max})$ with $s_{\max} < \ell$, the terms $\ell \pm s(t)$ are strictly positive.

Consequently, the coefficients A_i and F_i remain uniformly bounded in Q . For any $\delta \in (0, 1)$, denote the interior subdomain $Q_\delta = \{(y, \tau) : \delta \leq y \leq 1 - \delta, \delta \leq \tau \leq T\}$.

Theorem 2.1. Assume that $U(y, \tau)$ is a classical solution of (2.1). Then there exists a constant $M_4 = M_4(M_1, \delta) > 0$, independent of T , such that

$$|U_y(y, \tau)| \leq M_4, \quad (y, \tau) \in Q_\delta.$$

If, in addition, $U|_{\partial_p Q} = 0$ on the parabolic boundary $\partial_p Q = \{\tau = 0\} \cup \{y = 0\} \cup \{y = 1\}$, then the estimate holds throughout the entire domain Q

$$|U_y(y, \tau)| \leq M_4(M_1, A_{10}), \quad (y, \tau) \in Q,$$

where $A_{10} = \min_Q \{A_1\} > 0$.

Proof. Since $U(y, \tau)$ is bounded by M_1 and the coefficients A_1, F_1 are uniformly bounded in Q , the interior gradient estimate for quasi-linear parabolic equations (see, e.g., [22, Theorem 2.1]) implies

$$|U_y(y, \tau)| \leq M_4, \quad (y, \tau) \in Q_\delta.$$

To extend this bound to the boundary, define $W(y, \tau) = U(y, \tau) - U_0(y)$. Then W satisfies

$$\begin{cases} W_\tau = A_1 W_{yy} + G_1(W, W_y), \\ W(y, 0) = 0, \quad W(0, \tau) = 0, \quad W(1, \tau) = 0, \end{cases}$$

where $G_1 = F_1(U, U_y) - A_1(U_0)_{yy}$.

Since $U_0(y) \in C^{2+\gamma}([0, 1])$, its second derivative $(U_0)_{yy}$ is bounded, and thus G_1 is also bounded in Q .

By applying the global gradient estimate for parabolic equations ([22, Chapter III, Theorem 4.1]), we conclude that U_y is bounded in the entire domain Q . The same argument applies to $V(y, \tau)$. $\square$

Returning to the original variables, the estimates for U_y and V_y yield

$$|u_x(x, t)| \leq C_1 M_4, \quad |v_x(x, t)| \leq C_2 M_4,$$

for all (x, t) in the interior subdomains D_1^δ and D_2^δ , which are separated from the initial time and fixed boundaries $x = \pm \ell$.

To derive the higher-order Höder estimates, consider, for example, the equation for v

$$v_t = v_{xx} + q(v, v_x), \quad q(v, v_x) = v(a_2 - b_2 v) + c_2 v_x.$$

From Lemma 2.1 and Theorem 2.1, we have $|v| \leq M_2$ and $|v_x| \leq M_4$. Hence, for some constant $R = R(M_2, c_2) > 0$,

$$|q(v, v_x)| \leq R(v_x^2 + 1).$$

Theorem 2.2. Suppose $v \in L^2(D_2)$ and its weak derivatives satisfy $v_{xx}, v_{tx} \in L^2(D_2)$. Then there exists a constant $M_5 = M_5(M_2, R) > 0$ such that

$$|v|_{D_2^\delta}^{(1+\gamma/2, 1+\gamma)} \leq M_5.$$

Moreover, if the linearized equation

$$\tilde{a}(y, \tau) w_{yy} + \tilde{b}(y, \tau) w_y + \tilde{c}(y, \tau) w - w_\tau = \tilde{f}(y, \tau)$$

has Hölder-continuous coefficients satisfying

$$|\tilde{a}|_Q^{(\gamma)} + |\tilde{b}|_Q^{(\gamma)} + |\tilde{c}|_Q^{(\gamma)} + |\tilde{f}|_Q^{(\gamma)} < \infty, \quad \tilde{a} \geq a_0 > 0,$$

and if $w = 0$ on the parabolic boundary, then (see [22, Theorem 5.3])

$$|w|_Q^{(2+\gamma)} \leq C \left(|\tilde{f}|_Q^{(\gamma)} + \max_Q |w| \right) = M_7.$$

Proof. Applying this result to $U(y, \tau)$ and $V(y, \tau)$ yields

$$|U|_Q^{(2+\gamma)} \leq M_7, \quad |V|_Q^{(2+\gamma)} \leq M_7.$$

Transforming back to the original variables gives

$$|u|_{D_1}^{(2+\gamma)} \leq CM_7, \quad |v|_{D_2}^{(2+\gamma)} \leq CM_7,$$

where C depends only on ℓ , M_3 , and γ , but not on T . Thus, the required a priori estimates for u_x , v_x , and for the Hölder norms $|u|^{(2+\gamma)}$, $|v|^{(2+\gamma)}$ are fully established. $\square$

3. Uniqueness of the solution

To establish the uniqueness of the classical solution for problem (1.1)–(1.5), we begin by considering the following integral representation of the free boundary $s(t)$ (see [19]):

$$\begin{aligned} s(t) = & \beta \int_{s(t)}^{\ell} v(\xi, t) d\xi - \beta \iint_{D_2} v(a_2 - b_2 v) d\xi d\tau + \alpha \int_{-\ell}^{s(t)} u(\xi, t) d\xi - \alpha \int_{-\ell}^0 u_0(\xi) d\xi \\ & + \beta \int_0^{\ell} v_0(\xi) d\xi - \alpha \iint_{D_1} u(a_1 - b_1 u) d\xi d\tau - \beta c_2 \int_0^t v(\ell, \tau) d\tau - \alpha c_1 \int_0^t u(-\ell, \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Theorem 3.1. *If the initial and boundary conditions are satisfied in the form specified above, and the assumptions of Lemma 2.1 hold, then the classical solution to problem (1.1)–(1.5) is unique.*

Proof. Assume that there exist two classical solutions $(s_1(t), u_1(x, t), v_1(x, t))$ and $(s_2(t), u_2(x, t), v_2(x, t))$. Define the auxiliary functions $y(t) = \min\{s_1(t), s_2(t)\}$ and $h(t) = \max\{s_1(t), s_2(t)\}$.

Since both solutions satisfy (3.1), subtracting the corresponding identities yields the estimate

$$\begin{aligned} |s_1(t) - s_2(t)| \leq & \alpha \int_{-\ell}^{y(t)} |u_1(\xi, t) - u_2(\xi, t)| d\xi + \beta \int_{y(t)}^{\ell} |v_1(\xi, t) - v_2(\xi, t)| d\xi + \\ & + \alpha \int_0^t \int_{-\ell}^{y(\tau)} |u_1(a_1 - b_1 u_1) - u_2(a_1 - b_1 u_2)| d\xi d\tau + \alpha \int_0^t \int_{y(\tau)}^{h(\tau)} |u_i(a_1 - b_1 u_i)| d\xi d\tau + \\ & + \beta \int_0^t \int_{y(\tau)}^{\ell} |v_1(a_2 - b_2 v_1) - v_2(a_2 - b_2 v_2)| d\xi d\tau + \beta \int_0^t \int_{y(\tau)}^{h(\tau)} |v_i(a_2 - b_2 v_i)| d\xi d\tau, \end{aligned} \quad (3.2)$$

where, in the intermediate region between $y(t)$ and $h(t)$,

$$(u_i(x, t), v_i(x, t)) = \begin{cases} (u_1(x, t), v_1(x, t)), & \text{if } s_2(t) < s_1(t), \\ (u_2(x, t), v_2(x, t)), & \text{if } s_2(t) > s_1(t). \end{cases}$$

We next introduce the difference functions $U(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$, $V(x, t) = v_1(x, t) - v_2(x, t)$.

These functions satisfy the following boundary-value problems

$$\begin{cases} U_t - U_{xx} - c_1 U_x + A_1(x, t)U = 0, & (x, t) \in D_1^*, \\ U(x, 0) = 0, & -\ell \leq x \leq 0, \quad U(-\ell, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ |U(y(t), t)| \leq M_4 \max_{0 \leq \tau \leq t} |s_1(\tau) - s_2(\tau)|, & 0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\begin{cases} V_t - V_{xx} - c_2 V_x + A_2(x, t)V = 0, & (x, t) \in D_2^*, \\ V(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq \ell, \quad V(\ell, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ |V(y(t), t)| \leq M_5 \max_{0 \leq \tau \leq t} |s_1(\tau) - s_2(\tau)|, & 0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (3.4)$$

where $A_1(x, t) = a_1 - b_1(u_1 + u_2)$, $A_2(x, t) = a_2 - b_2(v_1 + v_2)$ and $M_4 = \max_{D_1} |u_x|$, $M_5 = \max_{D_2} |v_x|$ are the bounded constants obtained from Lemma 2.1 and Theorem 2.1.

Since the above equations are linear with bounded coefficients, the parabolic maximum principle (see [19]) ensures that

$$|U(x, t)| \leq N_1 \max_{0 \leq \tau \leq t} |s_1(\tau) - s_2(\tau)|, \quad |V(x, t)| \leq N_2 \max_{0 \leq \tau \leq t} |s_1(\tau) - s_2(\tau)|, \quad (3.5)$$

where $N_1 > 0$, $N_2 > 0$ depend only on the initial data and system parameters.

We now estimate the terms in (3.2) using (3.5). For example, the first integral satisfies

$$\int_{-\ell}^{y(t)} |U(\xi, t)| d\xi \leq N_1(\ell + y(t)) \max_{0 \leq \tau \leq t} |s_1(\tau) - s_2(\tau)| \leq 2\ell N_1 \max_{0 \leq \tau \leq t} |s_1(\tau) - s_2(\tau)|.$$

Similarly, each remaining term in (3.2) is proportional to $\max_{0 \leq \tau \leq t} |s_1(\tau) - s_2(\tau)|$. Consequently, we obtain the integral inequality

$$|s_1(t) - s_2(t)| \leq N_3 \int_0^t \max_{0 \leq \tau \leq \sigma} |s_1(\tau) - s_2(\tau)| d\sigma,$$

where $N_3 > 0$ is independent of T .

Applying Gronwall's lemma gives $\max_{0 \leq t \leq T} |s_1(t) - s_2(t)| = 0$ which implies $s_1(t) \equiv s_2(t)$. Substituting this into (3.3)–(3.4) yields homogeneous boundary conditions, and by the maximum principle once more, we conclude that $U \equiv 0$ and $V \equiv 0$.

Hence, the two classical solutions coincide completely, and the solution to problem (1.1)–(1.5) is unique. This proof follows the methodological framework used in [5, 19]. $\square$

4. Existence of a solution

To establish the existence of a classical solution for problem (1.1)–(1.5), we build upon the a priori estimates derived in the previous sections. By applying a suitable transformation of variables, the moving boundary is mapped onto a fixed domain, leading to the reformulated systems (2.1)–(2.2).

Theorem 4.1. *Assume that the a priori estimates stated in Lemma 2.1 and Theorem 2.2 hold. Then the problem (1.1)–(1.5) admits a classical solution satisfying*

$$u \in C^{2+\gamma, 1+\gamma/2}(\overline{D_1}), \quad v \in C^{2+\gamma, 1+\gamma/2}(\overline{D_2}), \quad s \in C^{1+\gamma/2}([0, T]).$$

Proof. The proof is based on an iterative construction. We begin with an initial approximation of the free boundary, taking $s^{(0)}(t) \equiv 0$. For each $k \geq 0$, suppose that $s^{(k)}(t)$ is known. We then solve problems (2.1)–(2.2) for $U^{(k+1)}$ and $V^{(k+1)}$ under the boundary conditions corresponding to $s^{(k)}(t)$. Next, we update the free boundary as

$$\dot{s}^{(k+1)}(t) = -\alpha U_y^{(k+1)}(1, t) + \beta V_y^{(k+1)}(-1, t), \quad s^{(k+1)}(0) = 0.$$

From Lemma 2.1 and Theorem 2.2, the sequences $U^{(k)}$, $V^{(k)}$, and $s^{(k)}$ are uniformly bounded in Hölder norms. In particular, there exists a constant $N_i > 0$ ($i = 4, 5, 6$), independent of k and T , such that

$$|U^{(k)}|_Q^{(2+\gamma)} \leq N_4, \quad |V^{(k)}|_Q^{(2+\gamma)} \leq N_5, \quad |s^{(k)}|_{[0,T]}^{(1+\gamma/2)} \leq N_6.$$

Here, the constant N_i depends only on the initial data and fixed parameters $\ell, a_i, b_i, c_i, \alpha, \beta, \gamma$, but not on the iteration index k or the time interval T .

By the Arzelà–Ascoli theorem and the compactness of embeddings in Hölder spaces, one can extract convergent subsequences $\{U^{(k)}\}$, $\{V^{(k)}\}$ and $\{s^{(k)}\}$ such that

$$U^{(k)} \rightarrow U, \quad V^{(k)} \rightarrow V, \quad s^{(k)} \rightarrow s$$

uniformly on compact subsets. Passing to the limit in the equations and boundary conditions is justified by standard arguments of functional analysis (see, e.g., [22, Chapter V]).

Thus, the limiting functions (U, V, s) constitute a classical solution of the transformed problem. The original variables are recovered by inverse transformation, yielding a classical solution (u, v, s) to the initial free boundary problem (1.1)–(1.5).

Finally, since all the a priori estimates are uniform with respect to T , the solution can be extended step by step in time, thereby ensuring global existence for any $T > 0$.

Because the obtained a priori bounds are independent of T , the solution is not only locally existent and unique, but also globally extendable to arbitrary time intervals. Hence, the free boundary system (1.1)–(1.5) admits a global classical solution. This result provides a rigorous mathematical foundation for the numerical simulations developed later, since the physical relevance of numerical results is guaranteed only when a well-posed (i.e., existent and unique) solution is ensured. $\square$

5. Numerical methods

The two-phase advection–reaction–diffusion system (1.1)–(1.5) is highly nonlinear and involves a moving free boundary. Therefore, numerical approximation requires special attention to mesh dynamics, interfacial coupling between phases, and nonlinear reaction terms. In this section, we construct two stable and widely used schemes—the upwind implicit scheme and the Crank–Nicolson scheme—both of which incorporate a dynamic update of the free boundary $s(t)$ at each time step.

The computational domain is defined as $[-\ell, \ell] \times [0, T]$. We introduce the spatial step $h = \Delta x = \frac{2\ell}{M}$ and the time step $k = \Delta t = \frac{T}{N}$. The discrete grid points are given by

$$x_i = -\ell + ih, \quad i = 0, 1, \dots, M, \quad t^n = nk, \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

The approximate solutions are denoted as

$$u_i^n \approx u(t^n, x_i), \quad \text{for } x_i < s^n, \quad v_i^n \approx v(t^n, x_i), \quad \text{for } x_i > s^n, \quad s^n \approx s(t^n),$$

where s^n represents the approximate location of the moving interface. We assume that $x_{i_s} \leq s^n < x_{i_s+1}$. According to the boundary condition (1.4), the interface values are determined via linear interpolation:

$$u(s^n, t^n) = 0 \Rightarrow u_{i_s}^n + \theta(u_{i_s+1}^n - u_{i_s}^n) = 0, \quad \theta = \frac{h}{s^n - x_{i_s}},$$

and similarly for $v(s^n, t^n) = 0$. In practice, it is often sufficient to enforce only the left-phase condition $u_{i_s}^n = 0$, since the right phase is treated as an inert medium.

5.1. The upwind implicit scheme

The presence of advection terms may cause artificial oscillations or numerical diffusion. To mitigate such instabilities, we apply an upwind discretization that follows the direction of the flow

$$c \cdot \nabla w \approx \begin{cases} \frac{c}{h} (w_i - w_{i-1}), & c > 0, \\ \frac{c}{h} (w_{i+1} - w_i), & c < 0. \end{cases}$$

Assuming $c_1 > 0$ (flow directed rightward in the left phase) and $c_2 < 0$ (flow directed leftward in the right phase), the corresponding schemes can be written as follows.

For the left phase ($x_i < s^{n+1}$)

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} - \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2} - c_1 \frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{h} = u_i^{n+1} (a_1 - b_1 u_i^{n+1}), \quad i = 1, \dots, i_s - 1; \quad (5.1)$$

For the right phase ($x_i > s^{n+1}$)

$$\frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{k} - \frac{v_{i+1}^{n+1} - 2v_i^{n+1} + v_{i-1}^{n+1}}{h^2} - c_2 \frac{v_{i+1}^{n+1} - v_i^{n+1}}{h} = v_i^{n+1} (a_2 - b_2 v_i^{n+1}), \quad i = i_s + 2, \dots, M - 1. \quad (5.2)$$

The boundary conditions are given by

$$u_0^{n+1} = \varphi_1(t^{n+1}), \quad v_M^{n+1} = \varphi_2(t^{n+1}), \quad u_{i_s}^{n+1} = 0. \quad (5.3)$$

Equations (5.1)–(5.3) form a nonlinear algebraic system, which can be solved using Newton's method or the Picard iteration. The scheme is implicit, providing unconditional stability even for large time steps. Moreover, the resulting matrix is diagonally dominant, ensuring the existence and stability of the numerical solution.

5.2. The Crank Nicolson scheme

The Crank Nicolson scheme provides second-order accuracy in time by averaging diffusion and advection terms at the mid-time level $t^{n+1/2}$. It is particularly effective in diffusion-dominated regimes, offering both high accuracy and energy conservation.

For the left phase ($x_i < s^{n+1}$)

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} - \frac{1}{2} \left[\frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} \right] - \frac{c_1}{2} \left[\frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{h} + \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h} \right] \\ = \frac{1}{2} [u_i^{n+1} (a_1 - b_1 u_i^{n+1}) + u_i^n (a_1 - b_1 u_i^n)], \quad i = 1, \dots, i_s - 1. \end{aligned} \quad (5.4)$$

For the right phase ($x_i > s^{n+1}$)

$$\begin{aligned} \frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{k} - \frac{1}{2} \left[\frac{v_{i+1}^{n+1} - 2v_i^{n+1} + v_{i-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n}{h^2} \right] - \frac{c_2}{2} \left[\frac{v_{i+1}^{n+1} - v_i^{n+1}}{h} + \frac{v_{i+1}^n - v_i^n}{h} \right] \\ = \frac{1}{2} [v_i^{n+1} (a_2 - b_2 v_i^{n+1}) + v_i^n (a_2 - b_2 v_i^n)], \quad i = i_s + 2, \dots, M - 1. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Boundary conditions are the same as in (5.3). Although the Crank Nicolson scheme also yields a nonlinear system, it achieves higher temporal accuracy compared to the upwind scheme. However, in advection-dominated cases ($|c_i| \gg 1$), spurious oscillations may occur, highlighting the robustness of the upwind approach.

Accurate evaluation of spatial gradients is crucial for updating the moving boundary s^{n+1} . Since the interface typically lies between grid nodes ($x_i \leq s^n < x_{i+1}$), we employ Lagrange extrapolation. If $x_i \leq s^n < x_{i+1}$, a symmetric point $\tilde{x}_{i-1} = 2s^n - x_{i+1}$ is introduced, and the value $u(\tilde{x}_{i-1}, t^n)$ is estimated using a three-point Lagrange polynomial. The gradient is then computed as

$$u_x(s^n, t^n) \approx \frac{2(1+d)}{h} [P_L(\tilde{x}_{i-1}) - u_{i-1}^n], \quad d = \frac{h}{s^n - x_i}.$$

A similar procedure is applied to compute $v_x(s^n, t^n)$. The updated interface position is obtained from the Stefan condition:

$$s^{n+1} = s^n + k [-\alpha u_x(s^n, t^n) + \beta v_x(s^n, t^n)]. \quad (5.6)$$

If the new interface s^{n+1} crosses into a new spatial interval, the corresponding index i_s is updated, and boundary conditions (5.3) are recalculated accordingly. This process is repeated at each time step, producing a dynamically adaptive computational mesh. The resulting algorithm provides a stable and consistent framework for solving the two-phase free boundary problem numerically.

6. Proposed Numerical Scheme

Classical numerical methods, such as the upwind and Crank Nicolson schemes, often encounter difficulties when applied to nonlinear reaction systems with free boundaries. In such settings, these schemes may produce unphysical results, including negative concentrations or spurious oscillations, which undermine the reliability of the computed solution. This issue becomes particularly critical in biological and biomedical models, where the positivity of solutions carries essential physical meaning. Therefore, the development of structure-preserving or positivity-preserving numerical schemes is of fundamental importance.

In this section, we propose a new explicit structure-preserving numerical scheme for the two-phase advection–reaction–diffusion system with a moving boundary, inspired by the approach of Chen, Charpentier, and Kojouharov [23]. The proposed scheme naturally preserves the fundamental physical properties of the model

$$0 \leq u \leq \frac{a_1}{b_1}, \quad 0 \leq v \leq \frac{a_2}{b_2},$$

ensuring that the solution remains positive and bounded at all time steps. Moreover, the scheme converges correctly to the steady states and, due to its explicit formulation, offers high computational efficiency.

The key idea is to reformulate part of the nonlinear reaction term into the denominator, which guarantees positivity even in an explicit setting. This allows the diffusion and advection terms to be treated explicitly, while the nonlinear reaction term is handled in a semi-rational form—its linear part treated additively and the nonlinear part incorporated in the denominator. This balance preserves the physical structure of the underlying equations without sacrificing computational simplicity.

For the left domain ($x_i < s^{n+1}$), the proposed scheme is given by

$$u_i^{n+1} = \frac{u_i^n + k \left[\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} + c_1 \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h} + a_1 u_i^n \right]}{1 + k b_1 u_i^n}, \quad i = 1, \dots, i_s - 1. \quad (6.1)$$

Similarly, for the right domain ($x_i > s^{n+1}$),

$$v_i^{n+1} = \frac{v_i^n + k \left[\frac{v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n}{h^2} + c_2 \frac{v_{i+1}^n - v_i^n}{h} + a_2 v_i^n \right]}{1 + kb_2 v_i^n}, \quad i = i_s + 2, \dots, M - 1. \quad (6.2)$$

The boundary conditions are imposed as

$$u_0^{n+1} = \varphi_1(t^{n+1}), \quad v_M^{n+1} = \varphi_2(t^{n+1}), \quad u_{i_s}^{n+1} = v_{i_s+1}^{n+1} = 0. \quad (6.3)$$

Since the functions u and v are discontinuous across the free boundary $x = s^{n+1}$, the conditions $u_{i_s}^{n+1} = v_{i_s+1}^{n+1} = 0$ are imposed to reflect the physical separation between the two phases. The free boundary itself is updated according to the general Stefan-type condition given in (5.6).

The following theorem establishes the consistency of the proposed scheme with the continuous differential model.

Theorem 6.1. Assume that $u(x, t)$ is a sufficiently smooth solution of equation (1.1), such that $u \in C^{2,1}$. Then, the numerical scheme (6.1) is first-order accurate in time and second-order accurate in space. In particular, if $k = O(h^2)$, the total truncation error satisfies $O(h^2)$

$$u_t = u_{xx} + c_1 u_x + a_1 u - b_1 u^2 + O(k) + O(h^2).$$

Proof. To analyze the truncation error, we expand the discrete terms in (6.1) using Taylor series:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + ku_t + \frac{k^2}{2}u_{tt} + \dots, \quad u_{i\pm 1}^n = u_i^n \pm hu_x + \frac{h^2}{2}u_{xx} \pm \frac{h^3}{6}u_{xxx} + \dots$$

Substituting these expansions into the right-hand side of (6.1) and expanding the denominator as $1 + kb_1 u_i^n = 1 + kb_1 u_i^n + O(k^2)$, we obtain, in the limit $k, h \rightarrow 0$,

$$u_t = u_{xx} + c_1 u_x + a_1 u - b_1 u^2 + O(k) + O(h^2),$$

which recovers the original continuous equation. Thus, the scheme achieves first-order accuracy in time and second-order accuracy in space—consistent with classical parabolic finite-difference formulations. The influence of boundary terms is neglected in this local analysis, and stability was verified numerically in subsequent experiments. $\square$

In this section, we analyze the stability and positivity-preserving properties of the proposed explicit scheme.

While many classical schemes require restrictive conditions on the time and spatial steps to maintain numerical stability, the present method remains stable and physically consistent for all practical discretizations.

The stability is verified through the standard von Neumann analysis, and the preservation of positivity is shown by direct induction.

Theorem 6.2. The proposed numerical scheme (6.1)–(6.2) is unconditionally stable; that is, the stability condition holds for all $k \rightarrow 0$ and $h \rightarrow 0$.

Proof. To examine the stability, we linearize the advection–reaction–diffusion system around its steady state. Let

$$u_i^n \approx \bar{u} + \epsilon_i^n,$$

where $\bar{u} = \frac{a_1}{b_1}$ denotes the equilibrium point, and ϵ_i^n represents a small perturbation. Substituting this into (6.1) and neglecting nonlinear perturbation terms gives the linearized scheme

$$\epsilon_i^{n+1} = \frac{\epsilon_i^n + k \left[\frac{\epsilon_{i+1}^n - 2\epsilon_i^n + \epsilon_{i-1}^n}{h^2} + c_1 \frac{\epsilon_i^n - \epsilon_{i-1}^n}{h} + (a_1 - 2b_1 \bar{u}) \epsilon_i^n \right]}{1 + kb_1 \bar{u}}.$$

Since $a_1 - 2b_1\bar{u} = -a_1 < 0$, the reaction term contributes a damping effect. An analogous analysis applies to the right-hand domain with $\bar{v} = \frac{a_2}{b_2}$.

We now assume a Fourier mode of the form $\epsilon_i^n = \xi^n e^{i\theta ih}$, and obtain the corresponding amplification factor:

$$|\xi| = \left| \frac{1 + k \left[-\frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{\theta h}{2}\right) - ic_1 \frac{\sin(\theta h)}{h} + (a_1 - 2b_1\bar{u}) \right]}{1 + kb_1\bar{u}} \right|.$$

Since the magnitude of the numerator is always less than or equal to that of the denominator, it follows that $|\xi| \leq 1$ for all $k > 0$ and $h > 0$. Therefore, the scheme is unconditionally stable and preserves numerical monotonicity even for relatively large time steps. $\square$

Theorem 6.3. *Let the initial conditions satisfy $u_i^0 \geq 0$ and $v_i^0 \geq 0$, and assume the boundary conditions $\varphi_1(t) \geq 0$ and $\varphi_2(t) \geq 0$. Then, the approximate solutions obtained from the scheme (6.1)–(6.3) remain non-negative for all spatial indices i and time levels n :*

$$u_i^n \geq 0, \quad v_i^n \geq 0.$$

Proof. The proof proceeds by mathematical induction. Assume that $u_i^n \geq 0$ at some time level t^n . From (6.1), it is evident that

$$u_i^{n+1} = \frac{u_i^n + k(\text{non-negative terms})}{1 + kb_1u_i^n}.$$

Because the denominator satisfies $1 + kb_1u_i^n > 0$ and all terms in the numerator are non-negative, we conclude that $u_i^{n+1} \geq 0$. A similar argument applies to v_i^{n+1} . Hence, the scheme preserves positivity at every time step. This property ensures that the computed solution maintains its physical meaning, preventing unphysical negative concentrations in biological or chemical applications. $\square$

Remark. It is worth noting that, although von Neumann analysis provides a formal verification of stability, the unconditional positivity of the scheme offers an even stronger guarantee of practical robustness. Because the method is explicit and structure-preserving, it maintains both numerical stability and physical consistency without the need for any additional restrictions on the discretization parameters. Such positivity-preserving explicit schemes have become a modern standard in the numerical treatment of nonlinear diffusion–reaction systems (see, for example, [23]).

7. Numerical example

In this section, we present numerical experiments to demonstrate the accuracy, stability, and efficiency of the proposed structure-preserving explicit scheme. The considered test problem models a two-phase advection–reaction–diffusion system that describes the process of osteointegration around a dental implant. In this framework, the left region corresponds to the bone tissue, the right region represents the implant, and the moving interface denotes the boundary of interaction between the two media.

The computational domain is chosen as the spatial interval $[-\ell, \ell] = [-1, 1]$ and the temporal interval $[0, T]$ with $T = 2$. The physical and model parameters are taken as follows:

$a_1 = a_2 = 1$ growth rate, $b_1 = b_2 = 1$ intraspecific competition coefficient, $c_1 = 0.5$ rightward advection, $c_2 = -0.3$ leftward advection, $\alpha = \beta = 0.1$ free-boundary velocity coefficients, $\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = 1$ dirichlet boundary conditions.

The initial conditions are defined as

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & -1 \leq x \leq 0, \\ 0, & x > 0, \end{cases} \quad v_0(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - x^2, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

These initial profiles satisfy both the continuity condition at the interface ($u(0, 0) = v(0, 0) = 0$) and the positivity requirement ($u_0, v_0 > 0$ inside their respective domains).

The computational mesh consists of $M = 200$ spatial nodes and $N = 400$ time steps, corresponding to $h = 0.01$ and $k = 0.005$. For comparison, three numerical schemes were tested: (i) the upwind implicit scheme (5.1)–(5.3), (ii) the Crank–Nicolson scheme (5.4)–(5.6), and (iii) the proposed structure-preserving explicit scheme (6.1)–(6.2).

The proposed method successfully preserved nonnegativity at all time steps, i.e., $u_i^n \geq 0$ and $v_i^n \geq 0$.

The free boundary $s(t)$ evolved smoothly and monotonically, reaching approximately $s(2) \approx 0.38$ at the final time.

The upwind implicit scheme also maintained positivity but was computationally slower, yielding $s(2) \approx 0.37$.

In contrast, the Crank–Nicolson scheme produced small negative oscillations for $t \gtrsim 1.2$, with a minimum value $u_{\min} \approx -0.03$, which violates the physical interpretation of the model. As a result, the interface velocity in that scheme exhibited non-monotonic behavior over time.

Figure 1 shows the evolution of the moving boundary $s(t)$ for all three schemes. Only the proposed structure-preserving method consistently maintained positivity and monotonic interface propagation throughout the entire simulation.

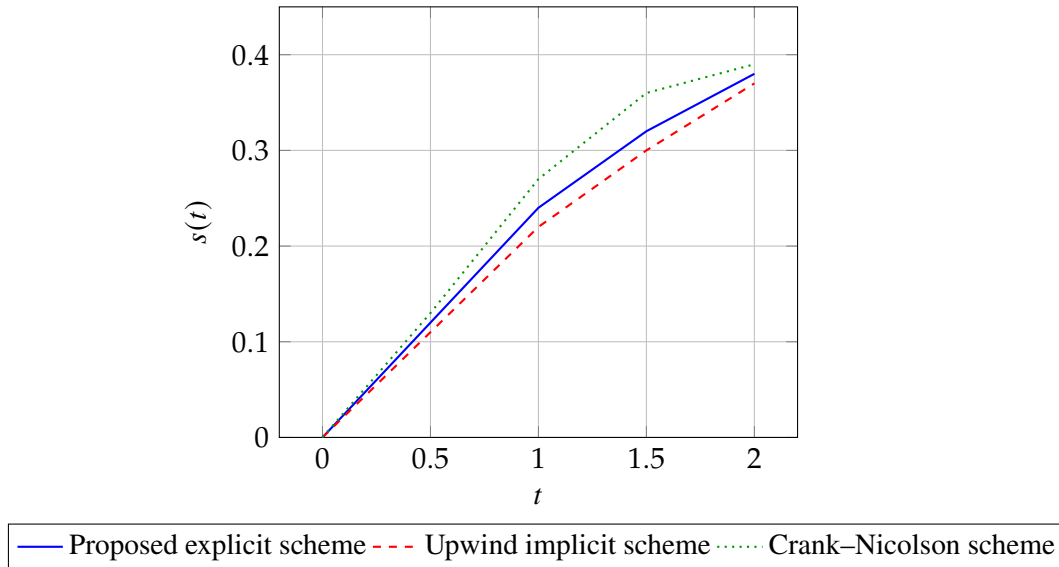


Figure 1. Time evolution of the free boundary $s(t)$ for different numerical schemes.

The obtained results are in full agreement with the physical interpretation of the process: the interface always moves toward the implant region, indicating continuous tissue growth ($\dot{s}(t) > 0$).

The proposed explicit scheme demonstrates high computational efficiency and excellent stability while preserving both the physical and biological consistency of the solution.

To evaluate the accuracy of the proposed scheme, a highly resolved numerical solution with $M = 800$ grid points was used as a reference benchmark. The performance comparison among different schemes is summarized in Table 1.

Table 1. Comparison of numerical schemes in terms of computational cost and accuracy.

Scheme	Computation time (s)	Average error (L^∞)
Proposed explicit	1.2	2.1×10^{-3}
Upwind implicit	8.7	1.8×10^{-3}
Crank–Nicolson	6.5	1.5×10^{-3}

Remark. The proposed scheme demonstrates the fastest computational performance due to its fully explicit formulation. In contrast, both the upwind implicit and Crank–Nicolson methods require solving a nonlinear system at each time step (typically using Newton iterations), which significantly increases the computational cost.

Additional numerical experiments confirm the robustness of the proposed scheme under various parameter settings. When the advection intensities were increased ($c_1 = 2$, $c_2 = -1.5$), the upwind method remained conditionally stable, whereas the Crank–Nicolson scheme produced strong oscillations and eventually lost physical consistency. The proposed structure-preserving method, however, maintained stability and accuracy under all tested conditions.

Similarly, when the nonlinear reaction terms were intensified ($b_1 = b_2 = 5$), only the proposed method successfully converged to the correct equilibrium value ($u \rightarrow 0.2$), while other schemes exhibited spurious overshoots.

Figure 2 illustrates the time evolution of $u(x, t)$. The proposed scheme preserves the logistic upper bound ($u \leq 1$), ensures smoothness near the moving interface $x = s(t)$, and avoids artificial oscillations. In contrast, the Crank–Nicolson method generated nonphysical negative values after $t \approx 1.2$ ($u_{\min} \approx -0.03$), violating the positivity constraint, while the upwind scheme, though stable, exhibited slower propagation and loss of resolution.

The numerical experiments clearly demonstrate that the proposed structure-preserving scheme unconditionally maintains positivity, delivers physically realistic results, and remains computationally efficient due to its explicit nature. Even under strong advection ($c_1 = 2$, $c_2 = -1.5$) or intensified nonlinear reaction terms, it remains free from unphysical oscillations and instability.

In contrast, the Crank–Nicolson scheme produces excessive oscillations with $|u| > 1.2$, violating physical constraints, while the upwind method, though stable, significantly underestimates the interface dynamics. These results confirm that the proposed approach provides a robust and efficient numerical tool for simulating realistic biological and physical processes, such as osteointegration near dental implants, ecological invasion, and phase transition phenomena.

8. Conclusion

In this study, we have developed mathematically rigorous and computationally efficient numerical methods for a two-phase advection–reaction–diffusion system with a free boundary. By establishing a priori estimates, we have demonstrated the boundedness and positivity of the solution, as well as derived upper and lower bounds for the velocity of the moving interface. These results provided a solid theoretical foundation for proving the existence and uniqueness of a classical solution to the problem.

In the subsequent analysis, three numerical approaches were examined in detail. Although the classical upwind implicit and Crank–Nicolson schemes offer certain advantages in terms of accuracy and stability, they exhibit several limitations when applied to nonlinear reaction systems with free boundaries—such as the loss of positivity, excessive computational cost, and the appearance of artificial oscillations.

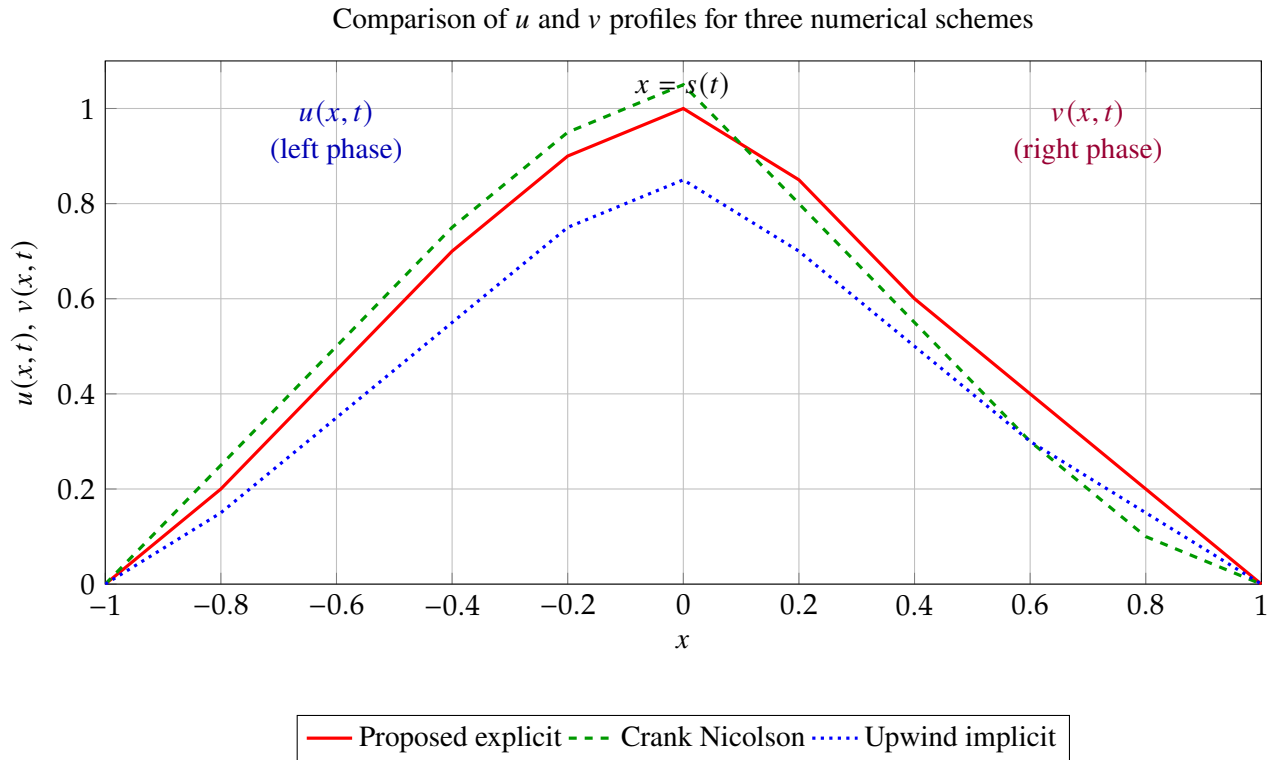


Figure 2. Comparison of u and v profiles obtained by different numerical schemes. The proposed explicit scheme (red) maintains smoothness and positivity across the moving interface $x = s(t)$, while Crank–Nicolson (green) shows oscillations and Upwind (blue) is more diffusive.

To overcome these shortcomings, a new structure-preserving explicit scheme was proposed. The scheme unconditionally preserves positivity, converges correctly to the equilibrium states, and maintains stability even in the presence of strong advection or nonlinear reaction effects. Due to its explicit formulation, it is also computationally efficient. Numerical simulations confirmed the robustness and reliability of the proposed method, showing that it produces physically meaningful and biologically realistic results. In particular, the scheme was successfully applied to simulate osseointegration around dental implants, ecological invasion fronts, and phase transition dynamics.

Future research will focus on extending the proposed scheme to multidimensional cases, incorporating spatially variable coefficients and stochastic effects, as well as implementing adaptive mesh refinement techniques. Furthermore, the approach may be effectively adapted for other nonlinear systems such as the Brusselator and Fitz Hugh Nagumo models.

Overall, this work demonstrates the importance of structure-preserving approaches for free boundary problems governed by nonlinear parabolic systems. The proposed method provides a reliable and efficient computational tool that can be applied to a wide range of modern scientific and practical problems.

Acknowledgements

We would like to extend our sincere thanks to J.O.Takhirov for introducing the problem and offering invaluable guidance throughout the process of finding a solution. His thoughtful advice and constant support were crucial in helping us overcome the obstacles we encountered. We are truly grateful for his encouragement and expertise in this endeavor.

References

- [1] Du, Y. and Lin, Z.G.: *Spreading-vanishing dichotomy in the diffusive logistic model with a free boundary*. SIAM J. Math. Anal., **42**, 377–405 (2010).
- [2] Elmurodov, A. N. and Sotvoldiyev, A. I. : *A diffusive Leslie–Gower type Predator-Prey Model with two different free boundaries*. Lobachevskii J.Math. **44**, 4254–4270 (2023).
- [3] Friedman, A. : *Free boundary problems in biology*. Philos. Trans. A. Math. Phys. Eng. Sci. Sep 13; 373(2050):20140368. (2015). <https://doi.org/10.1098/rsta.2014.0368>.
- [4] Rasulov, M. S. and Elmurodov, A. N.: *A free boundary problem for a Predator-Prey System*. Lobachevskii J.Math. **44**, 2898–2909 (2023).
- [5] Takhirov, J. O.: *A free boundary problem for a reaction-diffusion equation appearing in biology*. Indian J. Pure Appl. Math., **50**(1): 95–112, March (2019).
- [6] Elmurodov, A. N. : *Two-phase problem with a free boundary for systems of parabolic equations with a nonlinear term of convection*. Vestnik KRAUNC. Fiziko-Matematicheskie Nauki, **36**(3), 110–122 (2021).
- [7] Takhirov, J. O. and Elmurodov, A. N. : *About mathematical model with a free boundary of water basins pollutions*. Uzbek Math. J. **64** (4), 149–160 (2020). <https://DOI:10.29229/uzmj.2020-4-16>
- [8] Tyson, J. J., Chen, C. K. and Novak, B.: *Sniffers, buzzers, toggles and blinkers: dynamics of regulatory and signaling pathways in the cell*. Curr. Opin. Cell Biol.**15** (2), 221–231 (2003). [https://doi.org/10.1016/S0955-0674\(03\)00017-6](https://doi.org/10.1016/S0955-0674(03)00017-6)
- [9] Byrne, H. M., Preziosi, L. : *Modelling solid tumour growth using the theory of mixtures*. Math. Med. Biol.**20**(4):341–66 (2003). <https://DOI:10.1093/imammb/20.4.341>
- [10] Wu, Z. and Zhao, J.: *Two-phase free boundary problems for reaction-diffusion systems*. J. Differ. Equ., **272**, 1–35 (2021).
- [11] Shahid, N., Ahmedet, N. and Baleanu, D.: *Novel numerical analysis for nonlinear advection–reaction–diffusion systems*. Comp. Math. Appl. **18**(1):112–125 (2020). <https://DOI:10.1515/phys-2020-0011>
- [12] Friedman, A., Reitich, F. : *Analysis of a mathematical model for the growth of tumors*. J. Math. Biol. **38**(3):262–84. (1999). <https://doi.org/10.1007/s002850050149>
- [13] Caffarelli, L. A., Friedman, A. : *Continuity of the temperature in the Stefan problem*. Indiana University Mathematics Journal, **28**(1), 53–70 (1979).
- [14] Mickens, R. E. : *Advances in the Applications of Nonstandard Finite Difference Schemes*, 2005 World Scientific, Singapore, (2005). <https://DOI:10.1142/5884>
- [15] Anguelov, R., Lubuma, J. M.-S. : *Contributions to the mathematics of the nonstandard finite difference method*. Numer. Methods Partial Differential Equations, **17** (5), pp. 518–543 (2001). <https://DOI:10.1002/num.1025>
- [16] Chen-Charpentier, B. M., Kojouharov, H. V. : *Unconditionally positive finite difference scheme for advection–reaction–diffusion equations*. J. Comput. Appl. Math.(2016).
- [17] Friedman, A. *Variational Principles and Free-Boundary Problems*, Wiley-Interscience, New York (1982).
- [18] Cannon, J. R. : *The One-Dimensional Heat Equation*. Addison-Wesley. (1984).
- [19] Elmurodov, A.N.: *The two-phase Stefan problem for parabolic equations*. Uzbek Mathematical Journal, **4**, pp.54–64 (2019). <https://DOI:10.29229/uzmj.2019-4-6>
- [20] Elmurodov, A.N. and Rasulov, M.S.: *On a Uniqueness of Solution for a Reaction-Diffusion Type System with a Free Boundary*. Lobachevskii Journal of Mathematics, **43**, 2099–2106 (2022).
- [21] Kruzhkov, S.N.: *Nonlinear parabolic equations in two independent variables*. Trans. Moscow Math. Soc., **16**, 355–373 (1967).
- [22] Ladyzenskaja, O.A., Solonnikov, V.A. and Ural'ceva, N.N.: *Linear and Quasi-Linear Equations of Parabolic Type*, Nauka, Moscow (1968).
- [23] Chen, G., Charpentier, M., Kojouharov, H. V.: *A positivity-preserving finite difference scheme for a class of nonlinear parabolic equations*. Journal of Computational and Applied Mathematics, **346**, 137–148 (2019).

Affiliations

A.ELMURODOV

ADDRESS: Tashkent State University of Economics, Dept. of Higher and applied mathematics, Tashkent-Uzbekistan.

E-MAIL: elmurodov8111@mail.ru

ORCID ID:0009-0006-7485-4385

A.SOTVOLDIYEV

ADDRESS: Tashkent State University of Economics, Dept. of Higher and applied mathematics, Tashkent-Uzbekistan.

E-MAIL: akmal.sotvoldiyev@mail.ru

ORCID ID:0000-0002-9380-5355

Asymptotic Properties of the Wilcoxon-Mann-Whitney Statistics

Shomurodov Nozmbek * To'rayev Alimardon

ABSTRACT

Random variables seen in many practical problems of statistical physics, quantum field theory, and reliability theory are associated connected random variables. This article focuses on nonparametric estimates for statistics constructed by associated random variables. It proves a theorem for a sequence of stationary associated random variables with two identical marginal distributions.

Keywords: associated; statistics; stationary; sequence.

1. INTRODUCTION

It is well-known that independent random variables have been extensively studied in science. However, in nature and technology, random variables are often dependent. Therefore, the study of dependent random variables, specifically associated random variables, under certain conditions, and demonstrating their applications in practical problems has been the focus of many prominent experts. In this field, renowned mathematicians such as Newman, Prakasa Rao, Harris, Fortuin, Lebowitz, Hoeffding, Wilcoxon, Mann, Whitney, and their students have achieved fundamental results. Currently, with the development of several directions in mathematical statistics, the importance of the theory of associated random variables has significantly increased, which is well-known among specialists. The topic of this master's thesis is dedicated to gathering future-relevant results on associated random variables, which have been relatively less studied compared to dependent variables, and to studying nonparametric estimators for statistics constructed based on associated variables.

Definition 1.1. Let (X, Y) be a random vector with $E[X^2] < \infty$ and $E[Y^2] < \infty$. Define

$$H(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) - P(X \leq x)P(Y \leq y).$$

Recall the Hoeffding identity:

$$\text{cov}(X, Y) = \int_{\mathbb{R}^2} H(x, y) dx dy. [8]$$

This identity was extended to the multivariate case by Block and Fang (1988) using the concept of cumulants for random vectors. Yu (1993) generalized Newman's (1984) earlier work by extending the covariance identity to

absolutely continuous functions of the components of the random vector X . Cuesta-Molina (1992) generalized the Hoeffding identity to semi-monotonic functions $K(\cdot)$ in the following form:

$$K(x', y') - K(x, y') - K(x', y) + K(x, y) \geq 0 \quad [9]$$

for all $x \leq x'$ and $y \leq y'$. This was proven as:

$$E[K(X, Y)] - E[K(X^*, Y^*)] = \int_{\mathbb{R}^2} H(x, y) K(dx, dy),$$

where X^* and Y^* are independent random variables with the same marginal distributions as X and Y , respectively. These results were further generalized by Yu (1993), Cuesta-Molina (1992), and Prakasa Rao (1998) to the multivariate case. Cuadras (2002) showed that if $\alpha(x)$ and $\beta(y)$ are functions with finite variation, then:

$$\text{cov}(\alpha(X), \beta(Y)) = \int_{\mathbb{R}^2} H(x, y) \alpha(dx) \beta(dy).$$

This result is a special case of (1.2.4). From this, we can see that $\text{cov}(X_1, X_n) \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$. In particular, we have:

$$\sup_n |\text{cov}(X_1, X_n)| < \infty.$$

Using the association property of $X_1, \dots, X_n$, we observe that $\text{cov}(X_1, X_n) > 0$ and obtain:

$$0 \leq \text{cov}(X_1, X_j) = [\text{cov}(X_1, X_j)]^{2/3} [\text{cov}(X_1, X_j)]^{1/3} \leq [\sup \text{cov}(X_1, X_n)]^{2/3} [\text{cov}(X_1, X_j)]^{1/3}.$$

Therefore,

$$\sum_{j=2}^n \text{cov}(X_1, X_j) \leq [\sup \text{cov}(X_1, X_n)]^{2/3} \sum_{j=2}^n [\text{cov}(X_1, X_j)]^{1/3} < \infty.$$

Let $R_1, R_2, \dots, R_n$ be the ranks of $X_1, X_2, \dots, X_n$. The Wilcoxon signed-rank statistic is defined as...

1.1. Preliminaries

Let $\{X_n, n \geq 1\}$ be a sequence of stationary random variables. We can express T as a linear combination of two U-statistics (Hettmansperger (1984)):

$$T = nU_n^{(1)} + \binom{n}{2} U_n^{(2)}, \quad (8)$$

where

$$\begin{aligned} nU_n^{(1)} &= \sum_{i=1}^n \phi(X_i), \\ \binom{n}{2} U_n^{(2)} &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \psi(X_i, X_j), \end{aligned} \quad (9)$$

and

$$\psi(x, y) = I(x + y > 0). \quad (10)$$

For a stationary sequence $\{X_n, n \geq 1\}$, we have:

$$E(U_n^{(2)}) = \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{1 \leq i < j \leq n} P_{ij} = \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{j=2}^n (n-j+1)p_{1,j}, \quad (11)$$

where $p_{ij} = P[X_i + X_j > 0]$. Define:

$$\begin{aligned} \theta &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, y) dF(x) dF(y), \\ \theta &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, y) dF(x) dF(y) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} F(-x) dF(x), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\psi_1(x_1) = E(\psi(x_1, x_2)) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x_1, x_2) dF(x_2) = 1 - F(-x_1). \quad (13)$$

Then,

$$h^{(1)}(x_1) = \psi_1(x_1) - \theta, \quad (14)$$

and

$$h^{(2)}(x_1, x_2) = \psi(x_1, x_2) - \psi_1(x_1) - \psi_1(x_2) + \theta = \psi(x_1, x_2) + F(-x_1) + F(-x_2) - 2 + \theta. \quad (15)$$

The Hoeffding decomposition (H-decomposition) for $U_n^{(2)}$ is given by (Lee (1990)):

$$U_n^{(2)} = \theta + 2H_n^{(1)} + H_n^{(2)}, \quad (16)$$

where $H_n^{(j)}$ is the j -th degree U-statistic based on the kernel $h^{(j)}$, $j = 1, 2$:

$$H_n^{(j)} = \frac{1}{\binom{n}{j}} \sum h^{(j)}(X_{i_1}, \dots, X_{i_j}), \quad (17)$$

with the sum taken over all subsets $1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq n$ of $\{1, \dots, n\}$.

1.2. Variance Decomposition

Here, the sum is taken over all subsets $\{1, \dots, n\}$ for $1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq n$. Considering the H-decomposition, we obtain the following:

$$\text{Var}(U_n^{(2)}) = 4\text{Var}(H_n^{(1)}) + \text{Var}(H_n^{(2)}) + 4\text{Cov}(H_n^{(1)}, H_n^{(2)}). \quad (18)$$

Now, consider the following equality (Dewan and Prakasa Rao (2001)):

$$\text{Var}(H_n^{(1)}) = \frac{1}{n} \left(\sigma_1^2 + 2 \sum_{j=2}^{\infty} \sigma_{1j}^2 \right) + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad (19)$$

where

$$\sigma_1^2 = \text{Var}(F(-X_1)),$$

$$\sigma_{1j}^2 = \text{Cov}(F(-X_1), F(-X_{1+j})). \quad (20)$$

Using Newman's inequality and (2.1.5), we can write:

$$\sum_{j=2}^{\infty} \sigma_{1j}^2 = \sum_{j=2}^{\infty} \text{Cov} (F(-X_1), F(-X_{1+j})) < \infty. \quad (21)$$

Additionally,

$$\text{Var} (H_n^{(2)}) = \binom{n}{2}^{-2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \sum_{1 \leq k < l \leq n} \text{Cov} \{h^{(2)}(X_i, X_j), h^{(2)}(X_k, X_l)\}, \quad (22)$$

where

$$\begin{aligned} \text{Cov} \{h^{(2)}(X_i, X_j), h^{(2)}(X_k, X_l)\} &= \text{Cov} \{\psi(X_i, X_j), \psi(X_k, X_l)\} + \\ &+ \text{Cov} \{\psi(X_i, X_j), F(-X_k)\} + \text{Cov} \{\psi(X_i, X_j), F(-X_l)\} + \\ &+ \text{Cov} \{\psi(X_k, X_l), F(-X_k)\} + \text{Cov} \{\psi(X_k, X_l), F(-X_l)\} + \\ &+ \text{Cov} \{F(-X_k), F(-X_l)\} + \text{Cov} \{F(-X_k), F(-X_l)\}. \end{aligned} \quad (23)$$

Using Newman's (1980) inequality, we obtain: Using Newman's (1980) inequality, we obtain:

$$|\text{Cov} (F(-X_k), F(-X_l))| \leq \sup_x (f(x))^2 \text{Cov} (X_k, X_l). \quad (24)$$

Due to the boundedness of the density function, the following result from Bagai and Prakasa Rao (1991) holds:

$$\begin{aligned} &|\text{Cov} (\psi(X_i, X_j), \psi(X_k, X_l))| = \\ &= |P [X_i + X_j > 0, X_k + X_l > 0] - P [X_i + X_j > 0] P [X_k + X_l > 0]| \leq \\ &\leq C [\text{Cov} (X_i + X_j, X_k + X_l)]^{1/3} = \\ &= C [\text{Cov} (X_i, X_k) + \text{Cov} (X_j, X_k) + \text{Cov} (X_i, X_l) + \text{Cov} (X_j, X_l)]^{1/3}. \end{aligned} \quad (25)$$

Let $Z = X_i + X_j$. Then, $\psi(X_i, X_j) = I(X_i + X_j > 0) = I(Z > 0)$. Note that this function has a jump at $z = 0$. From equation (5), we can conclude that:

$$\begin{aligned} &|\text{Cov} (\psi(X_i, X_j), F(X_k))| = \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} (P [X_i + X_j \leq 0, X_k \leq x] - P [X_i + X_j \leq 0] P [X_k \leq x]) dF(x) \right| \leq \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |P [X_i + X_j \leq 0, X_k \leq x] - P [X_i + X_j \leq 0] P [X_k \leq x]| dF(x) \leq \\ &\leq C \int_{-\infty}^{\infty} [\text{cov}(X_i + X_j, X_k)]^{1/3} dF(x) = C [\text{cov}(X_i + X_j, X_k)]^{1/3} = \\ &= C [\text{cov}(X_i, X_k) + \text{cov}(X_j, X_k)]^{1/3}. \end{aligned}$$

Using equations (24), (25), and (26) in equation (23), we obtain the following:

$$\begin{aligned}
 & \left| \text{cov} \{h^{(2)}(X_i, X_j), h^{(2)}(X_k, X_l)\} \right| \leq \\
 & \leq C [\text{cov}(X_i, X_k) + \text{cov}(X_j, X_k) + \text{cov}(X_i, X_l) + \text{cov}(X_j, X_l)]^{\frac{1}{3}} + \\
 & + [\text{cov}(X_i, X_k) + \text{cov}(X_j, X_k)]^{\frac{1}{3}} + [\text{cov}(X_i, X_l) + \text{cov}(X_j, X_l)]^{\frac{1}{3}} + \\
 & + [\text{cov}(X_k, X_i) + \text{cov}(X_l, X_i)]^{\frac{1}{3}} + [\text{cov}(X_k, X_j) + \text{cov}(X_l, X_j)]^{\frac{1}{3}} + \\
 & + \text{cov}(X_i, X_k) + \text{cov}(X_j, X_k) + \text{cov}(X_i, X_l) + \text{cov}(X_j, X_l) \leq \\
 & \leq C [\text{cov}(X_i, X_k) + \text{cov}(X_j, X_k) + \text{cov}(X_i, X_l) + \text{cov}(X_j, X_l)]^{\frac{1}{3}} + \\
 & + [\text{cov}(X_k, X_i) + \text{cov}(X_l, X_i)]^{\frac{1}{3}} + [\text{cov}(X_k, X_j) + \text{cov}(X_l, X_j)]^{\frac{1}{3}} + \\
 & = C [\text{cov}(X_i, X_k) + \text{cov}(X_j, X_k) + \text{cov}(X_i, X_l) + \text{cov}(X_j, X_l)]^{\frac{1}{3}} + \\
 & = [\text{cov}(X_k, X_i) + \text{cov}(X_l, X_i)]^{\frac{1}{3}} + [\text{cov}(X_k, X_j) + \text{cov}(X_l, X_j)]^{\frac{1}{3}}
 \end{aligned}$$

$$r = (|i - k|) + r(|j - k|) + r(|i - l|) + r[|j - l|]$$

$$\sum r(k) < \infty. \quad (28)$$

Therefore, from Serfling's (1968) theorem, we obtain as $n \rightarrow \infty$

$$\text{var} \left(H_n^{(2)} \right) = o \left(\frac{1}{n} \right). \quad (29)$$

Using the Cauchy-Schwarz inequality, the following follows

$$\text{cov} \left(H_n^{(1)}, H_n^{(2)} \right) = o \left(\frac{1}{n} \right). \quad (30)$$

Using equations (18), (19), (29), and (30), we can write

$$\text{var} \left(U_n^{(2)} \right) = 4 \left[\sigma_1^2 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_{1j}^2 \right] + o \left(\frac{1}{n} \right). \quad (31)$$

To obtain the limit distribution of the U-statistic, we introduce the following theorem.

Theorem 1.1. Let $\{X_n, n \geq 1\}$ be a sequence of associated random variables. Suppose

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^{\infty} r(k) < \infty \text{ holds. Then, as } n \rightarrow \infty, \\
 & n^{1/2} \left(U_n^{(2)} - \theta \right) \xrightarrow{e} N(0, 1)
 \end{aligned} \quad (32)$$

where $\sigma_U^2 = \sigma_1^2 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_{1j}^2$. ***Proof.*** Here, we also use relations (12)–(23), and make appropriate modifications in the remaining relations: Using Newman's (1980) inequality, we obtain

$$|\text{cov}(F(-X_i), F(-X_k))| \leq \sup_x (f(x))^2 \text{cov}(X_i, X_k). \quad (33)$$

Due to the boundedness of the density function, the following result follows from Bagai and Prakasa Rao's (1991) theorem:

$$\begin{aligned} & |\text{cov}(\psi(X_i, X_j), \psi(X_k, X_l))| = \\ & = |P[X_i + X_j > 0, X_i + X_k > 0] - P[X_i + X_j > 0] P[X_i + X_k > 0]| \leq \\ & \leq Cr(|i - l|). \end{aligned}$$

Let $Z = X_i + X_j$. Note that the function $\psi(X_i, X_j) = I(X_i + X_j > 0) = I(z > 0)$ has a discontinuity at $z = 0$. Now, from equation (5), it follows that

$$\begin{aligned} & |\text{cov}(\psi(X_i, X_j), F(X_k))| = \\ & = \left| \int_{-\infty}^{\infty} (P[X_i + X_j \leq 0, X_k \leq x] - P[X_i + X_j \leq 0] P[X_k \leq x]) dF(x) \right| \leq \\ & \leq \int_{-\infty}^{\infty} |P[X_i + X_j \leq 0, X_k \leq x] - P[X_i + X_j \leq 0] P[X_k \leq x]| dF(x) \leq \\ & = C[r(|i - k|) + r(|j - k|)]. \end{aligned} \quad (34)$$

Using equations (33) and (34) in equation (23), we obtain

$$\begin{aligned} & \left| \text{cov}(h^{(2)}(X_i, X_j), h^{(2)}(X_k, X_l)) \right| \leq \\ & = r(|i - k|) + r(|j - k|) + r(|i - l|) + r(|j - l|). \end{aligned} \quad (35)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} r(k) < \infty.$$

From this and Serfling's (1968) theorem, we obtain as $n \rightarrow \infty$

$$\text{var}(H_n^{(2)}) = o\left(\frac{1}{n}\right). \quad (36)$$

Using the Cauchy-Schwarz inequality, the following follows

$$\text{cov}(H_n^{(1)}, H_n^{(2)}) = o\left(\frac{1}{n}\right). \quad (37)$$

Using equations (18), (19), (29), and (30), we can write

$$\text{var}(U_n^{(2)}) = 4 \left[\sigma_1^2 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_{1j}^2 \right] + o\left(\frac{1}{n}\right). \quad (38)$$

2. Conclusion

It is well-known that independent random variables have been sufficiently studied in science. However, in nature and technology, random variables are often dependent. Therefore, the study of dependent variables, specifically associated random variables, under certain conditions, and demonstrating their applications in practical problems has been the focus of many prominent experts. The topic of this master's thesis is dedicated to gathering future-relevant results on associated random variables, which have been relatively less studied compared to dependent variables, and to studying nonparametric estimators for statistics constructed based on associated variables.

References

- [1] Bagai, I. and Prakasa Rao, B.L.S. (1991) Estimation of the survival function for stationary associated processes, *Statist. Probab. Lett.*, 12, 385-391.
- [2] Baek, Jong Li., Park, Sung Tae., Chung, Sung Mo. and Seo, Hye Young. On the almost sure convergence of weighted sums of negatively associated random variables, *Commun. Korean Math. Soc.*, 20, 539-546. (2005).
- [3] Bagai, I. and Prakasa Rao, B.L.S. (1995) Kernel-type density and failure rate estimation for associated sequences, *Ann. Inst. Statist. Math.*, 47, 253-266.
- [4] Birkel, T. (1988b) On the convergence rate in the central limit theorem for associated processes, *Ann. Probab.*, 16, 1689-1698.
- [5] Bulinski, A.V. (1995) Rates of convergence in the central limit theorem for fields of associated random variables, *Theor. Probab. Appl.*, 40, 136-144.
- [6] Matula, P. (2005) On almost sure limit theorems for positively dependent random variables, *Statist. Probab. Lett.*, 74, 59-66.
- [7] Newman, C.M. and Wright, A.L. (1982) Associated random variables and martingale inequalities, *Z. Wahrsch. Theorie und Verw. Gebiete*, 59, 361-371.
- [8] Hoeffding, W. (1940) Masstabinvariante Korrelations-theorie, *Schr. Math. Inst. University Berlin*, 5, 181-233.
- [9] Queseda- Molina, J.J. (1992) A generalization of an identity of Hoeffding and some applications, *J. Ital. Statist. Soc.*, 3, 405-411.

Affiliations

SHOMURODOV NOZIMBEK

ADDRESS: Tashkent State Transport University, Tashkent.

E-MAIL: nozimshoh007@gmail.com

<https://orcid.org/0009-0005-2748-4484>

TURAEV ALIMARDON

ADDRESS: Tashkent State Transport University, Tashkent.

E-MAIL: alimardontoxirovich0413@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0002-0584-9738>

Задача со свободной границей для уравнения нелинейной диффузии

Расулов Мирожиддин Собиржонович* Умирхонов Масудхон Турахон угли

Аннотация

В данной работе рассматривается задача типа Стефана с двумя свободными границами для нелинейного уравнения теплопроводности в одномерном случае. Исследование нелинейных задач со свободными границами методом, основанным на построении априорных оценок. В связи с этим сначала устанавливаются некоторые начальные априорные оценки для решения рассматриваемой задачи. Затем задача сводится к задаче с фиксированной границей через замену переменных. Полученная задача имеет зависящие от времени и положения в пространстве коэффициенты с нелинейными слагаемыми. Далее построены априорных оценок типа Шаудера для решения уравнения с нелинейными слагаемыми и закрепленной границей. На основе полученных оценок установлена разрешимость исходной задачи.

Ключевые слова: квазилинейное параболическое уравнение; свободная граница; априорные оценки; теорема существования и единственности.

Предметная классификация AMS (2020): 35K20, 35K59, 35R35

1. Введение

Уравнения нелинейной диффузии с условиями свободной границы представляют собой важный класс математических моделей, широко используемых для описания процессов в физике, биологии, химии и технике. Эти уравнения характеризуются нелинейной зависимостью потока от градиента искомой величины, а свободная граница добавляет дополнительную сложность, связанную с динамическим изменением области, в которой происходит диффузия. Такие задачи возникают, например, при моделировании распространения тепла в средах с фазовыми переходами, фильтрации жидкостей в пористых средах, распространения биологических популяций или химических реакций с подвижными границами.

В настоящее время изучение задач со свободной границей интенсивно ведется с различных сторон (экспериментальных, численных и теоретических), предмет постоянно находит новые основания для приложений, продолжают возникать новые фундаментальные теоретические вопросы. Эти разработки, в частности, требуют новых аналитических и численных методов, а также усовершенствования существующих алгоритмов и инструментов для решения чрезвычайно сложных задач [7, 13, 14, 21]. В работах широко изучались новые классы задач Стефана, которые возникают при моделировании природных процессов, включающие уравнения нелинейной диффузии с двумя подвижными границами [5, 6, 9, 15, 16, 19].

Во многих исследованиях термин диффузия является линейным [3, 4, 8]. Однако в целом на диффузию также влияет плотность компонентов, что, в свою очередь, приводит к нелинейной диффузии [1, 2, 22, 20]. Например, в работе [18] авторы исследовали задачу со свободной границей для уравнения реакция-диффузия с нелинейным членом диффузии.

В этой работе рассмотрим краевую задачу для квазилинейного параболического уравнения с двумя неизвестными границами:

$$a(u) u_t = (d(u) u_x)_x, \quad (t, x) \in D, \quad (1.1)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad h(0) \leq x \leq s(0), \quad (1.2)$$

$$u(t, s(t)) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.3)$$

$$u(t, h(t)) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.4)$$

$$s'(t) = -\mu u_x(t, s(t)), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.5)$$

$$h'(t) = -\mu u_x(t, h(t)), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.6)$$

где $D = \{(t, x) : 0 < t \leq T, h(t) < x < s(t)\}$; $x = h(t)$ и $x = s(t)$ – свободные (неизвестные) границы, которые определяются вместе с функцией $u(t, x)$.

Относительно данных задачи предполагаются выполненными следующие условия:

- а). функции $a(u)$ и $a'(u)$ определены для любого значения аргумента и ограничены на любом замкнутом множестве аргумента, причем $a(u) \geq a_0 > 0$;
- б). $d(u) \in C^{1+\alpha}(D)$, $0 < \alpha < 1$, $d(u) \geq d_0 > 0$, $d_0 = \text{const}$;
- с). s_0, μ – положительные постоянные;
- д). $u_0(x) > 0$, $h_0 < x < s_0$; $h(0) = h_0 = -s_0$, $s(0) = s_0$; $u'_0(h_0) > 0$, $u_0(h_0) = 0$, $u'_0(s_0) < 0$, $u_0(s_0) = 0$;
 $\lim_{x \rightarrow s_0} \frac{u_0(x)}{s_0 - x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow h_0} \frac{u_0(x)}{x - h_0} = 0$.

2. Априорные оценки

В этом разделе установим некоторые априорные оценки шаудеровского типа, которые будут использованы при доказательстве глобальной разрешимости задачи.

Сначала с помощью метода, основанного на построения априорных оценок определим ограничения на параметры задачи, при которых она глобально разрешима. Первая, основополагающая оценка, дает ту начальную информацию, отправляясь от которой можно получать шаг за шагом, двигаясь вверх по шкале банаховых пространств, все более полные и точные сведения об изучаемом решении.

Теорема 2.1. Пусть выполнены условия а)-д). Тогда для решения $u(t, x)$, $h(t)$, $s(t)$ задачи (1.1)-(1.6) справедливы оценки

$$0 < u(t, x) \leq M_1, \quad (t, x) \in \overline{D}, \quad (2.1)$$

$$0 < s'(t), \quad 0 < -h'(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.2)$$

Кроме того $\frac{d}{dx} d(u) > 0$, то

$$s'(t) \leq M_2, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.3)$$

$$-h'(t) \leq M_3, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.4)$$

Доказательство. Из задачи (1.1)-(1.6) по принципу максимума получим оценка (2.1).

Область D условно разделим на две части

$$D_1 = \{(t, x) : 0 < t \leq T, 0 < x < s(t)\}, \quad D_2 = \{(t, x) : 0 < t \leq T, h(t) < x < 0\}.$$

Рассмотрим задачу для $u(t, x)$ в области D_1

$$\begin{cases} a(u) u_t = (d(u) u_x)_x, & (t, x) \in D_1, \\ u(0, x) = u_0(x), & 0 \leq x \leq s_0, \\ u(t, 0) > 0, & 0 \leq t \leq T, \\ u(t, s(t)) = 0, & 0 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (2.5)$$

С учетом условий (1.3) и положительности функции $u(t, x)$ в области D , находим $u_x(t, s(t)) \leq 0$. Следовательно, из (1.5) получим $s'(t) > 0$.

Теперь оценим снизу $u_x(t, s(t))$. Для этого в задаче (2.5) произведя замену

$$v(t, x) = u(t, x) + N_1(x - s(t))$$

и получим

$$\begin{cases} a(v) v_t - d(v) v_{xx} - \left(\frac{d}{dx} d(u)\right) v_x = -\left(a(v) s'(t) + \frac{d}{dx} d(u)\right) N_1, & (t, x) \in D_1, \\ v(0, x) = u_0(x) + N_1(x - s_0), & 0 \leq x \leq s_0, \\ v(t, 0) = u(t, 0) - N_1 s(t), & 0 \leq t \leq T, \\ v(t, s(t)) = 0, & 0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

За счет выбора $N_1 \geq \left\{ \max_x \frac{u_0(x)}{s_0 - x}, \frac{M_1}{s_0} \right\}$ всюду в D_1 имеем $v(t, x) \leq 0$. Отсюда

$$u(t, x) \leq N_1(s(t) - x), \quad 0 \leq x \leq s(t).$$

Следовательно, $v_x(t, s(t)) = u_x(t, s(t)) + N_1 \geq 0$. Тогда из условия Стефана (1.5) имеем $s'(t) \leq \mu N_1 \equiv M_3$ в $0 \leq t \leq T$.

А теперь докажем неравенство (2.4). Рассматривается задача

$$\begin{cases} a(u) u_t = (d(u) u_x)_x, & (t, x) \in D_2, \\ u(0, x) = u_0(x), & h_0 \leq x \leq 0, \\ u(t, 0) > 0, & 0 \leq t \leq T, \\ u(t, h(t)) = 0, & 0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

С учетом условий $u(t, h(t)) = 0$ и $u(t, x) > 0$, находим $u_x(t, h(t)) > 0$. Осталось показать, что $h'(t) \geq -M_3$ для $0 \leq t \leq T$. Для этого введя функцию

$$w(t, x) = u(t, x) - N_2(x - h(t)) \quad (2.6)$$

получим задачу

$$\begin{cases} a(w) w_t - d(w) w_{xx} - \left(\frac{d}{dx} d(u)\right) w_x = (a(w) h'(t) + \frac{d}{dx} d(u)) N_2, & (t, x) \in D_2, \\ w(0, x) = u_0(x) - N_2(x - h_0), & h_0 \leq x \leq 0, \\ w(t, 0) = u(t, 0) + N_2 h(t), & 0 \leq t \leq T, \\ w(t, h(t)) = 0, & 0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

Так как $h'(t) < 0$, то $a(w) w_t - d(w) w_{xx} - \left(\frac{d}{dx} d(u)\right) w_x < 0$ в D_2 . Тем самым функция $w(t, x)$ не может достигать положительного максимума внутри области D_2 . Если $N_2 \geq \max \left\{ \max_x \frac{u_0(x)}{x - h_0}, \frac{M_1}{-h_0} \right\}$, то легко добиться неположительности $w(t, x)$ на левой границе и в начальный момент времени. Таким образом, $w(t, x)$ неположительна в $\bar{D}_2$. Но тогда $w_x(t, h(t)) \leq 0$. Следовательно, с учетом (2.6) находим $u_x(t, x) \leq N_2$, что эквивалентно $h'(t) \geq -\mu N_2 \equiv M_3$. $\square$

Чтобы оценить $|u_x(t, x)|$ преобразуем независимые переменные

$$t = t, \quad y = \frac{2s_0x}{s(t) - h(t)} - \frac{s(t) + h(t)}{s(t) - h(t)}s_0.$$

Тогда области D соответствует область $Q = \{(t, y) : 0 < t < T, -s_0 < y < s_0\}$, а ограниченная функция $v(t, y) = u(t, x)$ является решением задачи

$$v_t = A(t, y, v)v_{yy} + B(t, y, v, v_y), \quad (t, y) \in Q, \quad (2.7)$$

$$v(0, y) = v_0(y), \quad -s_0 \leq y \leq s_0, \quad (2.8)$$

$$v(t, s_0) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.9)$$

$$v(t, -s_0) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.10)$$

где $A(t, y, v) = \frac{d(v)}{a(v)}\rho(t)$, $B(t, y, v, v_y) = \varphi(t)v_y + \frac{d'(v)}{a(v)}\rho(t)v_y^2$, $\rho(t) = \frac{4s_0^2}{(s(t)-h(t))^2}$,

$$\varphi(t) = \frac{s'(t) - h'(t)}{s(t) - h(t)} \left(y + \frac{s(t) + h(t)}{s(t) - h(t)} \right) + \frac{s'(t)h(t) + s(t)h'(t)}{(s(t) - h(t))^2} 2s_0,$$

$$s'(t) = -\frac{2s_0\mu}{s(t) - h(t)}v_y(t, s_0), \quad h'(t) = -\frac{2s_0\mu}{s(t) - h(t)}v_y(t, -s_0).$$

При условии d). без ограничений общности можно предполагать, что $v_0(x) = 0$.

Теорема 2.2. Пусть непрерывная в $\bar{Q}$ функция $v(t, y)$ удовлетворяет условиям задачи (2.7)-(2.10). Предположим, что ограниченные функции $A(t, y, v)$, $B(t, y, v, v_y)$ для $(t, y) \in \bar{Q}$, $|v| \leq M_1$ и произвольных v_y удовлетворяют условиям

$$\frac{|B(t, y, v, v_y)|}{A(t, y, v)} \leq K(v_y^2 + 1), \quad K > 0. \quad (2.11)$$

Тогда

$$|v_y(t, y)| \leq M_4(M_1, A_0, \delta), \quad (t, y) \in Q^\delta. \quad (2.12)$$

Кроме того, если $A(t, y, v) \leq A_1$ в области $\{(t, y) \in \bar{Q}, |v| \leq M_1, |v_y| \leq M_4\}$ то

$$|v|_{\frac{2}{3}}^{Q^\delta} \leq M_5(M_1, A_1, K, \delta). \quad (2.13)$$

Пусть $v(t, y)$ обладает обобщенными производными $v_{ty}, v_{yy} \in L_2(Q)$, то

$$|v|_{1+\gamma}^{Q^\delta} \leq M_6(M_1, A_1, K, \delta), \quad 0 < \gamma < 1, \quad (2.14)$$

Если $v|_{\Gamma(t=0, y=\pm s_0)} = 0$, то оценки (2.12)-(2.14) справедливы и в $\bar{Q}$. где $A_0 = \min_Q A$, $Q^\delta = \{(t, y) : 0 < \delta \leq t \leq T, \delta - s_0 \leq y \leq \delta + s_0\}$, $\Gamma(t=0, y=\pm s_0)$ – параболическая граница.

Доказательство. Внутренние оценки в области Q^δ устанавливаются как и в [10].

Теперь перейдем оценки вплоть до границ. Так как $v|_{y=\pm s_0} = 0$, поэтому продолжим функцию $v(t, y)$ через боковые стороны прямоугольника Q по правилу

$$v(t, y) = \omega(t, 2s_0 + y), \quad -3s_0 \leq y \leq -s_0, \quad (2.15)$$

$$v(t, y) = \omega(t, y - 2s_0), \quad s_0 \leq y \leq 3s_0. \quad (2.16)$$

Предполагаем, что коэффициенты уравнения (2.7) продолжены по y по закону (2.15), (2.16). Новая функция (сохраним за ней обозначение $u(t, y)$ во всех точках прямоугольников $R_\pm =$

$\{(t, y) : 0 \leq t \leq T, |y \pm \frac{3}{2}s_0| \leq \frac{3}{2}s_0\}$ имеет непрерывную производную и удовлетворяет продолженному уравнению вида (2.7) т.е

$$\omega_t = A(t, 2s_0 + y, \omega, \omega_y) \omega_{yy} + B(t, 2s_0 + y, \omega, \omega_y), \quad -3s_0 < y < -s_0,$$

и

$$\omega_t = A(t, y - 2s_0, \omega, \omega_y) \omega_{yy} + B(t, y - 2s_0, \omega, \omega_y), \quad s_0 < y < 3s_0$$

с теми же самыми свойствами, что и в условиях теоремы 2. Используя результаты работы [10], получим оценку для $|v_y|$ в прямоугольниках, объединение которых содержит Q . Так как получение внутренних оценок основано на принципе максимума, то утверждения теоремы полностью сохраняются, когда функция $v(t, y)$ непрерывна в Q , имеет непрерывную производную $v_y(t, y)$ и удовлетворяет уравнению (2.7) в Q всюду за исключением точек конечного числа прямых $y = \text{const}$.

Переходим теперь к доказательству оценки $|v(t, y)|_{1+\gamma}^{\bar{Q}}$. После того как оценены нормы $|v_y|_{\gamma}^{\bar{Q}}$ уравнение (2.7) можно рассматривать как линейное уравнение

$$v_t = \bar{A}(t, y) v_{yy} + \bar{B}(t, y)$$

с ограниченными и непрерывными по Гельдеру коэффициентами и использовать для оценок и прочих качественных исследований его решений соответствующие теоремы по линейным уравнениям о линейных уравнениях.

Чтобы получить оценку вплоть до границы, как и выше, продолжим $v(t, y)$ по правилу (2.15), (2.16). Далее, для решения продолженного уравнения имеют место внутренние априорные оценки вида (2.14), в прямоугольниках, охватывающих прямоугольник Q . При этом применяются результаты работы ([10] теорема 3) по Гельдеровости обобщенного решения. Следовательно, получаем оценку (2.14) в $\bar{Q}$. $\square$

А оценки для старших производных получим по результатам для линейных уравнений [11, 12].

Теорема 2.3. Пусть коэффициенты уравнения

$$\tilde{a}(t, y) v_{yy} + \tilde{b}(t, y) v_y + \tilde{c}(t, y) v - v_t = \tilde{f}(t, y), \quad (t, y) \in Q, \quad (2.17)$$

удовлетворяют условиям Гельдера

$$|\tilde{a}|_{\gamma}^{\bar{Q}} + |\tilde{b}|_{\gamma}^{\bar{Q}} + |\tilde{c}|_{\gamma}^{\bar{Q}} + |\tilde{f}|_{\gamma}^{\bar{Q}} < \infty, \quad \tilde{a}(t, y) \geq a_0 > 0.$$

Пусть $v(t, y)$ есть решения уравнения (2.17) с $v|_{\Gamma(t=0, y=\pm s_0)} = 0$, $|v|_{2+\gamma}^{\bar{Q}} < +\infty$ и $M = \max_{\bar{Q}} |v(t, y)|$. Тогда

$$|v|_{2+\gamma}^{\bar{Q}} \leq C \left(|\tilde{f}|_{\gamma}^{\bar{Q}} + M \right) \equiv M_7. \quad (2.18)$$

3. Единственность и существования решения

Для доказательства единственности решения используем идеи работы [17].

Выводим интегральное представление эквивалентное к (1.1). Перепишем (1.1) в виде

$$(\varphi(u))_t = (d(u)u_x)_x \quad (3.1)$$

где $\varphi(u) = \int_0^u a(\xi) d\xi$.

Интегрируя уравнение (3.1) по области D с учетом условий (1.2)-(1.6) имеем

$$s(t) - h(t) = 2s_0 + \frac{\mu}{d(0)} \int_{-s_0}^{s_0} \varphi(u_0(\xi)) d\xi - \frac{\mu}{d(0)} \int_{h(t)}^{s(t)} \varphi(u(t, \xi)) d\xi. \quad (3.2)$$

Теорема 3.1. Если справедливы оценки (2.1)-(2.4), (2.18). Тогда решение задачи (1.1)-(1.6) единственно.

Доказательство. Пусть $(h_1(t), s_1(t), u_1(t, x))$ и $(h_2(t), s_2(t), u_2(t, x))$ являются решениями задачи (1.1)-(1.6) и, кроме того,

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \min(s_1(t), s_2(t)), & z_1(t) &= \min(h_1(t), h_2(t)), \\ y_2(t) &= \max(s_1(t), s_2(t)), & z_2(t) &= \max(h_1(t), h_2(t)). \end{aligned}$$

Тогда, с учетом (3.2), имеем

$$\begin{aligned} |s_1(t) - s_2(t)| + |h_1(t) - h_2(t)| &\leq \frac{\mu}{d(0)} \int_{z_1(t)}^{z_2(t)} |\varphi(u_i)| d\xi + \frac{\mu}{d(0)} \int_{y_1(t)}^{y_2(t)} |\varphi(u_i)| d\xi + \\ &\quad \frac{\mu}{d(0)} \int_{z_2(t)}^{y_1(t)} |\varphi(u_1) - \varphi(u_2)| d\xi \quad (3.3) \end{aligned}$$

где u_i ($i = 1, 2$) — решения между $y_1(t)$ и $y_2(t)$ (соответственно $z_1(t)$ и $z_2(t)$).

По теореме 1 получаем

$$|u_1(t, y_1(t)) - u_2(t, y_1(t))| \leq N_1 |s_1(t) - s_2(t)|$$

и

$$|u_1(t, z_1(t)) - u_2(t, z_1(t))| \leq N_2 |h_1(t) - h_2(t)|.$$

Рассмотрим функцию $U(t, x) = u_1(t, x) - u_2(t, x)$. Тогда для $U(t, x)$ получим уравнение с ограниченными коэффициентами и задачу

$$\begin{cases} b_1(t, x)U_t = b_2(t, x)U_{xx} + b_3(t, x)U_x + b_4(t, x)U, & (t, x) \in D, \\ U(0, x) = 0, & -s_0 \leq x \leq s_0, \\ U(t, y_1(t)) \leq N_1 \max_{0 \leq \eta \leq t} |s_1(\eta) - s_2(\eta)|, & t \geq 0, \\ U(t, z_1(t)) \leq N_2 \max_{0 \leq \eta \leq t} |h_1(\eta) - h_2(\eta)|, & t \geq 0, \end{cases}$$

где коэффициенты уравнения непрерывные и ограниченные функции.

Отсюда по принципу максимума

$$|U(t, x)| \leq N_1 \max_{0 \leq \eta \leq t} |s_1(\eta) - s_2(\eta)| + N_2 \max_{0 \leq \eta \leq t} |h_1(\eta) - h_2(\eta)|.$$

В силу ограниченности функций $u(t, x)$, $a(u)$, $a'(u)$ оценим составляющие формулы (3.3):

$$I_1 = \frac{\mu}{d(0)} \int_{z_1(t)}^{z_2(t)} |\varphi(u_i)| d\xi \leq M_7 |z_2(t) - z_1(t)| \max_{0 \leq \eta \leq t} |h_1(\eta) - h_2(\eta)| \leq M_7 \max_{0 \leq \eta \leq t} |h_1(\eta) - h_2(\eta)|^2,$$

$$I_2 = \frac{\mu}{d(0)} \int_{y_1(t)}^{y_2(t)} |\varphi(u_i)| d\xi \leq M_8 |y_2(t) - y_1(t)| \max_{0 \leq \eta \leq t} |s_1(\eta) - s_2(\eta)| \leq M_8 \max_{0 \leq \eta \leq t} |s_1(\eta) - s_2(\eta)|^2,$$

$$I_3 = \frac{\mu}{d(0)} \int_{z_2(t)}^{y_1(t)} |\varphi(u_1) - \varphi(u_2)| d\xi.$$

Далее, используя идеи и результат [9, 18], доказательство теоремы завершается. □

Существование решения.

Теорема 3.2. Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда существует в D решение $u(t, x) \in C^{2+\gamma}(\overline{D})$, $s(t) \in C^{1+\gamma}([0, T])$, $h(t) \in C^{1+\gamma}([0, T])$ задачи (1.1)-(1.6).

Доказательство. Для доказательства разрешимости нелинейной задачи можно воспользоваться различными теоремами из теории нелинейных уравнений, помня, что для нее справедлива теорема единственности классического решения. Воспользуемся принципом Лере-Шаудера [12], установленным по априорным оценкам $\|\cdot\|_{1+\alpha}$ для всех возможных решений нелинейных задач, и теоремой о разрешимости в классах Гёльдера для линейных задач.

Более подробное изложение методики можно найти, например, в (Раздел VI, [11]; Раздел VII, [12]). $\square$

Список литературы

- [1] Adriana C. Briozzo.: Free boundary problem governed by a non-linear diffusion-convection equation with Neumann condition Jour. of Math. Anal. and Appl., 54 (2), 129461 (2025)
- [2] Briozzo, A., Tarzia, D.: A free boundary problem for a diffusion-convection equation. Int. J. Non-Linear Mech. 120, 103394 (2020). <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2019.103394>
- [3] Cannon, J. R.: The One-Dimensional Heat Equation. Cambridge: CUP, (1984). 500 pp.
- [4] Crank, J.: Free and Moving Boundary Problem. Oxford (1984). 425 pp.
- [5] Du, Y., Lin Zh.: Spreading-vanishing dichotomy in the diffusive logistic model with a free boundary. SIAM J. Math. Anal. 42, 377-405 (2010). <https://doi.org/10.1137/090771089>
- [6] Du, Y., Li, B.: Spreading and vanishing in nonlinear diffusion problems with free boundaries. J. Eur. Math. Soc. 17, 2673-2724 (2015). <https://doi.org/10.4171/JEMS/568>
- [7] Friedman, A.: Free boundary problems arising in biology. Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B 23 (1), 193-202 (2016). <https://doi.org/10.3934/dcdsb.2018013>
- [8] Gupta, S. C.: The Classical Stefan Problem: Basic concepts, modelling and analysis with quasi-analytical solutions and methods. Elsevier (2017). 717 pp.
- [9] Gu, H., Lin, Z. G., Lou, B. D.: Long time behavior for solutions of Fisher-KPP equation with advection and free boundaries. J. Funct. Anal. 269, 1714-1768 (2015). <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2015.07.002>
- [10] Kruzhkov, S. N.: Nonlinear parabolic equations with two independent variables. Tr. Mosk. Mat. Obs. 16, 329-346 (1967). (In Russian)
- [11] Friedman, A.: Partial Differential Equations of Parabolic Type. Mir, Moscow (1964). 428 pp. (In Russian)
- [12] Ladyzhenskaya, O. A., Solonnikov, V. A., Uraltseva, N. N.: Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type. Nauka, Moscow (1967). 736 pp. (In Russian)
- [13] Meirmanov, A.: Stefan Problem. Nauka, Novosibirsk (1986). 240 pp. (In Russian)
- [14] Meirmanov, A. M., Galtsev, O. V., Galtseva, O. A.: On the existence of a classical solution in the whole time for a free boundary problem. Sib. Math. J. 60 (2), 419-428 (2019). <https://doi.org/10.1134/S0037446619020137>
- [15] Pan, H., Xu, R., Hu, B.: A free boundary problem with two moving boundaries modeling grain hydration. Nonlinearity 31, 3591-3616 (2018). <https://doi.org/10.1088/1361-6544/aabf04>
- [16] Rasulov, M. S.: Problem for a quasilinear parabolic equation with two free boundaries. Uzbek Math. J. 2, 89-102 (2019). <https://doi.org/10.29229/uzmj.2019-2-11>
- [17] Takhirov, J. O.: A free boundary problem for a reaction-diffusion equation in biology. Indian J. Pure Appl. Math. 50, 95-112 (2019). <https://doi.org/10.1007/s13226-019-0309-8>
- [18] Takhirov, J. O., Rasulov, M. S.: Problem with free boundary for systems of equations of reaction-diffusion type. Ukr. Math. J. 69, 1968-1980 (2018). <https://doi.org/10.1007/s11253-018-1481-4>
- [19] Takhirov J. O., Rasulov M. S., Norov A. Q.: On a Mathematical Model with a Free Boundary of the Dynamics of Diffuse Infection with an Immune Response. Lobachevskii Journal of Mathematics 45 (8), 3986-3996 (2024).
- [20] Takhirov, Zh. O., Turaev, R. N.: Nonlocal Stefan problem for a quasilinear parabolic equation. Vestn. Samar. Gos. Tekh. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki 60 (28), 8-16 (2012). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1010> (In Russian)
- [21] Takhirov J. O., Umirkhonov M. T.: On a free boundary problem for the relaxation transfer equation. Theoretical and Mathematical Physics, 209 (1), 1473-1489 (2021).
- [22] Wang, R., Wang, L., Wang, Zh.: Free boundary problem of a reaction-diffusion equation with nonlinear convection term. J. Math. Anal. Appl. 467, 1233-1257 (2018). <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2018.07.065>

Free Boundary Problem for a Nonlinear Diffusion Equation

Rasulov Mirojiddin Sobirjonovich and Umirkhonov Masudkhon Turakhon ugli

Abstract

In this paper, a Stefan-type problem with two free boundaries for a nonlinear heat equation in the one-dimensional case is considered. The study of nonlinear problems with free boundaries is carried out using a method based on constructing a priori estimates. In this regard, some initial a priori estimates are first established for solving the problem under consideration. Then, the problem is reduced to a problem with a fixed boundary through a change of variables. The resulting problem has time- and position-dependent coefficients with nonlinear terms. Next, a priori estimates of the Schauder type are constructed for solving the equation with nonlinear terms and a fixed boundary. Based on the estimates obtained, the solvability of the original problem is established.

Affiliations

Rasulov Mirojiddin Sobirjonovich

Address: V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, 9 University str., Tashkent, 100174, Uzbekistan.

"TIIAME"National Research University, 39 Kori Niyozov str., Tashkent, 100000, Uzbekistan.

e-mail: rasulovms@bk.ru

ORCID ID: 0000-0003-0704-6012

Umirkhonov Masudkhon Turaxon ugli

Address: Tashkent State University of Economics, 49, Islom Karimov str., Tashkent, 100066, Uzbekistan.

e-mail: m.umixonov@tsue.uz

ORCID ID: 0009-0003-9440-3440

Multiple Turing and Andronov-Hopf Bifurcations in a Reaction-Diffusion System

Yumagulov Marat* Gabdrakhmanov Robert

ABSTRACT

This paper investigates the problem of local bifurcations in the vicinity of spatially homogeneous equilibrium states of reaction-diffusion systems in a bounded domain with homogeneous Neumann boundary conditions. The main results focus on studying Turing bifurcation and Andronov-Hopf bifurcation under conditions of multiple degeneracy in the linearized system. In the considered case the codimension of the bifurcation does not match the multiplicity of eigenvalues of the corresponding linear operators, which significantly complicates the analysis. The paper provides a detailed examination of cases leading to multiple bifurcations, establishes conditions for multiple degeneracy, and develops approaches for studying stability and bifurcations near equilibrium states under these conditions. The key result consists of the investigation and characterization of the solution manifold structure arising from bifurcations in reaction-diffusion systems. Potential directions for extending these results of the study of multiple bifurcations are also discussed.

Keywords: reaction-diffusion, equilibrium state, stability, bifurcation, Turing, Andronov-Hopf

AMS Subject Classification (2020): Primary: 35B32, 35K57, 37G15; Secondary: 35P05, 37C20.

1. Introduction and Problem Statement

A large portion of works is usually devoted to the study of reaction-diffusion systems due to their wide range of applications (see, for example, [1]-[3] and the bibliography therein). One of the most important research directions for such systems is the study of critical phenomena and associated bifurcations leading to the emergence of dissipative structures (Turing bifurcation) and autowave processes (Andronov-Hopf bifurcation) in the vicinity of equilibrium positions. The emergence of such solutions is related to the fact that the eigenvalues of the corresponding linearized system cross the imaginary axis: through the value $\lambda = 0$ for dissipative structures and through $\lambda = i\omega$ (where $\omega \neq 0$) for autowaves.

The wavenumbers corresponding to these bifurcations often result in the linear operator having eigenvalues whose multiplicity does not coincide with the bifurcation's codimension. Appearance of such situations significantly complicates the application of standard bifurcation analysis methods. Typically, known works on bifurcations in reaction-diffusion systems focus on cases where the multiplicity of eigenvalues and the codimension of bifurcations coincide [4]-[10]. The study of situations where the multiplicity of eigenvalues and the bifurcation codimension differ remains a poorly explored topic. This work discusses some aspects of Turing and Andronov-Hopf bifurcations in such situations.

The main object of study is the reaction-diffusion system (see, for example, [2]-[10]), described by the differential equation

$$\frac{dw}{dt} = A(\mu)w + D\Delta w + h(w), \quad w \in R^N, \quad (1.1)$$

where $A(\mu)$ is the Jacobian matrix smoothly depending on the parameter μ , D is a non-zero diffusion matrix with non-negative elements, Δ is the Laplace operator: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_m^2}$, and the nonlinearity $h(w)$ satisfies the relation: $\|h(w)\| = o(\|w\|)$ as $w \rightarrow 0$. Equation (1.1) is studied in the parallelepiped

$$\Omega = \{x : 0 \leq x_1 \leq \pi, 0 \leq x_2 \leq \pi, \dots, 0 \leq x_m \leq \pi\}.$$

Neumann boundary conditions are considered:

$$\left. \frac{\partial w}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = 0. \quad (1.2)$$

The system (1.1)-(1.2) has a stationary zero solution $w = 0$; it is a solution to the boundary value problem

$$A(\mu)w + D\Delta w + h(w) = 0, \quad \left. \frac{\partial w}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = 0. \quad (1.3)$$

2. Basic Concepts and Notation

Let $L_2(\Omega)$ denote the Hilbert space of functions $v(x)$ defined on Ω , and $W_2^2(\Omega)$ the Sobolev space with the norm

$$\|v(x)\|_{W_2^2} = \left(\int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq 2} \|D^\alpha v\|^2 dx \right)^{1/2};$$

here D^α is the differentiation operator: $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m$, $\|\cdot\|$ is the Euclidean norm in R^n . Let $C(\Omega)$ and $C^2(\Omega)$ denote the spaces of continuous and twice continuously differentiable functions, respectively. Define also the set

$$C_0^2(\Omega) = \left\{ v \in C^2 : \left. \frac{\partial v}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = 0 \right\}.$$

The Laplace operator $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_m^2} : C_0^2 \rightarrow C$ can be (see, for example, [5]) extended to a closed self-adjoint operator $\Delta : L_2 \rightarrow L_2$ with the domain G_0 , formed by the closure of $C_0^2(\Omega)$ in W_2^2 . The spectrum of the operator Δ consists of isolated eigenvalues $\lambda = -k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_m^2$ of finite multiplicity (k_i are non-negative integers).

Solutions of the system (1.1)-(1.2) are functions $w(x, t)$ that:

- for each fixed value of t are elements of the space $W_2^2(\Omega)$;
- for each fixed value of $x \in \Omega$ are continuously differentiable functions of t ;
- satisfy equation (1.1) and boundary conditions (1.2) for all $t \geq 0$ and $x \in \Omega$.

An equilibrium point $w = v_0(x)$ of the system (1.1)-(1.2) is called (see, for example, [3]-[4]) *Lyapunov stable* if for every $\varepsilon > 0$ there exists $\delta > 0$ such that if $\|u_0(x) - v_0(x)\|_{W_2^2} < \delta$, then the solution $w(x, t)$ of the system (1.1)-(1.2) satisfies the inequality $\|w(x, t) - v_0(x)\|_{W_2^2} < \varepsilon$ for all $t > 0$; here $w(x, t)$ is the solution

of the Cauchy problem for the system (1.1)-(1.2) with the initial condition $w(x, 0) = u_0(x)$. If, in addition, $\|w(x, t) - v_0(x)\|_{W_2^2} \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$, then the equilibrium point $w = v_0(x)$ is called *asymptotically stable*.

The stability of the zero equilibrium point $w = 0$ of the system (1.1)-(1.2) is determined by the properties of the spectrum of the linear operator

$$S(\mu) = A(\mu) + D\Delta : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega), \quad (2.1)$$

with a domain G_0 dense in $L_2(\Omega)$. The operator (2.1) is closed, its spectrum is discrete, consisting of isolated eigenvalues of finite multiplicity (see, for example, [11]). If all eigenvalues of the operator (2.1) have negative real parts, then the equilibrium point $w = 0$ of the system (1.1)-(1.2) is asymptotically stable. If this operator has an eigenvalue with a positive real part, then the equilibrium point $w = 0$ will be unstable. Accordingly, if the operator (2.1) for some $\mu = \mu_0$ has an eigenvalue with a zero real part, then μ_0 will be a bifurcation point.

We say that the value $\mu = \mu_0$ is a *Turing bifurcation point* of the system (1.1)-(1.2) if the operator $S(\mu_0)$ has an eigenvalue $\lambda = 0$, while its other eigenvalues have negative real parts.

We say that the value $\mu = \mu_0$ is an *Andronov-Hopf bifurcation point* of the system (1.1)-(1.2) if the operator $S(\mu_0)$ has a pair of purely imaginary eigenvalues $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, while its other eigenvalues have negative real parts.

Remark 2.1. The requirement that the other eigenvalues of the operator $S(\mu_0)$ have negative real parts is related to the following circumstance. If we allow the operator $S(\mu_0)$ to have an eigenvalue with a positive real part, then the dissipative structures or autowaves arising from the bifurcation will be inherently unstable. Note, in particular, that a necessary condition for both types of bifurcations is the requirement that the matrix $A(\mu_0)$ be stable. A discussion of these issues is given in [6, 11].

Note the validity of the following statements (see, for example, [9, 10]).

Lemma 2.1. *The Turing bifurcation for the system (1.1)-(1.2) is possible only for $N \geq 2$.*

Lemma 2.2. *The Andronov-Hopf bifurcation for the system (1.1)-(1.2) is possible only for $N \geq 3$.*

3. Auxiliary Matrices

Below, a real square matrix B will be called *stable* if all its eigenvalues have negative real parts.

The set of eigenvalues of the operator (2.1) coincides with the set of eigenvalues of the matrices

$$B_k(\mu) = A(\mu) - \left(k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_m^2\right) D, \quad (3.1)$$

where k_j are non-negative integers, and k denotes the multi-index $k = k_1, k_2, \dots, k_m$. If all these matrices are stable, then the equilibrium point $w = 0$ will be an asymptotically stable solution of the system (1.1)-(1.2). If at least one of the matrices (3.1) has an eigenvalue with a positive real part, then the equilibrium point $w = 0$ will be unstable.

The concepts of Turing and Andronov-Hopf bifurcations can be reformulated using the matrices (3.1). Define the numbers

$$\rho_k = k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_m^2. \quad (3.2)$$

We say that the value $\mu = \mu_0$ is a *Turing bifurcation point* of the system (1.1)-(1.2) if:

T1) for some multi-index $k^0 = k_1, k_2, \dots, k_m$, the matrix $B_0 = B_{k^0}(\mu_0)$ has an eigenvalue $\lambda = 0$, while the other eigenvalues of the matrix B_0 have negative real parts;

T2) the matrices $B_k(\mu_0)$ for $k \neq k^0$ are stable.

We say that the value $\mu = \mu_0$ is an *Andronov-Hopf bifurcation point* of the system (1.1)-(1.2) if:

H1) for some multi-index $k^0 = k_1, k_2, \dots, k_m$, the matrix $B_0 = B_{k^0}(\mu_0)$ has a pair of purely imaginary eigenvalues $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, while the other eigenvalues of the matrix B_0 have negative real parts;

H2) the matrices $B_k(\mu_0)$ for $k \neq k^0$ are stable.

The Turing bifurcation scenario is associated with the fact that as the parameter μ passes through μ_0 , non-zero spatially inhomogeneous equilibrium points $w = w(x, \mu)$ arise in the system (1.1) in the vicinity of the equilibrium point $w = 0$. Correspondingly, the Andronov-Hopf bifurcation scenario is associated with the fact that as the parameter μ passes through μ_0 , non-stationary periodic solutions $w = w(x, t, \mu)$ arise in the system (1.1) in the vicinity of the equilibrium point $w = 0$.

4. Properties of the Set of Numbers (3.2)

Comparing the above definitions of bifurcation points, based on the properties of the operator $S(\mu)$ defined by (2.1) and the matrices $B_k(\mu)$ defined by (3.1), leads to the following question. Let λ_0 be an eigenvalue of the matrix $B_{k^0}(\mu_0)$ for some multi-index $k^0 = k_1, k_2, \dots, k_m$. Then λ_0 will also be an eigenvalue of the operator $S(\mu_0)$. But will the multiplicity of this eigenvalue be the same for both operators?

To discuss this question, we introduce the following notations:

- Z_+ is the set of non-negative integers;
- $Z_0(m)$ is the set of numbers of the form (3.2);
- $Z_1(m)$ is the set of numbers $\rho \in Z_0(m)$ for which there exists a unique multi-index $k = k_1, k_2, \dots, k_m$ such that $\rho = k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_m^2$;
- $Z_2(m)$ is the set of numbers $\rho \in Z_0(m)$ for which there exist two or more multi-indices $k = k_1, k_2, \dots, k_m$ such that $\rho = k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_m^2$;
- $Z(m) = \{\rho : \rho = mj^2, j = 0, 1, 2, \dots\}$.

By construction, we have:

$$Z_1(m) \cup Z_2(m) = Z_+, \quad Z_1(m) \cap Z_2(m) = \emptyset, \quad Z(m) \subset Z_0(m).$$

The following inclusions hold:

$$Z_1(m) \subset Z(m), \tag{4.1}$$

$$Z_0(m) \neq Z_+ \text{ for } 1 \leq m \leq 3, \quad Z_0(m) = Z_+ \text{ for } m \geq 4. \tag{4.2}$$

The equality in (4.2) follows from Lagrange's theorem on the representability of any natural number as a sum of four squares.

Let us discuss the properties of the sets $Z_1(m)$ and $Z_2(m)$ for various m . We have:

$$\begin{aligned} m = 1 &\Rightarrow Z_1(m) = Z(m) = \{0, 1, 4, 9, \dots, k^2, \dots\}, \quad Z_2(m) = \emptyset; \\ m = 2 &\Rightarrow Z_1(m) = \{0, 2, 8, 18, 32, 72, 98, 128, 162, \dots\}, \quad Z_2(m) = \{1, 3, 4, 5, \dots\}; \\ m = 3 &\Rightarrow Z_1(m) = \{0, 3, 12, \dots\}, \quad Z_2(m) = \{1, 2, 4, 5, \dots\}; \\ m \geq 4 &\Rightarrow Z_1(m) = \{0\}; \quad Z_2(m) = Z_+ / \{0\} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}. \end{aligned}$$

The properties of the sets $Z_1(m)$ and $Z_2(m)$ show that if the matrix $B_{k^0}(\mu_0)$ has an eigenvalue of multiplicity l , and the other matrices $B_k(\mu_0)$ for $k \neq k^0$ do not have the eigenvalue λ_0 , then the operator $S(\mu_0)$ also has the eigenvalue λ_0 , whose multiplicity coincides with l (or rl), if $\rho \in Z_1(m)$ (or if $\rho \in Z_2(m)$ and ρ is representable in r different ways).

From this, the following statements follow:

Lemma 4.1. Let $\rho_0 \in Z_1(m)$ and let k^0 be the corresponding unique multi-index. Let λ_0 be an eigenvalue of the matrix (3.1) for the multi-index k^0 . Let, finally, the matrices (3.1) for other multi-indices not have the eigenvalue λ_0 . Then the operator (2.1) has the eigenvalue λ_0 with the same algebraic and geometric multiplicity as the matrix (3.1) for the multi-index k^0 .

Lemma 4.2. Let $\rho_0 \in Z_2(m)$ and let it correspond to exactly two different multi-indices k^0 and l^0 . Let λ_0 be an eigenvalue of the matrix (3.1) for the multi-index k^0 (or, equivalently, for the multi-index l^0), with algebraic and geometric multiplicities ν and κ , respectively. Let, finally, the matrices (3.1) for other multi-indices not have the eigenvalue λ_0 . Then the operator (2.1) has the eigenvalue λ_0 with algebraic and geometric multiplicities 2ν and 2κ , respectively.

Similar statements hold in situations where the number $\rho_0 \in Z_2(m)$ corresponds to more than two different multi-indices.

By Lemmas 4.1 and 4.2, in the bifurcation problem, the multiplicity of the eigenvalues of the operator (2.1) and the codimension of the corresponding bifurcations may not coincide for $m \geq 2$. To illustrate this fact, consider the case $m = 2$. Suppose that for some multi-index $k^0 = k_1, k_2$ such that $k_1 \neq k_2$ (then the corresponding $\rho = k_1^2 + k_2^2 \in Z_2(m)$), the matrix $B_0 = B_{k^0}(\mu_0)$ has a simple eigenvalue $\lambda = 0$. Let the other eigenvalues of the matrix B_0 and all other matrices $B_k(\mu_0)$ for $k \neq k^0$ and $|k| \neq k_1^2 + k_2^2$ have negative real parts. Then μ_0 is a Turing bifurcation point of the system (1.1)-(1.2). In this case, the codimension of the bifurcation is one. However, the multiplicity of the eigenvalue $\lambda = 0$ of the operator $S(\mu_0)$ will be greater than or equal to two.

Note that for $m = 1$, the multiplicity of the eigenvalues of the operator (2.1) and the codimension of the corresponding bifurcations coincide.

5. Main Result

Let us discuss the bifurcation problem in the system (1.1)-(1.2) in the case when the multiplicity of the eigenvalues of the operator $S(\mu_0)$ and the codimension of the bifurcation do not coincide. We will limit ourselves to considering the Turing bifurcation problem. For the Andronov-Hopf bifurcation problem, the reasoning is similar. For simplicity, let $m = 2$.

Let μ_0 be a Turing bifurcation point of the system (1.1)-(1.2), i.e., the following conditions hold:

P1 The matrix $B_0 = B_{k^0}(\mu_0)$ for some multi-index $k^0 = k_0, l_0$ has a simple eigenvalue $\lambda = 0$, with $\rho = k_0^2 + l_0^2 \in Z_2(m)$, $k_0 \neq l_0$, and the number ρ corresponds to exactly two different multi-indices $k^0 = (k_0, l_0)$ and $l^0 = (l_0, k_0)$. Let the other eigenvalues of the matrix B_0 and all other matrices $B_k(\mu_0)$ for $k \neq k^0$ and $k \neq l^0$ have negative real parts.

Then the operator $S(\mu_0)$ has an eigenvalue $\lambda = 0$ of multiplicity 2. Let e_0 and e_0^* be the eigenvectors of the matrix $B_{k^0}(\mu_0)$ and the transposed matrix $B_{k^0}^*(\mu_0)$, respectively. The corresponding eigenvectors of the operator $S(\mu_0)$ and the adjoint operator $S^*(\mu_0)$ will be the functions

$$\begin{cases} u_0 = e_0 \cos k_0 x \cos l_0 y; & u_0^* = e_0^* \cos k_0 x \cos l_0 y; \\ v_0 = e_0 \cos l_0 x \cos k_0 y; & v_0^* = e_0^* \cos l_0 x \cos k_0 y. \end{cases} \quad (5.1)$$

We can assume that $\mu_0 = 0$. Let E^c denote the two-dimensional subspace in $L_2(\Omega)$ whose basis consists of the functions u_0 and v_0 .

Along with (1.1), we will also consider the extended system

$$\begin{cases} w_t' = A(\mu)w + D\Delta w + h(w), \\ \mu_t' = 0, \end{cases} \quad (5.2)$$

Let Λ denote the one-dimensional subspace of the parameter μ . Define two linear spaces

$$H = \{(w, \mu) : w \in L_2, \mu \in \Lambda\}, \quad E_\mu^c = \{(w, \mu) : w \in E^c, \mu \in \Lambda\};$$

E_μ^c is a three-dimensional subspace of the space H .

According to the central manifold theorem (see, for example, [12]), under condition P1, the system (5.2) in the space H has a three-dimensional smooth manifold U with the properties:

- 1) The manifold U contains the point $(0, \mu_0)$.
- 2) The manifold U is tangent to the subspace E_μ^c at the point $(0, \mu_0)$.
- 3) The manifold U contains all equilibrium points and periodic orbits of the system (5.2), provided their trajectories lie in a small neighborhood of the point $(0, \mu_0)$. The manifold U is called the central manifold of the system (5.2).

The bifurcation solutions of the system (1.1) arising under condition P1 form (locally in the neighborhood of the point $(0, \mu_0)$) a two-dimensional smooth manifold U_c located on the manifold U . The manifold U_c can be represented as a family of continuous branches of bifurcation solutions of the system (1.1), which can be described by the following parametrically defined functions

$$\begin{cases} w = w^*(\varepsilon) = \varepsilon e_1(x, y) + \varepsilon^2 e_2(x, y) + \dots, \\ \mu = \mu(\varepsilon) = \mu_0 + \varepsilon \mu_1 + \varepsilon^2 \mu_2 + \dots, \end{cases} \quad (5.3)$$

where ε is an auxiliary small parameter. The function $e_1(x, y)$ can be any function from E^c of the form

$$e_1(x, y) = (C_1 \cos k_0 x \cos l_0 y + C_2 \cos l_0 x \cos k_0 y) e_0, \quad (5.4)$$

where the constants C_1 and C_2 are chosen such that $\|C_1 \cos k_0 x \cos l_0 y + C_2 \cos l_0 x \cos k_0 y\|_{L_2} = 1$. The other coefficients in (5.3) can be uniquely determined from the function (5.4). The scheme for constructing these coefficients will be indicated below.

Theorem 5.1. *Let condition P1 be satisfied. Suppose the system (1.1) has a continuous branch of bifurcation solutions (5.3), where $e_1(x, y)$ is the function (5.4). Then the system (1.1) has a family of continuous branches of bifurcation solutions of the form*

$$\begin{cases} w = \tilde{w}^*(\varepsilon) = \varepsilon \tilde{e}_1(x, y) + \varepsilon^2 \tilde{e}_2(x, y) + \dots, \\ \mu = \mu(\varepsilon) = \mu_0 + \varepsilon \mu_1 + \varepsilon^2 \mu_2 + \dots, \end{cases} \quad (5.5)$$

where

$$\tilde{e}_1(x, y) = e_1(x, y) = (C_1 \cos l_0 x \cos k_0 y + C_2 \cos k_0 x \cos l_0 y) e_0,$$

and the other coefficients of the function $\tilde{w}^*(\varepsilon)$ can be obtained by a symmetric transformation of the corresponding coefficients of the function $w^*(\varepsilon)$ (namely, by permuting the numbers k_0 and l_0 in them).

The validity of this statement follows from the constructions given below.

Note that in (5.3) and (5.5), the second functions coincide.

Thus, to construct the two-dimensional manifold U_c of bifurcation solutions of the system (5.2), it is sufficient to construct one continuous branch of solutions of the form (5.3). We will indicate a method for constructing such a branch of solutions.

The Turing bifurcation problem for the system (1.1)-(1.2) leads to the need to study the problem (1.3). Since the matrix D is invertible, the problem (1.3) is equivalent to the nonlinear Neumann problem

$$\Delta w = -D^{-1}[A(\mu)w + h(w)], \quad \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial \Omega} = 0, \quad (5.6)$$

which, in turn, is equivalent to the operator equation

$$w = T(\mu)w + b(w, \mu), \quad (5.7)$$

where

$$T(\mu)w(x) = \int_{\Omega} G(x, y)K(\mu)w(y) dy, \quad b(w(x)) = \int_{\Omega} G(x, y)D^{-1}h(w(y)) dy; \quad (5.8)$$

here $K(\mu) = D^{-1}A(\mu)$, and $G(x, y)$ is the Green's function of the Neumann problem (5.6).

The operators (5.8) act and are completely continuous in the space L_2 , with the following properties:

- The linear operator $T(\mu_0)$ has an eigenvalue $\lambda = 1$ of multiplicity 2;
- The nonlinear operator $b(w(x))$ satisfies the relation $\|b(w(x))\|_{L_2} = O(\|w(x)\|_{L_2}^2)$ as $\|w(x)\|_{L_2} \rightarrow 0$.

By construction, the bifurcation problem for the operator equation (5.7) has the peculiarity that the codimension of the bifurcation is one, while the multiplicity of the eigenvalue $\lambda = 0$ of the operator $T(\mu_0)$ is two. Therefore, standard bifurcation analysis methods do not apply here. The following scheme is proposed for constructing bifurcation solutions of equation (5.7). Introduce an additional parameter ν into equation (1.3), i.e., consider the equation

$$A(\mu)w + \nu D\Delta w + h(w) = 0, \quad \left. \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega} = 0. \quad (5.9)$$

For $\nu = \nu_0 = 1$, equation (5.9) coincides with equation (1.3). Then equation (5.7) takes the form

$$w = T(\mu, \nu)w + b(w, \mu), \quad (5.10)$$

where

$$T(\mu, \nu)w(x) = \int_{\Omega} G(x, y)K(\mu, \nu)w(y) dy,$$

here $K(\mu, \nu) = \frac{1}{\nu}D^{-1}A(\mu)$. To study this equation, one can use the methods for investigating multiparameter bifurcations [13, 14]. In this case, any function (5.4) can be chosen as the bifurcation direction. Then, according to the scheme described in [13, 14], a continuous branch of bifurcation solutions of the system is uniquely determined:

$$\begin{cases} w = w^*(\varepsilon) = \varepsilon e_1(x, y) + \varepsilon^2 e_2(x, y) + \dots, \\ \mu = \mu(\varepsilon) = \mu_0 + \varepsilon \mu_1 + \varepsilon^2 \mu_2 + \dots, \\ \nu = \nu(\varepsilon) = \nu_0 + \varepsilon \nu_1 + \varepsilon^2 \nu_2 + \dots, \end{cases}$$

where ε is an auxiliary small parameter. In this branch, the coefficients of the functions $\mu(\varepsilon)$ and $\nu(\varepsilon)$ are uniquely determined by the chosen function (5.4). It can be shown that the function (5.4) can be chosen such that any finite number of coefficients $\nu_1, \nu_2 \dots$ of the function $\nu(\varepsilon)$ are zeroed, which is sufficient for constructing a continuous branch of bifurcation solutions (5.3) of the original system (1.1) with the required accuracy.

Acknowledgements

We would like to thank ...

Funding

This work is supported by ...

Availability of data and materials

Not applicable.

Competing interests

The authors declare that they have no competing interests.

Author's contributions

All authors contributed equally to the writing of this paper. All authors read and approved the final manuscript.

References

- [1] Svirezhev, Yu. M.: Nonlinear Waves, Dissipative Structures and Catastrophes in Ecology. Nauka, Moscow (1987).
- [2] Murray, J. D.: Mathematical Biology. Volume 1: An Introduction, Regular and Chaotic Dynamics. Izhevsk (2009).
- [3] Bratus, A. S., Novozhilov, A. S., Platonov, A. P.: Dynamical Systems and Models in Biology. Fizmatlit, Moscow (2010).
- [4] Magnitskii, N. A.: Theory of Dynamical Chaos. URSS, Moscow (2011).
- [5] Hassard, B., Kazarinoff, N., Wan, Y.: Theory and Applications of Hopf Bifurcation. Mir, Moscow (1985).
- [6] Yumagulov, M. G., Vasenina, N. A., Gabdrakhmanov, R. I.: *Operator Methods for Studying Stability and Bifurcations in Reaction-Diffusion Systems and Their Applications*. Differ. Equ. **61** (4), 545–562 (2025).
- [7] Abushahmina, G. R., Gusarova, N. I., Yumagulov, M. G.: *Lyapunov Quantities for the Andronov-Hopf Bifurcation Problem in Reaction-Diffusion Systems*. Lobachevskii J. Math. **42** (15), 3567–3573 (2021). <https://doi.org/10.1134/S1995080222030027>
- [8] Yumagulov, M. G., Sidelnikova, N. A.: *Reaction-Diffusion Systems: Stability and Bifurcation Criteria*. Bull. Bashkir Univ. **28** (4), 303–309 (2023). <https://doi.org/10.33184/bulletin-bsu-2023.4.1>
- [9] Borina, M. Yu., Polezhaev, A. A.: *Diffusion Instability in a Three-Component Reaction-Diffusion Model*. Comput. Res. Model. **3** (2), 135–146 (2011).
- [10] Kuznetsov, M. B.: *Study of Turing Pattern Formation Under the Influence of Wave Instability*. Comput. Res. Model. **11** (3), 397–412 (2019). <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2019-11-3-397-412>
- [11] Yumagulov, M. G., Vasenina, N. A.: *Spectral Properties of Reaction-Diffusion System Operators and Bifurcation Criteria*. Perm Univ. Bull. Math. Mech. Inform. **65** (2), 17–25 (2024). <https://doi.org/10.17072/1993-0550-2024-2-17-25>
- [12] Shilnikov, L. P., Shilnikov, A. L., Turaev, D. V., Chua, L. O.: Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part 2, Institute of Computer Science, Moscow-Izhevsk (2009).
- [13] Yumagulov, M. G.: *Operator Method for Studying Regular Bifurcations in Multiparameter Systems*. Dokl. Akad. Nauk **423** (5), 1–4 (2008). <https://doi.org/10.1134/S1064562409010128>
- [14] Vyshinskii, A. A., Ibragimova, L. S., Murtazina, S. A., Yumagulov, M. G.: *Operator Method for Approximate Study of Regular Bifurcations in Multiparameter Dynamical Systems*. Ufa Math. J. **2** (4), 3–26 (2010).

Affiliations

YUMAGULOV MARAT GAYAZOVICH

ADDRESS: Ufa University of Science and Technology, Department of Differential Equations, 450076, Ufa-Russia.

E-MAIL: yum_mg@mail.ru

ORCID ID:0000-0002-6482-4258

GABDRAKHMANOV ROBERT ILGIZOVICH

ADDRESS: Ufa University of Science and Technology, Department of Differential Equations, 450076, Ufa-Russia.

E-MAIL: gabdrahmanov.robert@gmail.com

ORCID ID:0000-0002-3454-241X

Idempotent probability measures spaces on Π -complete spaces and maps

Sh. Kh. Eshtemirova*

ABSTRACT

In the present paper we establish that for a Tychonoff map $g: X \rightarrow Y$ the induced map $I_f(g): I_f(X) \rightarrow I_f(Y)$ is Π -complete if and only if the given map $g: X \rightarrow Y$ is Π -complete. From here one can conclude that the functor I_f admits lifting to the category of Π -complete space and their Π -complete maps.

Keywords: idempotent measure, Π -complete space, Tychonoff map.

AMS Subject Classification (2020): Primary: 54B20, 54C10.

1. Introduction

In the present paper by a *space* we mean a topological T_1 -space, by a *compact* a Hausdorff compact space and by a *map* a continuous map.

A collection of subsets of a set X is said to be *star-countable* (respectively, *star-finite*) if each element of it intersects at most a countable (respectively, finite) set of elements of it. A collection ω of subsets of a set X *refines* a collection Ω of subsets of X if for each element $A \in \omega$ there is an element $B \in \Omega$ such that $A \subset B$. It is also said that ω is a refinement of Ω . For an element $x \in X$ and a natural number n the inequality $Kp(x, \omega) \leq n$ means that no more than n elements of ω contain x [2, p. 270]. We write $Kp \omega \leq n$ if $Kp(x, \omega) \leq n$ for every $x \in X$.

A finite sequence of subsets $M_0, \dots, M_s$ of a set X is [4] a *chain* in X connecting sets M_0 and M_s , if $M_{i-1} \cap M_i \neq \emptyset$ for $i = 1, \dots, s$. A collection of subsets of a set X is said to be *connected* if for any pair of sets $M, M' \subset X$ there exists a chain in X connecting M and M' . The maximal connected subcollections of ω are called *components* of ω .

A star-finite open cover of a space X is said to be a *finite-component cover* if the number of elements of each component is finite.

For a collection $\omega = \{O_\alpha: \alpha \in A\}$ of subsets of a space X we put

$$[\omega] = [\omega]_X = \{[O_\alpha]_X: \alpha \in A\}.$$

For a space X , its subspace W and a point $x \in X \setminus W$, an open in W cover ω of the space W *pricks out* the point x in X if $x \notin \bigcup [\omega]_X$ [4].

For a Tychonoff space X let βX be its Stone–Čech compactification (i. e. the maximal compact extension).

Definition 1.1. [4] A Tychonoff space X is said to be Π -complete if for every point $x \in \beta X \setminus X$ there exists a finite-component cover of X pricking out the point x in βX (i. e., $x \notin \bigcup [\omega]_{\beta X}$).

Recall the notion of a perfect compactification. For a topological space X and its subset A , a set

$$\text{Fr}_X A = [A]_X \cap [X \setminus A]_X = [A]_X \setminus \text{Int}_X A$$

is called a *boundary* of A . Let νX be a compact extension of a Tychonoff space X . If $H \subset X$ is an open set in X , then by $O(H)$ (or by $O_{\nu X}(H)$) we denote the maximal (by inclusion) open set in νX satisfying $O_{\nu X}(H) \cap X = H$. It is easy to see that

$$O_{\nu X}(H) = \bigcup_{\substack{\Gamma \in \tau_{\nu X}, \\ \Gamma \cap X = H}} \Gamma$$

where $\tau_{\nu X}$ is the topology of the space νX .

A compactification νX of a Tychonoff space X is called *perfect with respect to an open set H in X* if the equality $[\text{Fr}_X H]_{\nu X} = \text{Fr}_{\nu X} O_{\nu X}(H)$ holds. If νX is perfect for every open set in X , then it is called a *perfect compactification* of the space X ([2], p. 232).

A compactification νX of space X is perfect if and only if for any two disjoint open sets U_1 and U_2 in X the equality

$$O(U_1 \cup U_2) = O(U_1) \cup O(U_2)$$

holds [2]. The Stone-Čech compactification βX of a Tychonoff space X is a perfect compactification of X . The equality $O(U_1 \cup U_2) = O(U_1) \cup O(U_2)$ holds for every pair of open sets U_1 and U_2 in X if and only if X is normal, and the compactification νX coincides with the Stone-Čech compactification βX , i. e. $\nu X \cong \beta X$.

The following criterion plays a key role in investigating the class of Π -complete spaces [4, Theorem 1.1, pp. 16–17].

Theorem 1.1. [3] *A Tychonoff space X is Π -complete if and only if for every $x \in bX \setminus X$ of an arbitrary perfect compactification bX there exists an open cover ω of X with $Kp \omega = 1$, pricking out x in bX (i. e. $x \notin \cup[\omega]_{bX}$).*

Since the Stone-Čech compactification βX of a Tychonoff space X is a perfect compactification of X , then Theorem 1.1 implies the following assertion.

Corollary 1.1. *A Tychonoff space X is Π -complete if and only if for every $x \in \beta X \setminus X$ there exists a cover ω of X with $Kp \omega = 1$, pricking out x in βX .*

Note that every compact Hausdorff space is a Π -complete space. The square of the Sorgenfrey line (that is the set of real numbers equipped with the topology generated by sets $[a, b)$, here $-\infty < a < b < +\infty$) is Π -complete, but it is not a paracompact space (hence, it is not a compact Hausdorff space). The space $T(\omega_1)$ of all ordinal numbers less than the first uncountable ordinal number ω_1 is a normal space but it is not Π -complete.

Let us list some known properties of Π -complete spaces.

1. A closed subset of a Π -complete space is Π -complete ([4], p. 19).
2. If $f: X \rightarrow Y$ is a perfect map in a Π -complete space Y then X is also Π -complete ([4], p. 26).

The author of [5] observed the functor $I: \mathfrak{Comp} \rightarrow \mathfrak{Comp}$ and showed that it is normal. Then in [7] using the construction suggested by A.Ch. Chigogidze [6], it was obtained an extension $I_\beta: \mathfrak{Tych} \rightarrow \mathfrak{Tych}$. Here, the sign $\mathfrak{Comp}$ means the category of compact Hausdorff spaces and their continuous maps, and $\mathfrak{Tych}$ the category of Tychonoff spaces and their continuous maps.

For a compact Hausdorff space X an idempotent probability measure on X is defined [5] as a functional $\mu: C(X) \rightarrow \mathbb{R}$ that satisfies the following conditions:

- 1) $\mu(c_X) = c$ for every constant function $c_X: X \rightarrow \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$. Here $c_X(x) = c$;

2) $\mu(c \odot \varphi) = c \odot \mu(\varphi)$, $c \in \mathbb{R}$, $\varphi \in C(X)$. Here $c \odot \varphi = c + \varphi$;

3) $\mu(\varphi \oplus \psi) = \mu(\varphi) \oplus \mu(\psi)$, $\varphi, \psi \in C(X)$. Here $\varphi \oplus \psi = \max\{\varphi, \psi\}$.

A set of all idempotent probability measures on X is denoted by $I(X)$. It is endowed with the topology τ_p of pointwise convergence. For $\mu \in I(X)$ sets

$$\langle \mu; \varphi_1, \dots, \varphi_n; \theta \rangle = \{ \nu \in I(X) : |\nu(\varphi_i) - \mu(\varphi_i)| < \theta, i = 1, \dots, n \}$$

forms a base of the pointwise convergence topology in $I(X)$ at μ . Here $\varphi, \dots, \varphi_n \in C(X)$, $\theta > 0$.

Note that a function $f: X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ is said to be an *upper semi-continuous* if for each $x \in X$ and for every real number r that satisfies $f(x) < r$, there exists an open neighborhood $U \subset X$ of x such that $f(x') < r$ for all $x' \in U$.

Now we consider a compact Hausdorff space X , and put

$$USC_0(X) = \left\{ f: X \rightarrow [-\infty, 0] \mid f \text{ is an upper semi-continuous function such that} \right. \\ \left. \text{there exists } x \in X \text{ with } f(x) = 0 \right\}.$$

For every idempotent probability measure $\nu \in I(X)$ there exists [1] a unique upper semi-continuous function $\lambda \in USC_0(X)$ such that $\nu = \bigoplus_{x \in X} \lambda(x) \odot \delta_x$.

Consequently [8],

$$I(X) = \left\{ \bigoplus_{x \in X} \lambda(x) \odot \delta_x : \lambda \in USC_0(X) \right\}.$$

A set

$$\text{supp } \mu = \{x \in X : \lambda(x) > -\infty\}$$

is called [8] the support of an idempotent probability measure $\mu = \bigoplus_{x \in X} \lambda(x) \odot \delta_x$.

2. On a perfect compactification of the space of idempotent probability spaces

For a Tychonoff space X put [7]

$$I_\beta(X) = \{ \mu \in I(X) : \text{supp } \mu \subset X \}.$$

It is clear that $I_\beta(X) \subset I(X)$. Consider the set $I_\beta(X)$ as a subspace of the space $I(X)$. For a Tychonoff space X the space $I_\beta(X)$ is also a Tychonoff space with respect to the induced topology.

For a continuous map $f: X \rightarrow Y$ of Tychonoff spaces we put

$$I_\beta(f) = I(f)|_{I_\beta(X)},$$

where $\beta f: \beta X \rightarrow \beta Y$ is the Stone-Ćech compactification of f (it is unique).

For a compact Hausdorff space X we put

$$I_f(X) = \left\{ \mu = \bigoplus_{i=1}^n \chi_\mu(x_i) \odot \delta_{x_i} \in I_\omega(X) : \right.$$

$$\left. \text{there exists a point } x_{i_0} \in \text{supp } \mu = \{x_1, \dots, x_n\} \right.$$

$$\left. \text{such that } \chi_\mu(x_{i_0}) = 0 \text{ and } \chi_\mu(x_i) \leq -\frac{n}{n+1} \text{ at } i \neq i_0 \right\}.$$

For a Tychonoff space X we put

$$I_f(X) = I_\beta(X) \cap I_f(\beta X).$$

For a point $x \in X$ let us define the following set

$$I_f^x(X) = \left\{ \mu = \bigoplus_{i=1}^n \chi_{\mu}(x_i) \odot \delta_{x_i} \in I_f(X) : x \in \text{supp } \mu \text{ and } \chi_{\mu}(x) = 0 \right\}.$$

It is easy to see that for a compact Hausdorff space X :

a) $I_f^x(X) \cap I_f^y(X) = \emptyset$ if and only if $x \neq y$ for each pair of points $x, y \in X$;

b) $I_f(X) = \bigcup_{x \in X} I_f^x(X)$.

Consider a subset $M \subset X$ and put

$$\langle M \rangle = \left\{ \mu \in I_f(X) : \text{there is a point } x \in M \text{ such that } \mu \in I_f^x(X) \right\}.$$

Prof. [11] Let M be a nonempty subset of a Hausdorff compact space X . Then $I_f^x(X) \subset \langle M \rangle$ if and only if $x \in M$.

Prof. [11] For any couple M and N of nonempty subsets of a Hausdorff compact space X we have $\langle M \rangle \cap \langle N \rangle \neq \emptyset$ if and only if $M \cap N \neq \emptyset$.

Theorem 2.1. [11] Let M be a nonempty subset of a Hausdorff compact space X . Then $\langle M \rangle$ is open in $I_f(X)$ if and only if M is open in X . Similarly, $\langle M \rangle$ is closed in $I_f(X)$ if and only if M is closed in X .

It is easy to see that for a Tychonoff space X the set $I_f(X)$ is everywhere dense in $I_f(\beta X)$, i. e. $I_f(\beta X)$ is a compactification of the space $I_f(X)$. Here we make a more precise statement. The following states shows that the functor $I_\beta: \mathfrak{Tych} \rightarrow \mathfrak{Tych}$ transforms disjoint open covers into disjoint open covers.

Theorem 2.2. [11] For a Tychonoff space X the space $I_f(\beta X)$ is a perfect compactification of the space $I_f(X)$.

Lemma 2.1. [11] Let ν be an open cover of a Tychonoff space X with $K_p \nu = 1$. Then the family

$$I_\beta(\nu) = \{ \langle U \rangle : U \in \nu \}$$

is an open cover of the space $I_\beta(X)$ with $K_p(I_\beta(\nu)) = 1$.

Thus, we get the following remarkable achievement.

Theorem 2.3. [9] For a Tychonoff space X its hyperspace $I_\beta(X)$ is Π -complete if and only if X is Π -complete.

3. Π -completeness of the map $I(f)$

For a map $f: X \rightarrow Y$ and a subset $H \subset Y$ the preimage $f^{-1}H$ is called a *tube* (above H).

Remind, a continuous map $f: X \rightarrow Y$ is called [2] a T_0 -map, if for each pair of distinct points $x, x' \in X$, such that $f(x) = f(x')$, at least one of these points has an open neighbourhood in X which does not contain the other point.

A continuous map $f: X \rightarrow Y$ is called *totally regular*, if for each point $x \in X$ and every closed set $F \subset X$ not containing x there exists an open neighbourhood O of $f(x)$ such that in the tube $f^{-1}O$ the sets $\{x\}$ and F are functionally separable. A totally regular T_0 -map is said to be a *Tychonoff map*.

Obviously, each continuous map $f: X \rightarrow Y$ of a Tychonoff space X into a topological space Y is a Tychonoff map. In this case, for every Tychonoff space X , owing to the fact that the set $I(X)$ is a Tychonoff space with respect to the topology of pointwise convergence, the map

$$I_\beta(f): I_\beta(X) \rightarrow I_\beta(Y)$$

is a Tychonoff map.

A continuous, closed map $f: X \rightarrow Y$ is said to be *compact* if the preimage $f^{-1}(y)$ of each point $y \in Y$ is compact. A continuous map $f: X \rightarrow Y$ is compact if and only if for each point $y \in Y$ and every cover of the fibre $f^{-1}(y)$, consisting of open sets in X , there is an open neighbourhood O of y in Y such that the tube $f^{-1}O$ can be covered with a finite subfamily of that cover.

A compact map $b_f: b_f X \rightarrow Y$ is said to be a *compactification* of a continuous map $f: X \rightarrow Y$ if X is everywhere dense in $b_f X$ and $b_f|_X = f$. On the set of all compactifications of a given map f one can introduce a partial order: for the compactifications $b_1 f: b_1 X \rightarrow Y$ and $b_2 f: b_2 X \rightarrow Y$ of f we put $b_1 f \leq b_2 f$ if there is a natural map of $b_2 X$ onto $b_1 X$. B. A. Pasynkov showed that for each Tychonoff map $f: X \rightarrow Y$ there exists its maximal compactification $g: Z \rightarrow Y$, which he denoted by βf , and the space Z where this maximal compactification is defined by $\beta_f(X)$.

Remark 3.1. Note that the maps $b_1 f, b_2 f, \beta f$ are compactifications of the map f . The spaces $b_1 X, b_2 X, \beta_f X$ are some extensions of X but they are not obliged to be compactifications of X itself.

A Tychonoff map $f: X \rightarrow Y$ is said to be Π -complete, if for every point $x \in \beta_f X \setminus X$ there exists a disjoint clopen ($\cong$ closed-open) cover of X pricking out x in $\beta_f X$ [4, pp. 120–121].

We consider the following notion.

Definition 3.1 ([10]). A compactification $b_f: b_f X \rightarrow Y$ of a Tychonoff map $f: X \rightarrow Y$ is said to be a perfect compactification of f if for each point $y \in Y$ and for every disjoint open sets U_1 and U_2 in X there exists an open neighborhood $O \subset Y$ of y such that the equality

$$O_{\beta_f X}(U_1 \cup U_2) \cap (\beta f)^{-1}O = (O_{\beta_f X}(U_1) \cup O_{\beta_f X}(U_2)) \cap (\beta f)^{-1}O$$

holds.

Let $f: X \rightarrow Y$ be a continuous map of a Tychonoff space X into a space Y . It is well known there exists a compactification νX of X such that f has a continuous extension $\nu f: \nu X \rightarrow Y$. It is clear, νf is a perfect compactification of f .

The following result is an analog of Theorem 1.1 for the case of maps.

Theorem 3.1. Let $b_f: b_f X \rightarrow Y$ be a perfect compactification of a Tychonoff map $f: X \rightarrow Y$. The map f is Π -complete if and only if for every point $x \in b_f X \setminus X$ there exists a disjoint clopen cover of X pricking out x in $b_f X$.

Proof. The proof is carried out similar to the proof of Theorem 1.1 from [2]. □

The following result is a variant of Theorem 2.1 for the case of maps.

Theorem 3.2. Let $g: X \rightarrow Y$ be a Tychonoff map. Then

$$I_f(\beta g): I_f(\beta_g X) \rightarrow I_f(Y)$$

is a perfect compactification of

$$I_f(g): I_f(X) \rightarrow I_f(Y).$$

Proof. The proof is similar to the proof of Theorem 2.1. Here the equality

$$(I_\beta(\beta g))^{-1}\langle U \rangle = \langle (\beta g)^{-1}(U) \rangle$$

is used. $\square$

The following statement is the main result of this section.

Theorem 3.3. *The Tychonoff map $I_f(g): I_f(X) \rightarrow I_f(Y)$ is Π -complete if and only if the map $g: X \rightarrow Y$ is Π -complete.*

Proof. Let $I_f(g): I_f(X) \rightarrow I_f(Y)$ be a Π -complete map. It implies that $g: X \rightarrow Y$ is a Π -complete map since $X = \{\{x\}: x \in X\} \subset I_f(X)$ is a closed set.

Let now $g: X \rightarrow Y$ be a Π -complete map. We consider an arbitrary point $\mu \in I_f(\beta_g X) \setminus I_f(X)$ and using Theorems 3.1 and 3.2 show that there exists a disjoint clopen cover of $I_f(X)$ pricking out the point μ in $I_f(X)$.

By definition, for every point $x \in \text{supp } \mu \setminus X \subset \beta_f X \setminus X$ there exists a disjoint clopen cover ω_x of X pricking out x in $\beta_f X$. Fix a point $x_0 \in \text{supp } \mu \setminus X$. Then $x_0 \notin \bigcup [\omega_{x_0}]_{\beta_f X}$ in $\beta_f X$. Hence

$$\text{supp } \mu \not\subset [U]_{\beta_f X}, \quad \text{for all } U \in \omega_{x_0}.$$

Consequently,

$$\mu \notin [\langle U \rangle]_{I_f(\beta_g X)}, \quad \text{for every } U \in \omega_{x_0}.$$

Owing to (2.1), applying Lemma 2.3 one more time, we conclude that $I_f(\omega_{x_0})$ is a disjoint clopen cover of $I_f(X)$ pricking out the considered point μ in $I_f(\beta_g X)$. $\square$

Corollary 3.1. *The functor I lifts onto the category of Π -complete spaces and their continuous maps.*

Acknowledgements

The author expresses sincere gratitude to A. A. Zaitov for valuable discussions and guidance.

References

- [1] M. Akian., *Densities of idempotent measures and large deviations*. Transactions of the American Mathematical Society,–1999.–Vol.351.–No11.–P.4515–4543.
- [2] A. V. Arkhangel'sky, V. I. Ponomarev., *Fundamentals of the general topology: problems and exercises*. D. Reidel Publishing Company,–1983.
- [3] D. Buhagiar, T. Miwa., *On superparacompact and Lindelöf GO spaces*. Houston Journal of Mathematics,–1998.–Vol.24.–No3.–P.443–457.
- [4] D. K. Musayev, B. A. Pasynkov., *On compactness and completeness properties of topological spaces and continuous maps*, Fan, Tashkent, –1994 (in Russian).
- [5] M. Zarichnyi., *Spaces and maps of idempotent measures*. Izvestiya: Mathematics,–2010.–Vol.74.–No3.–P.481–499.
- [6] A. Ch. Chigogidze., *Extension of normal functors*. Vestnik Moskov. Univ. Ser. Mat. Mekh.,–1984.–No6.–P.23–26.
- [7] A. Ya. Ishmetov., *On the functor of idempotent probability measures with compact support*. Uzbek Mathematical Journal,–2010.–No1.–P.72–80.
- [8] A. A. Zaitov., *On a metric on the space of idempotent probability measures*. Applied General Topology,–2020.–Vol.21.–No1.–P.35–51.
- [9] Sh. A. Ayupov, A. A. Zaitov, Sh. Eshtemirova., Π -completeness of the space of idempotent probability measures. Uzbek Mat. J.,–2025.–Vol.69.–No1.–P.37–48.
- [10] A. A. Zaitov, D. I. Jumaev., *Hyperspaces of superparacompact spaces and continuous maps*, Universal Journal of Mathematics and Applications, –2 (2019), no. 2, 8 pages. <https://arxiv.org/abs/1811.05347>.
- [11] L. D. R. Kočinac, A. A. Zaitov, Sh. H. Eshtemirova., *On the Spaces of Idempotent Probability Measures on Superparacompact Spaces*, (Submitted).

Affiliations

ESHTEMIROVA SHAXNOZA HAQQUL QIZI

ADDRESS: V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of Uzbekistan, 9, University Str., 100174, Tashkent, Uzbekistan

E-MAIL: shaxnoza.eshtemirova@mail.ru

Определение оптимального состава портфеля с помощью математической модели финансового портфеля

Эшкабилов Алишер,* Рауфов Хумоюн,* Шамсиева Угиллой

Аннотация

В статье представлена информация о портфеле Марковица, финансовом портфеле инвестора и построена математическая модель финансового портфеля. На примере финансового портфеля известного бизнесмена Илона Маска с помощью математической модели финансового портфеля была определена оптимальная структура портфеля. При определении оптимальной структуры финансового портфеля использовалась программа, созданная на языке программирования Python.

Ключевые слова: финансовый портфель, портфель Марковица, математическая модель финансового портфеля, оптимальная структура финансового портфеля, доходность финансового портфеля, риск финансового портфеля.

Предметная классификация AMS (2020): Основная: 00A00 ; Дополнительная: 00B00; 00C00; 00D00; 00E00; 00F00.

В настоящее время существуют различные подходы и методы анализа привлечения инвестиций в ценные бумаги. Построение таких аналитических методов и математических моделей, а также теория использования коэффициентов не дают четкого ответа на вопрос о предварительном определении рискованности инвестиций для инвесторов, однако позволяют достаточно объективно оценить тенденции некоторых действий на фондовом рынке. Рассмотрим два таких метода.

Портфель Марковица

Основоположник современной теории портфеля Марковиц (1952) писал в своих научных трудах о необходимости формирования портфеля путем проверки корреляционной зависимости между каждой акцией. До Марковица классическое направление оценки стоимости акций основывалось на модели дисконтированной стоимости, разработанной Джоном Бёрром Уильямсом (1937). Марковиц утверждает, что риск в этой модели не учитывается, и предлагает свою собственную модель. Выдающийся экономист своего времени Милтон Фридман подвергал критике исследования Марковица, утверждая, что они не обладают существенным экономическим значением. Тем не менее, на сегодняшний день теория портфеля, а также вопросы его оптимизации и диверсификации продолжают развиваться в трудах многих экономистов, опирающихся на научные исследования Марковица (Markowitz, 1952).

Данная формула представляет математическое ожидание дохода как взвешенную сумму возможных доходов с учетом вероятностей их возникновения.

$$E_i = \sum_{j=1}^n R_i \cdot P_{ij}$$

R_i -отдельно возможный доход,

P_{ij} -вероятность появления.

В 1966 году Уильям Шарп впервые разработал показатель эффективности, измеряющий соотношение средней премии за риск к среднему отклонению портфеля. Этот показатель был предложен в его статье «Эффективность взаимных фондов», опубликованной в журнале «The Journal of Business», и впоследствии получил название коэффициент Шарпа.

Коэффициент Шарпа был разработан в процессе дальнейшего развития теории портфеля Г. Марковица и представляет собой отношение доходности к уровню риска. Данный показатель позволяет оценить степень устойчивости ожидаемой прибыли. Формула расчёта коэффициента Шарпа представляется следующим образом:

$$Sharpratio = \frac{r_p - r_f}{\sigma_p}$$

где

r_p -ожидаемая доходность портфеля,

r_f -безрисковая ставка доходности,

σ_p -стандартное отклонение доходности портфеля (мера риска).

На основе данного коэффициента разработан критерий оценки эффективности инвестиций, представленный в следующей таблице.

Значение коэффициента Шарпа	Оценка эффективности инвестиций
Коэффициент Шарпа>1	Высокая доходность инвестиционного портфеля и эффективность управления инвестициями при низком уровне риска
1>Коэффициент Шарпа>0	Уровень риска инвестирования в данный объект превышает ожидаемый уровень риска.
Коэффициент Шарпа<0	Инвестирование не рекомендуется, поскольку доходность без рискового актива высока.

В Узбекистане, как и в других странах, существуют аналитические агентства, описывающие финансовые инструменты различных эмитентов (Emitent (англ. issuer) - организация, выпускающая (эмитирующая) ценные бумаги для развития и финансирования своей деятельности), однако коэффициенты, которые важны для принятия инвестиционных решений в Узбекистане, на практике еще не работают.

Для получения объективных показателей необходимо реализовать идею Шарпа по расчету кодировок корпоративных ценных бумаг на фондовых биржах на основе временных рядов. Коэффициент Шарпа ставит доход на единицу риска, точнее, изменчивость, выше ставки без риска. Стабильность инвестиционного портфеля периодически реализуется в различных вибрационных формах. Это может одновременно привести к снижению риска инвестирования инвестора или к полному отсутствию убытков, что называется диверсификацией инвестиционного портфеля на рынке ценных бумаг. Успешные инвестиции основаны на двух основных принципах - во-первых, использование методов портфельных инвестиций в этой работе позволяет, в первую очередь, снизить риски и держать их под контролем. Во-вторых, по принципу выбора высококачественных активов, для облигаций в первую очередь учитываются надежность и устойчивость эмитента, а для акций - базовая стоимость ценных бумаг, а также дальнейшие

перспективы и потенциал роста. Чтобы снизить зависимость портфеля, состоящего из одного вида финансовых активов, от изменения рыночной стоимости, необходимо инвестировать в разные виды активов.

Подход Г.Марковица начинается с предположения, что у инвестора сейчас есть определенная сумма средств для инвестирования. Эти деньги инвестируются на определенный срок, который называется периодом удержания. В конце срока хранения инвестор продает ценные бумаги, купленные в начале периода, через некоторое время. Формирование задачи поиска оптимального портфеля ценных бумаг является одной из возможностей теории оптимального портфеля, исследованной Марковицем. Марковиц предложил описать вероятность отклонения величины доходности портфеля от его математического ожидания нормальным распределением. Доход портфеля - ожидаемый доход за определенный уровень риска или минимальный уровень определенного риска. Нет единого оптимального портфеля, может быть более оптимальный, более эффективный портфель по сравнению с другими.

Наиболее сложная процедура в процессе реализации марковиц-модели - это сбор расчетов, необходимых для оценки наличия или отсутствия риска, какое-то изменение цен различных акций или облигаций по отношению к ценам других акций или облигаций. Кроме того, этот подход ниже других моделей из-за отсутствия связи с рынком, то есть более рискован. Уильям Шарп использовал результаты исследования Г. Марковица в качестве отправной точки для дальнейших исследований, в ходе которых он определил влияние модели Марковица на стоимость финансовых активов. Теперь составим математическую модель портфеля инвестора. Данная формула используется для расчета относительной доходности каждого выбранного актива и играет важную роль в принятии инвестиционных решений.

$$r_i = \frac{K(a_i)_p - K(a_i)_0}{K(a_i)_0}$$

где:

r_i -относительная доходность i -го актива, отражающая; насколько изменилась стоимость актива относительно его начальной цены;

$K(a_i)_0$ -прогнозируемая (будущая) стоимость i -го актива, то есть ожидаемая рыночная цена актива в будущем;

$K(a_i)_p$ -начальная (текущая) стоимость i -го актива, то есть его цена на момент приобретения или текущая рыночная стоимость.

Рентабельность портфеля инвестора определяется по следующей формуле:

$$R_n = \sum X_i r_i$$

Здесь X_i доля i - ценных бумаг в портфеле, сумма которых, естественно, равна 1.

$$\sum X_i = 1.$$

Кроме того, если портфель содержит короткую позицию, то

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n - X_b = 1$$

Здесь X_b доля заемного актива (продается на коротких торгах).

Математическое ожидание дохода от портфеля ценных бумаг в n

$$R = \sum X_i R_i$$

Здесь, $R_i = M\{r_i\}$ - рентабельность, i -й ценной бумаги, а её математическое ожидание. При формировании портфеля ценных бумаг мы используем стратегию, гарантирующую определенный доход

или доход в R_0 а не стратегию, основанную на "наборе эффективных портфелей". Следовательно, в качестве рациональной стратегии рационального формирования портфеля ценных бумаг можно использовать $R_n \geq R_0$ или

$$\sum_{i=1}^n X_i \cdot r_i \geq R_0$$

приходится выбирать те, которые обеспечивают выполнение неравенства. Поскольку левой стороной вышеуказанного соотношения является случайная величина, вместо неравенства можно взять вероятность его выполнения:

$$P = P\left(\sum_{i=1}^n X_i \cdot r_i \geq R_0\right)$$

Для оптимального портфеля ценных бумаг вероятность получения дохода, превышающего R_0 , должна быть максимальной. Это означает, что оптимальный портфель формируется из долей X_i каждого актива. Вектор долей X , удовлетворяющий условию нормализации, определяется следующим соотношением:

$$X = \arg \left\{ \max P = P \left(\sum_{i=1}^n X_i r_i \geq R_0 \right) \right\}$$

Определенная в связи с этим задача относится к классу стохастических проблем программирования. Рассмотрим случай, когда доходы по ценным бумагам независимы. Получим случайные значения дохода каждого актива по нормальному распределению:

$$P = P \left(\sum_{i=1}^n X_i I_i \geq R_0 \right) = \Phi \left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i I_i - R_0}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2 D_i}} \right).$$

Здесь, $\Phi(x)$ функция Лапласа. Последнее выражение $Y = \frac{\sum_{i=1}^n X_i r_i - R_0}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2 D_i}}$. Выражение достигает максимума, когда значение достигает максимума. Затем нормируйте

$$\sum_{i=1}^n X_i = 1$$

неотрицательный $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ найдем величину,

$$X = \arg \left\{ \max \left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i r_i - R_0}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2 D_i}} \right) \right\}$$

Этот найденный $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ значения представляют собой оптимальный портфель ценных бумаг. Такая постановка задачи на нахождение оптимального портфеля ценных бумаг является одной из возможностей теории оптимального портфеля, изученной Г.Марковицем. Первое условие формирования эффективного портфельного пакета $\sum_{i=1}^n X_i^2 D_i = const$ второе условие $\sum_{i=1}^n X_i r_i = const$. Каждое из этих равенств имеет вид, который принимает аналитическое решение. Y при максимизации имеет следующий вид

$$Y = \frac{\sum_{i=1}^n X_i r_i - R_0}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j D_{ij}}}$$

Если для n ценных бумаг их доходы составляют $r_1 < r_2 < \dots < r_n$ существует три варианта формирования оптимального портфеля. В то же время варианты формирования портфеля зависят от желания инвестора получить больше прибыли. Первая - консервативная стратегия. Инвестор Хочет зарабатывать меньше r_1 . Вторая - стратегия со средним уровнем риска i . Инвестор хочет получить доход от r_i до r_{i+1} . Третья - стратегия риска. Инвестор хочет получить доход выше r_n . Математическая модель для оптимального инвестиционного портфеля из двухпериодического формирования записывается в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} X^* = \arg \left\{ \max \left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i r_i - R_0}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j D_{ij}}} \right) \right\}, \\ r_i = \frac{K_i^0 - K_i^p - T_r}{K_i^0}, \\ r_1 \leq R_0 \leq r_n, \\ r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_n, \\ K_i^p = f(K_i^m, \theta), \\ \sum_{i=1}^n I_i = I, \quad I_i = 0.01 X_i I, \quad a_i = \frac{I_i}{K_i^0}, \\ I = \begin{cases} I, & \text{период-1} \\ I + (1 - \eta) \sum_{i=1}^n S_i, & \text{период-2} \end{cases} \\ X^* = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}, \quad X_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n X_i = 1. \end{array} \right.$$

Здесь,

i -ценная бумага

n -ожидаемый ценный бумаги в портфеле

X_i -доля i -й ценной бумаги портфеле инвестора

D_{ij} -ценными бумагами i -й и j -й коварияция дохода

r_i -доход от i -й ценной бумаги

K_i^0 -ожидаемая цена актива i

K_i^p -Прогнозная стоимость ценной бумаги на шаге p , p -прогнозный периода

$f(K_i^m, \theta)$ - i -линейная рекуррентная формула в виде временного ряда, изображающего ценную бумагу

T_r -плата брокеру (в тарифе компании)

I -начальный капитал инвестора

a_i - количество акций i портфеля инвестора

η - ставка государственного налога для физических лиц.

S_i -доход от i -й ценной бумаги.

Используя эту формулу, можно спрогнозировать будущий доход выбранной компании. Для этого нам понадобятся данные о доходах выбранных компаний, составляющих инвестиционный портфель, в размере не менее 5 в год. Чем больше информации, тем больше точность прогноза.

Приведем пример оценки доходности портфеля какого-либо инвестора в модели Марковица. Для этого рассмотрим в качестве примера финансовый портфель самого богатого человека в мире, Илона Маска, обладающего огромным капиталом. Потому что его финансовый портфель многомерен и сложен. Он обычно имеет портфель, диверсифицированный акциями, облигациями, частными компаниями, криптовалютами и другими финансовыми инструментами. Ниже мы построим его портфель с помощью

математической модели, учитывая взгляды Илона Маска на инвестиции и его отношение к риску. Илон Маск не боится высокорисковых инвестиций, так как уделяет внимание развитию инновационных компаний и технологического сектора. Его портфель включает в себя SpaceX, Tesla, Neuralink и другие высокоопасные, высокодоходные проекты (<https://www.bloomberg.com/billionaires/profiles/elon-r-musk/>). В то же время он инвестировал в другие более безопасные активы, чтобы снизить риск.

Портфель Илона Маска состоит из следующих средств:

1. Акции Tesla:

- Ожидаемый годовой доход: 15%,
- Опасность (стандартное отклонение): 30%

2. SpaceX (частная компания)

- Ожидаемый годовой доход: 25%
- Опасность (стандартное отклонение): 40%

3. Криптовалюты (например, Bitcoin, Ethereum):

- Ожидаемый годовой доход: 50%
- Опасность (стандартное отклонение): 60%

4. Облигации (государственные облигации США)

- Ожидаемый годовой доход: 4%
- Опасность (стандартное отклонение): 5%

5. Ковариации:

- Высокая взаимосвязь между Tesla и SpaceX

$$(\text{Cov}(R_{\text{Tesla}}, R_{\text{SpaceX}}) = 0,09)$$

Криптовалюты умеренно связаны с Tesla и SpaceX.

$$(\text{Cov}(R_{\text{Crypto}}, R_{\text{Tesla}}) = 0,04),$$

$$(\text{Cov}(R_{\text{Crypto}}, R_{\text{SpaceX}}) = 0,05)$$

Облигации практически не связаны с другими активами, потому что они являются безопасными.

$$(\text{Cov}(R_{\text{Donds}}, R_{\text{Others}}) = 0)$$

6. Показатель риска λ : $\lambda = 1$, потому что Маск подвержен риску принимаем. Математическая модель финансового портфеля Илона Маска выглядит так:

$$\left\{ \begin{array}{l} E(R_p) = \sum_{i=1}^4 \omega_i E(R_i), \\ \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \omega_i \cdot \omega_j \cdot \text{Cov}(R_i, R_j), \\ R_1 = R_{\text{Tesla}}, R_2 = R_{\text{SpaceX}}, R_3 = R_{\text{Crypto}}, R_4 = R_{\text{Donds}}, \\ F = \max_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4} (E(R_p) - \lambda \cdot \sigma_p^2), \\ \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 = 1, \omega_i \geq 0, i = 1, \dots, 4. \end{array} \right.$$

Здесь, $E(R_p)$ - ожидаемый доход портфеля,

σ_p^2 - риск портфеля или дисперсия,

F - Целевая функция.

ω_i - финансовая средства i -й,

В данной модели, с помощью программы, созданной на языке программирования Python, определим оптимальный состав финансового портфеля Илона Маска:

Оптимальная доля акций:

- Акции Tesla: $\omega_1 = 0,30$ (30%)
- Акции SpaceX : $\omega_2 = 0,35$ (35%)
- Криптовалюты: $\omega_3 = 0,25$ (25%)
- Облигации: $\omega_4 = 0,10$ (10%)

Тогда доходность его финансового портфеля:

$$E(R_p) = 0,30 \cdot 0,15 + 0,35 \cdot 0,25 + 0,25 \cdot 0,50 + 0,10 \cdot 0,04 \approx 0,267 \quad (26,7\%)$$

Риск портфеля:

$$\sigma_p = \sqrt{0,30^2 \cdot 0,09 + 0,35^2 \cdot 0,16 + 0,25^2 \cdot 0,36 + 0,10^2 \cdot 0,25} \approx 0,28$$

Оптимальные доли портфеля: $[4.81774773e - 013.90312782e - 182.56115886e - 012.62109341e - 01]$

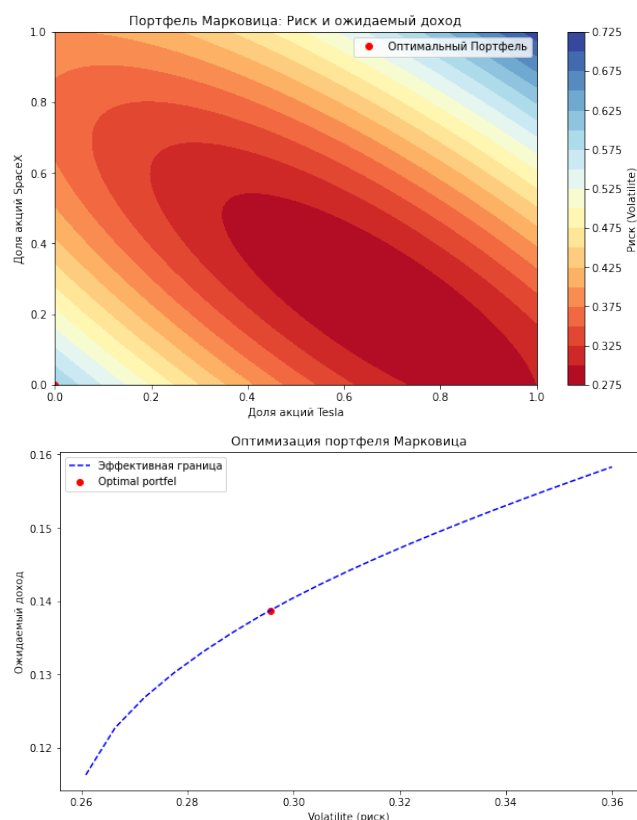
Оптимальный ожидаемый доход: 0.13871705565065273

Риск (volatility): 0.2955375688595006

Оптимальный коэффициент Шарпе: 0.40169869471685055

Анализ представленных графиков

- График "Риск и Ожидаемая Доходность" Данный график демонстрирует, как изменяется совокупный риск (волатильность) портфеля в зависимости от доли акций Tesla и SpaceX. Согласно модели Марковица, существует оптимальная комбинация активов, при которой риск минимизируется при заданном уровне доходности. На графике можно наблюдать точку оптимального портфеля, которая представляет собой наиболее эффективное распределение активов.
- Диверсификация между Tesla и Bitcoin (синяя кривая) приводит к различному уровню риска по сравнению с диверсификацией между SpaceX и Bitcoin (зелёная кривая). В определённых пропорциях портфельный риск минимизируется, что соответствует идее эффективной границы Марковица. Добавление высоковолатильного актива, например, Bitcoin, может значительно увеличить общий риск, если его доля слишком высока.



- Данный график показывает, как изменяется волатильность портфеля при изменении доли акций Tesla. Оптимальная структура портфеля заключается в нахождении такого распределения активов, при котором риск минимален.

Выводы из графика:

Коэффициент корреляции измеряет степень зависимости между двумя активами и вычисляется по следующей формуле:

$$\rho_{ij} = \frac{Cov(R_i, R_j)}{\sigma_i \sigma_j}$$

где:

$Cov(R_i, R_j)$ -ковариация, характеризующая совместное изменение доходностей двух активов;

σ_i и σ_j -стандартные отклонения доходностей активов (волатильность).

Влияние корреляции на риск и доходность портфеля

- Сильная корреляция между Tesla и SpaceX ($\rho = 0.75$)
- Означает, что если акции Tesla растут, то, с высокой вероятностью, растет и стоимость инвестиций в SpaceX.
- Однако высокая корреляция ограничивает эффект диверсификации.
- Слабая зависимость между Tesla и Bitcoin ($\rho = 0.3$)
- Эти активы движутся относительно независимо друг от друга.
- Добавление Bitcoin в портфель снижает совокупный риск, поскольку падение одного актива не обязательно приводит к падению другого.
- Средняя корреляция между SpaceX и Bitcoin ($\rho = 0.4$)

- Инвестиции в SpaceX частично зависят от рыночных трендов, влияющих на Bitcoin.
- Это не обеспечивает полной диверсификации, но снижает общий риск портфеля.

Выявленные значения коэффициентов корреляции: Из этих результатов можно сделать следующие выводы:

- а) Илон Маск выделяет значительную долю высокодоходным компаниям, таким как Tesla и SpaceX. С помощью криптовалют риск увеличивает доход, но также инвестирует в облигации, чтобы снизить риск.
- б) Сохраняется баланс между доходом и риском, то есть ожидается годовой доход в размере 26,7%, а риск составляет около 28%.
- в) Эта стратегия показывает, что Маск принимает высокий риск и стремится к высокой прибыли.

Determining the optimal portfolio composition using a mathematical model of a financial portfolio

Eshkabilov A.A., Raufov H.R., Shamsiyeva U.

Abstract

The article provides information about the Markovitz portfolio, the investor's financial portfolio, and compiles a mathematical model of the financial portfolio. Using the example of the financial portfolio of the famous businessman Elon Musk, the optimal composition of the portfolio was determined using a mathematical model of the financial portfolio. A program created in the Python programming language was used to determine the optimal composition of the financial portfolio.

Affiliations

Eshkabilov Alisher

Address: Tashkent State Transport University, , Tashkent.

e-mail: alisher.eshqobilov@yandex.com

ORCID ID: 0000-0002-2233-7662

Raufov Humoyun

Address: Tashkent State Transport University, Tashkent.

e-mail: humoyunraufpob3334@gmail.com

ORCID ID:0009-0002-1682-0858

Shamsiyeva Ugiloy

Address: Tashkent State Transport University, , Tashkent.

О гладкости периодической краевой задачи для трёхмерного уравнения Чаплыгина в неограниченном параллелепипеде

Джамалов Сирожиддин З., * Туракулов Хамидулло Ш. и
Сипатдинова Бийбиназ К.

Аннотация

В статье исследуются единственность, существование и гладкость обобщенного решения периодической краевой задачи для трехмерного уравнения Чаплыгина в неограниченном параллелепипеде. Для доказательства теоремы единственности, существования и гладкости решения задачи используются преобразование Фурье, методы " ε регуляризации" и априорных оценок.

Ключевые слова: трёхмерное уравнение Чаплыгина; периодическая краевая задача; преобразование Фурье; методы " ε -регуляризации" и априорных оценок.

Предметная классификация AMS (2020): Основная: 35M10;

1. Введение.

Как известно, в работе А.В.Бицадзе показано, что задача Дирихле для уравнения смешанного типа некорректна [1].

Естественно возникает вопрос: нельзя ли заменить условия задачи Дирихле другими условиями, охватывающими всю границу, которые обеспечивают корректность задачи? Впервые такие краевые задачи (нелокальные краевые задачи) для уравнения смешанного типа были предложены и изучены в работах Ф.И.Франкля при решении газодинамической задачи об обтекании профилей потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения [2],[3]. Близкие по постановке задачи для уравнения смешанного типа первого рода в ограниченных областях изучены в работах [4]–[8].

В данной работе используя результаты работ [7],[8], изучаются однозначная разрешимость и гладкость обобщенного решения одной периодической краевой задачи для трехмерного уравнения Чаплыгина в неограниченном параллелепипеде.

В области

$$G = (-1, 1) \times (0, T) \times R = Q \times R = \{ (x, t, z) \mid x \in (-1, 1), \quad 0 < t < T < +\infty, \quad z \in R \}$$

рассмотрим уравнение Чаплыгина:

$$Lu = K(x)u_{tt} - \Delta u + a(x)u_t + c(x, t)u = f(x, t, z). \quad (1.1)$$

Здесь $xK(x) > 0$ при $x \neq 0$, где $x \in (-1, 1)$, $\Delta u = u_{xx} + u_{zz}$ - оператор Лапласа.

Пусть все коэффициенты уравнения (1.1) достаточно гладкие функции в области Q .

В дальнейшем для решения поставленных задач нам необходимо ввести определения нескольких функциональных пространств и обозначения.

Обозначим через

$$\hat{u} = \hat{u}(x, t, \lambda) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t, z) e^{-i\lambda z} dz$$

преобразование Фурье по переменной z функции $u(x, t, z)$, а через

$$u(x, t, z) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(x, t, \lambda) e^{i\lambda z} d\lambda$$

обратное преобразование Фурье. Теперь с помощью преобразования Фурье определим анизотропное пространство Соболева $W_2^{l,s}(G)$ с нормой

$$\|u\|_{W_2^{l,s}(G)}^2 = (2\pi)^{-1/2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |\lambda|^2)^s \cdot \|\hat{u}(x, t, \lambda)\|_{W_2^l(Q)}^2 d\lambda, \quad (A)$$

где s, l - любые конечные положительные целые числа.

Через $W_2^l(Q)$ (при $l = 0, W_2^0(Q) = L_2(Q)$) определяется пространство Соболева со скалярным произведением $(u, v)_l$ и нормой

$$\|v\|_l^2 = \|v\|_{W_2^l(Q)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq l} \int_Q |D^\alpha v|^2 dx dt.$$

Здесь α - мультииндекс, D^α -обобщённая производная по переменным x и t [12], [13]. Очевидно, что пространство $W_2^{l,s}(G)$ с нормой (A) является гильбертовым пространством [9]-[12].

При получении различных априорных оценок мы часто будем использовать неравенство Коши с σ [13]:

$$\forall u, v > 0, \forall \sigma > 0, u \cdot v \leq \sigma \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2\sigma}$$

1.1. Постановки задачи.

Периодическая краевая задача: Найти обобщенное решение $u(x, t, z)$ уравнения (1.1) из пространства $W_2^{2,3}(G)$, удовлетворяющее следующим краевым условиям

$$D_t^p u|_{t=0} = D_t^p u|_{t=T}, \quad (1.2)$$

$$D_x^p u|_{x=-1} = D_x^p u|_{x=1}, \quad (1.3)$$

при $p = 0, 1$, где $D_t^p u = \frac{\partial^p u}{\partial t^p}$, $D_t^0 u = u$.

$$\text{Далее будем считать, что } u(x, t, z) \rightarrow 0 \text{ и } u_z(x, t, z) \rightarrow 0 \text{ при } |z| \rightarrow \infty. \quad (1.4)$$

Определение 1.1. Обобщенным решением задачи (1.1)-(1.4) будем называть функцию $u(x, t, z) \in W_2^{2,3}(G)$, удовлетворяющую уравнению (1.1) почти всюду с условиями (1.2)-(1.4).

1.2. Основной результат.

Теорема 1.1. Пусть выполнены следующие условия для коэффициентов уравнения (1.1); $2a(x) + \mu K(x) \geq \delta_1 > 0$, $\mu c(x, t) - c_t(x, t) \geq \delta_2 > 0$, для всех $(x, t) \in \overline{Q}$, где $c(x, 0) = c(x, T)$, для всех $x \in [-1, 1]$. Тогда для любой функции $f \in W_2^{1,3}(G)$, такой, что $f(x, 0, z) = f(x, T, z)$, существует единственное обобщенное решение задачи (1.1)–(1.4) из пространства $W_2^{2,3}(G)$.

Доказательство теоремы проведем по следующей схеме:

1. Для задачи (1.1)–(1.4) формально по переменным применим преобразование Фурье и получим новую задачу (1.5)–(1.7).

2. Изучим однозначную разрешимость периодической задачи для уравнения третьего порядка с малым параметром (вспомогательная задача).

3. Затем с помощью этой вспомогательной задачи докажем однозначную разрешимость задачи (1.5)–(1.7).

4. Используя однозначную разрешимость задачи (1.5)–(1.7), дадим обоснование сходимости интегралов Фурье и докажем разрешимость задачи (1.1)–(1.4).

Приступим к реализации этой схемы.

Применяя для задачи (1.1)–(1.4) преобразование Фурье по переменным z , получим в области $Q = (-1, 1) \times (0, T)$ следующую задачу

$$\Im \hat{u} = K(x) \hat{u}_{tt} - \hat{u}_{xx} + a(x) \hat{u}_t + (c(x, t) + \lambda^2) \hat{u} = \hat{f}(x, t, \lambda), \quad (1.5)$$

$$D_t^p \hat{u}|_{t=0} = D_t^p \hat{u}|_{t=T}, p = 0, 1 \quad (1.6)$$

$$D_x^p \hat{u}|_{x=-1} = D_x^p \hat{u}|_{x=1}, p = 0, 1, \quad (1.7)$$

где $\lambda \in R = (-\infty, \infty)$, $\hat{f}(x, t, \lambda) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t, z) e^{-i\lambda z} dz$ – преобразование Фурье по переменной z функции $f(x, t, z)$.

Как известно, однозначная разрешимость и гладкость обобщенного решения задачи (1.5)–(1.7) в случае, когда $\lambda = 0$, изучены в пространствах Соболева $W_2^{m+2}(Q)$, $m = 0, 1, 2, \dots$ в работах [7], [8]. Рассмотрим задачи (1.5)–(1.7) в случае, когда $\lambda \neq 0$. В этом случае решения задачи (1.5)–(1.7) $\hat{u}(x, t, \lambda)$ и $\hat{f}(x, t, \lambda)$ правая часть уравнения (1.5) зависит от параметра λ . С возрастанием $|\lambda| \rightarrow \infty$ может расти и правая часть уравнения (1.5), поэтому в этом случае возникает вопрос: как можно получить априорные оценки, обеспечивающие однозначную разрешимость задачи (1.5)–(1.7). Поэтому сначала при фиксированном $\lambda \in R$, используя результаты работы [6]–[8] получим необходимые оценки для решения задачи (1.5)–(1.7). В дальнейшем эти результаты используем для исследования задачи (1.1)–(1.4) в анизотропных пространствах Соболева $W_2^{m+2,s}(G)$, $m = 0, 1, 2, \dots; s \geq m + 3$ в неограниченном параллелепипеде

Теорема 1.2. Пусть выполнены следующие условия для коэффициентов уравнения (1.5):

$2a(x) + \mu K(x) \geq \delta_1 > 0$, $\mu c(x, t) - c_t(x, t) \geq \delta_2 > 0$, для всех $(x, t) \in \overline{Q}$, где $c(x, 0) \leq c(x, T)$, для всех $x \in [-1, 1]$. Тогда, если для любой функции $\hat{f}(x, t, \lambda) \in L_2(Q)$ существует решение задачи (1.5)–(1.7) из пространства $W_2^2(Q)$, то оно единственно.

Доказательство. Докажем единственность решения задачи (1.5)–(1.7) с помощью метода интеграла энергии. Пусть существует решение задачи (1.5)–(1.7) из $W_2^2(Q)$. Рассмотрим тождество:

$$(\Im \hat{u}, 2\hat{u}_t + \mu \hat{u})_0 = (\hat{f}, 2\hat{u}_t + \mu \hat{u})_0. \quad (1.8)$$

В силу условий теоремы 1.2, для любой функции $u \in W_2^2(Q)$, интегрируя по частям тождество (1.8), легко получить следующее неравенство

$$\int_Q \Im \hat{u} \cdot (2\hat{u}_t + \mu \hat{u}) dx dt \geq \int_Q \{ (2a + \mu K(x)) \cdot \hat{u}_t^2 +$$

$$\begin{aligned}
 & +\mu\hat{u}_x^2 + ((\mu c - c_t) + \mu\lambda^2) \cdot \hat{u}^2 dxdt + \\
 & + \int_{\partial Q} \{K(x)\hat{u}_t^2 e_t - 2 \cdot \hat{u}_x \hat{u}_t e_x - \hat{u}_x^2 e_t + (c + \lambda^2) \cdot \hat{u}^2 e_t\} ds
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

где $\mu - cons > 0$, $\vec{e} = (e_t = \cos(\vec{e}, t); e_x = \cos(\vec{e}, x))$ единичный вектор внутренней нормали к границе ∂Q . Условия теоремы 1.2 обеспечивают неотрицательность интеграла по области Q .

Пусть $u \in W_2^2(Q)$ удовлетворяет краевым условиям (1.6), (1.7). Используя условия теоремы 1.2, получим, что граничные интегралы равны нулю. Учитывая вышесказанное, из неравенства (1.9) получим следующее неравенство

$$\begin{aligned}
 & \int_Q \Im \hat{u} \cdot (2\hat{u}_t + \mu\hat{u}) dxdt \geq \\
 & \geq \int_Q \{(2a + \mu K(x)) \cdot \hat{u}_t^2 + \mu\hat{u}_x^2 + ((\mu c - c_t) + \mu\lambda^2) \cdot \hat{u}^2\} dxdt \geq \\
 & \geq \delta_0 \int_Q \{\hat{u}_t^2 + \hat{u}_x^2 + \hat{u}^2\} dxdt,
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

где $\delta_0 = \min \{\delta_1, \mu, \delta_2 + \mu\lambda^2 \geq \delta_2 > 0, \}$ следуют из неравенства (1.10). Тогда используя в левой части неравенства (1.10) неравенство Коши с σ , получим необходимую первую оценку

$$\|\hat{u}\|_{W_2^1(Q)}^2 \leq c_1 \|\hat{f}\|_{L_2(Q)}^2, \tag{1.11}$$

из которой следует единственность решения задачи (1.5)–(1.7) из $W_2^2(Q)$, в дальнейшем через c_i обозначим положительные, вообще говоря, разные постоянные числа, отличные от нуля.

Теорема 1.2 доказана.

2. Уравнение третьего порядка с малым параметром.

Разрешимость задачи (1.5)–(1.7) докажем методом " ε -регуляризации" а именно: в области $Q = (-1, 1) \times (0, T)$ рассмотрим семейство уравнений третьего порядка с малым параметром

$$\Im_\varepsilon \hat{u}_\varepsilon = -\varepsilon \frac{\partial^3 \hat{u}_\varepsilon}{\partial t^3} + \Im \hat{u}_\varepsilon = \hat{f}(x, t, \lambda) \tag{2.1}$$

и с периодическими краевыми условиями

$$D_t^q \hat{u}_\varepsilon|_{t=0} = D_t^q \hat{u}_\varepsilon|_{t=T}, \quad q = 0, 1, 2, \tag{2.2}$$

$$D_x^p \hat{u}_\varepsilon|_{x=-1} = D_x^p \hat{u}_\varepsilon|_{x=1}, \quad p = 0, 1, \tag{2.3}$$

где ε – малое положительное число, $D_z^q w = \frac{\partial^q w}{\partial z^q}$, $q = 1, 2$; $D_z^0 w = w$.

Ниже используем системы уравнений третьего порядка с малым параметром (2.1) в качестве " ε -регуляризации" для уравнения Чаплыгина (1.5). [7],[8], [14],[15].

Определим пространство функций

$$W(Q) = \{\hat{u}_\varepsilon | \hat{u}_\varepsilon \in W_2^2(Q), \hat{u}_{\varepsilon ttt} \in L_2(Q)\},$$

удовлетворяющие соответствующим условиям (2.1)–(2.3) с конечной нормой

$$\|\hat{u}_\varepsilon\|_W^2 = \varepsilon \|\hat{u}_{\varepsilon ttt}\|_0^2 + \|\hat{u}_\varepsilon\|_2^2. \tag{B}$$

Очевидно, что пространство $W(Q)$ с нормой (B) является гильбертовым пространством [12],[13].

Определение 2.1. Обобщенным решением задачи (2.1)–(2.3) будем называть функцию $\{\hat{u}_\varepsilon(x, t, \lambda)\} \in W(Q)$, удовлетворяющую уравнению (2.1) почти всюду в области Q .

Теорема 2.1. Пусть выполнены следующие условия для коэффициентов уравнения (2.1): $2a(x) + \mu K(x) \geq \delta_1 > 0$, $\mu c(x, t) - c_t(x, t) \geq \delta_2 > 0$ для всех $(x, t) \in \overline{Q}$, где $c(x, 0) = c(x, T)$ для всех $x \in [-1, 1]$. Тогда для любой функции $\hat{f}(x, t, \lambda) \in W_2^1(Q)$, такой, что $\hat{f}(x, 0, \lambda) = \hat{f}(x, T, \lambda)$, существует единственное обобщенное решение задачи (2.1)–(2.3) из пространства $W(Q)$ и для нее справедливы следующие оценки

$$III) \varepsilon \|\hat{u}_{\varepsilon tt}\|_0^2 + \|\hat{u}_\varepsilon\|_1^2 \leq c_1 \|\hat{f}\|_0^2,$$

$$IV) \varepsilon \|\hat{u}_{\varepsilon ttt}\|_0^2 + \|\hat{u}_\varepsilon\|_2^2 \leq c_2 \|\hat{f}\|_1^2.$$

Доказательство. теоремы 2.1 осуществляется поэтапно, с использованием метода Галеркина и соответствующих априорных оценок [7],[8]. Сначала докажем *III*)—третью оценку.

Рассмотрим тождество:

$$\int_Q \mathfrak{S}_\varepsilon \hat{u}_\varepsilon \cdot (2\hat{u}_{\varepsilon t} + \mu \hat{u}_\varepsilon) dx dt = \int_Q \hat{f} \cdot (2\hat{u}_{\varepsilon t} + \mu \hat{u}_\varepsilon) dx dt. \quad (2.4)$$

Интегрируя по частям тождество (2.4), учитывая условия теоремы 2.1 нетрудно получить *III*)—третью априорную оценку, аналогичную оценке (1.11), откуда следует единственность обобщенного решения задачи (2.1)–(2.3) из пространства $W(Q)$.

Теперь докажем справедливость *IV*)—четвертой оценки.

Для этого рассмотрим тождество:

$$\int_Q \mathfrak{S}_\varepsilon \hat{u}_\varepsilon \cdot P\hat{u}_\varepsilon dx dt = \int_Q \hat{f} \cdot P\hat{u}_\varepsilon dx dt, \quad (2.5)$$

где $P\hat{u}_\varepsilon = (-2\hat{u}_{\varepsilon ttt} + \mu \hat{u}_{\varepsilon tt} - \mu \hat{u}_{\varepsilon xx} + \mu \hat{u}_{\varepsilon t})$.

Интегрируя по частям (2.5), с учетом условий теоремы 2.1 и краевых условий (2.2),(2.3), получим необходимую оценку:

$$\varepsilon \|\hat{u}_{\varepsilon ttt}\|_0^2 + \|\hat{u}_\varepsilon\|_2^2 \leq c_2 \|\hat{f}\|_1^2. \quad (2.6)$$

Из доказанных оценок методом Галеркина получим однозначную разрешимость задачи (2.1)–(2.3) из пространства $W(Q)$. Теорема 2.1 доказана.

Перейдем к доказательству разрешимости задачи (1.5)–(1.7).

2.1. Существование решения задачи.

Теорема 2.2. Пусть выполнены все условия теоремы 1.1-2.1. Тогда обобщенное решение задачи (1.5)–(1.7) существует и оно единственно в $W_2^2(Q)$.

Доказательство. Единственность решения задачи (1.5)–(1.7) в пространстве $W_2^2(Q)$ доказана в теореме 1.2. Теперь докажем существование решения задачи (1.5)–(1.7) в $W_2^2(Q)$. Для этого рассмотрим в области Q уравнение (2.1) и краевые условия (2.2),(2.3) при $\varepsilon > 0$. Так как выполнены все условия теоремы 2.1, то существует единственное обобщенное решение задачи (2.2)–(2.3) в $W(Q)$, при $\varepsilon > 0$ и для нее справедливы третья и четвертая оценки. Отсюда следует, по известной теореме о компактности [13], что из множества функций $\{\hat{u}_\varepsilon(x, t, \lambda)\}$, $\varepsilon > 0$, можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность функций, такую, что $\{\hat{u}_{\varepsilon_i}(x, t, \lambda)\} \rightarrow \hat{u}(x, t, \lambda)$ при $\varepsilon_i \rightarrow 0$ в $W(Q)$. Покажем, что предельная функция $\hat{u}(x, t, \lambda)$ удовлетворяет уравнению $\mathfrak{S}\hat{u} = \hat{f}$ (1.5) почти всюду в $W_2^2(Q)$. В самом

деле, так как подпоследовательность $\{\hat{u}_{\varepsilon_i}(x, t, \lambda)\}$ слабо сходится в $W(Q)$, а подпоследовательность $\{\sqrt{\varepsilon_i}\hat{u}_{\varepsilon_i ttt}(x, t, \lambda)\}$ равномерно ограничена в $L_2(Q)$ и оператор L линейный, то имеем

$$\Im \hat{u} - \hat{f} = \Im \hat{u} - \Im \hat{u}_{\varepsilon_i} + \varepsilon_i \frac{\partial^3 \hat{u}_{\varepsilon_i}}{\partial t^3} = \Im (\hat{u} - \hat{u}_{\varepsilon_i}) + \varepsilon_i \frac{\partial^3 \hat{u}_{\varepsilon_i}}{\partial t^3}. \quad (2.7)$$

Из равенства (2.7), переходя к пределу при $\varepsilon_i \rightarrow 0$, получим единственное обобщенное решение задачи (1.5)-(1.7) из пространства Соболева $W_2^2(Q)$ [7],[8],[14], [19]. Таким образом, Теорема 2.2 доказана.

3. Существование решения задачи (1.1)-(1.4).

Теперь перейдем к доказательству теоремы 1.1 об однозначной разрешимости обобщенного решения задачи (1.1)-(1.4) из пространства $W_2^{2,3}(G)$.

Для доказательства теоремы 1.1 необходима следующая лемма.

Лемма 3.1. Пусть выполнены все условия теоремы 1.1, 1.2, 2.1, 2.2. Тогда решение задачи (1.1)-(1.4) справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} I). \quad & \|u\|_{W_2^{1,3}(G)}^2 \leq c_1 \|f\|_{W_2^{0,3}(G)}^2, \\ II). \quad & \|u\|_{W_2^{2,3}(G)}^2 \leq c_2 \|f\|_{W_2^{1,3}(G)}^2. \end{aligned}$$

Доказательство. В теореме 1.2 для решения задачи (1.5)-(1.7) доказана справедливость оценки (1.11), то есть

$$\|\hat{u}\|_{W_2^1(Q)}^2 \leq c_1 \|\hat{f}\|_{L_2(Q)}^2.$$

Чтобы доказать, что $u_z \in L_2(G)$, нам необходимо умножить неравенство (1.11) на $(2\pi)^{-1/2} \cdot (1 + |\lambda|^2)^3$ и интегрировать по λ от $-\infty$ до $+\infty$, тогда получим

$$\begin{aligned} \|u\|_{W_2^{1,3}(G)}^2 &= (2\pi)^{-1/2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |\lambda|^2)^3 \cdot \|\hat{u}\|_{W_2^1(Q)}^2 d\lambda \leq \\ &\leq (2\pi)^{-1/2} \cdot c_1 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |\lambda|^2)^3 \cdot \|\hat{f}\|_{L_2(Q)}^2 d\lambda = c_1 \|f\|_{W_2^{0,3}(G)}^2, \end{aligned} \quad (3.1)$$

откуда следует выполнение первой априорной оценки леммы.

Точно так же используя условия теорем 2.1, 2.2 с предельным переходом при $\varepsilon \rightarrow 0$, из четвертой оценки нетрудно получить для решения задачи (1.5)-(1.7) следующую оценку.

$$\|\hat{u}\|_{W_2^2(Q)}^2 \leq c_2 \|\hat{f}\|_{W_2^1(Q)}^2. \quad (3.2)$$

Чтобы доказать, что $u_{zz} \in L_2(G)$, нам необходимо умножить неравенство (3.2) на $(2\pi)^{-1/2} \cdot (1 + |\lambda|^2)^3$ и интегрировать по λ от $-\infty$ до $+\infty$, тогда получим

$$\begin{aligned} \|u\|_{W_2^{2,3}(G)}^2 &= (2\pi)^{-1/2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |\lambda|^2)^3 \cdot \|\hat{u}\|_{W_2^2(Q)}^2 d\lambda \leq \\ &\leq (2\pi)^{-1/2} \cdot c_2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |\lambda|^2)^3 \cdot \|\hat{f}\|_{W_2^1(Q)}^2 d\lambda = c_2 \|f\|_{W_2^{1,3}(G)}^2, \end{aligned} \quad (3.3)$$

откуда следует справедливость второй оценки леммы. Лемма 3.1 доказана.

Доказательство теоремы 1.1. Из первой априорной оценки (3.1) леммы следует единственность обобщенного решения задачи (1.1)-(1.4), а из справедливости второй априорной оценки (3.3) следует существование обобщенного решения задачи (1.1)-(1.4) из пространства $W_2^{2,3}(G)$. Теорема 1.1 доказана.

4. Гладкость обобщенного решения задачи (1.1)-(1.4).

Теперь обратимся к исследованию гладкости обобщенного решения задачи (1.1)-(1.4) в пространствах $W_2^{m+2,s}(G)$, где m, s — целые конечные положительные числа, такие, что $m \geq 0, s \geq 3$.

Ниже, для простоты предположим, что коэффициенты уравнения (1.1) достаточно дифференцируемые функции в замкнутой области $\bar{Q}$.

Теорема 4.1. Пусть выполнены все условия теоремы 1.1, кроме того, пусть $D_t^q c|_{t=0} = D_t^q c|_{t=T}$. Тогда для любой функции $f \in W_2^{m+1,s}(G)$, такой, что $D_t^q f|_{t=0} = D_t^q f|_{t=T}$ ($q = 0, 1, 2, \dots, m$), существует, причем единственное, обобщенное решение задачи (1.1)-(1.4) из пространства $W_2^{m+2,s}(G)$, где m, s — любые целые конечные положительные числа, такие, что $s \geq m + 3, m = 0, 1, 2, 3, \dots$

Доказательство. Отметим, что в работах [7],[8] для уравнения Трикоми в случае, когда $\lambda = 0$ исследована гладкость обобщенного решения периодической краевой задачи (1.6),(1.7) в пространствах Соболева $W_2^{m+2}(Q)$ и доказаны соответствующие априорные оценки.

$$\|\hat{u}\|_{W_2^{m+2}(Q)}^2 \leq c_{m+1} \|\hat{f}\|_{W_2^{m+1}(Q)}^2 \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (4.1)$$

Аналогично такие же результаты можем получить в случае, когда $\lambda \neq 0$. Теперь чтобы доказать, что $D_z^{s-1} u \in L_2(G)$, где $s \geq m + 3, m = 0, 1, 2, 3, \dots$, и применить теорему вложения Соболева, нам необходимо умножить неравенство (4.1) на $(2\pi)^{-1/2} \cdot (1 + |\lambda|^2)^s$ и, интегрируя по λ от $-\infty$ до $+\infty$, можем получить

$$\begin{aligned} \|u\|_{W_2^{m+2,s}(G)}^2 &= (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |\lambda|^2)^s \cdot \|\hat{u}\|_{W_2^{m+2}(Q)}^2 d\lambda \leq \\ &\leq (2\pi)^{-1/2} c_{m+1} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |\lambda|^2)^s \cdot \|\hat{f}\|_{W_2^{m+1}(Q)}^2 d\lambda = c_{m+1} \|f\|_{W_2^{m+1,s}(G)}^2. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Отсюда получим существование единственного обобщенного решения задачи (1.1)-(1.4) из пространства $W_2^{m+2,s}(G)$. Теорема 4.1 доказана.

Замечание 4.1. Аналогично изучаются периодические краевые задачи для многомерного уравнения Чаплыгина.

Список литературы

- [1] Бицадзе А.В. Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанного типа. Новосибирск, ДАН СССР, (1953) 167-170.
- [2] Бицадзе А.В. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач. ДАН СССР, 185 issue 4, 739-740 (1969).
- [3] Франкль Ф.И. Обтекание профилей потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения. Прикладная математика и механика, 20 issue 2, 196-202 (1956).
- [4] Кальменов Т.Ш. О полупериодической задаче для многомерного уравнения смешанного типа. Дифференциальные уравнения, 14 issue 3, 546-548 (1978).

- [5] Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области. Докл. РАН. 413 issue 1, 23-26 (2007)
- [6] Пыбилов Б.Н. О корректности периодической задачи для многомерного уравнения смешанного типа. В. кн: Неклассические уравнения математической физики, 201-206 (1986).
- [7] Джамалов С.З. Об одной нелокальной краевой задаче с постоянными коэффициентами для многомерного уравнения смешанного типа первого рода. Вестник Самарского государственного технического университета, Сер.физ.-мат.науки, 21 issue 4, 1-14 (2017).
- [8] Джамалов С.З., Ашуров Р.Р. О гладкости одной нелокальной краевой задачи для многомерного уравнения Чаплыгина в пространстве. Казахский математический журнал, 18 issue 2, 59-70 (2018).
- [9] Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.Мир. (1971).
- [10] Хермандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными. Москва Издательство: Мир, (1965).
- [11] Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. Москва Издательство: Наука, (1977).
- [12] Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Москва Издательство: Наука, (1988).
- [13] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. Москва, Наука, (1973).
- [14] Врагов В.Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск, НГУ, (1983).
- [15] Кожанов А.И. Краевые задачи для уравнений математической физики нечетного порядка. Новосибирск, НГУ, (1990).
- [16] Dzhamalov S.Z., Turakulov Kh.Sh., Sultonov S.M. On a nonlocal boundary value problem for a three-dimensional Tricomi equation in a prismatic unbounded domain. Lobachevskii journal of mathematics. 43 issue 11, 3104-3111 (2022).
- [17] Dzhamalov S.Z., Turakulov Kh.Sh., Kenjaev R. On a Semi-periodic Boundary Value Problem For The Three-dimensional Tricomi Equation In An Unbounded Parallelepiped. AIP Conf. Proc. 2781 issue 11, 358-362 (2023).
- [18] Dzhamalov S.Z., Aliev M.G., Turakulov Kh.Sh. On a linear inverse problem for the three-dimensional Tricomi equation with nonlocal boundary conditions of periodic type in a prismatic unbounded domain. Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. Math. 42 issue 1, 86-98 (2002).
- [19] Dzhamalov S.Z., Sipatdinova B.K. On one linear inverse problem with nonlocal boundary conditions for the second kind, second order mixed type equation in an unbounded parallelepiped. Uzbek Mathematical Journal. 68 issue 3, 24-36 (2024).

On the smoothness of the periodic boundary value problem for the three-dimensional Chaplygin equation in an unbounded parallelepiped

Dzhamalov Sirojiddin Z., Turakulov Khamidulla Sh. and Sipatdinova Biybinaz R.

Abstract

The article investigates the uniqueness, existence, and smoothness of a generalized solution to the periodic boundary value problem for the three-dimensional Chaplygin equation in an unbounded parallelepiped. To prove the theorems on uniqueness, existence, and smoothness of the solution, the Fourier transform, the methods of ε -regularization, and a priori estimates are used.

Affiliations

Dzhamalov Sirojiddin Z.

Address: 1. Scientific Laboratory of Differential Equations and Their Applications, V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics Uzbekistan Academy of Sciences, University street 9, 100174, Tashkent, Uzbekistan.

2. Tashkent State University of Economic, Tashkent, 100066, Uzbekistan

e-mail: siroj63@mail.ru

ORCID ID: 0000-0001-9392-5464.

Turakulov Khamidulla Sh.

Address: Kokand State University, Kokand, 150700 Uzbekistan

e-mail: second@author.com

ORCID ID:57732238300

Sipatdinova Biybinaz K.

Address: Tashkent State Transport University, Temiryulchilar street 1, 1000167, Tashkent, Uzbekistan.

e-mail: sbiybinaz@mail.ru

ORCID ID: 0000-0002-7833-6992.