

Краевая задача с интегральным условием для уравнения смешанного типа с операторами Бесселя

К.Т. Каримов * Д.С. Олимова

Аннотация

В статье исследуется нелокальная краевая задача с интегральным условием для трехмерного уравнения смешанного типа с операторами Бесселя в параллелепипеде. Для обоснования единственности решения применяется метод спектрального анализа. На основе разложения по собственным функциям получено аналитическое представление решения в виде двойного ряда Фурье по тригонометрическим и бesselевым функциям. Предложенный подход обеспечивает конструктивное построение решения рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: уравнения смешанного типа; сингулярный коэффициент; оператор Бесселя; функция Бесселя; функция Макдональда; интегральное условие.

Предметная классификация AMS (2020): 35M10.

1. Введение. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$\left(B_{-1/2}^x + \operatorname{sgn} y \cdot B_{\beta-1/2}^y + B_{\gamma-1/2}^z \right) u(x, y, z) = 0 \quad (1.1)$$

в области $\Omega \setminus \{y = 0\}$, где $\Omega = \{(x, y, z) : x \in (0, a), y \in (-b_0, b), z \in (0, c)\}$, $a, b_0, b, c \in \mathbb{R}^+$, $\beta, \gamma \in (0, 1/2)$, а $B_q^y \equiv \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{2q+1}{y} \frac{\partial}{\partial y}$ – оператор Бесселя введенным в работе [1].

В области Ω уравнение (1.1) является уравнением смешанного типа. В подобласти $\Omega_+ = \Omega \cap \{y > 0\}$ оно относится к эллиптическому типу, а в подобласти $\Omega_- = \Omega \cap \{y < 0\}$ – к гиперболическому. Коэффициенты уравнения имеют сингулярности на плоскостях $y = 0$ и $z = 0$, причем плоскость $y = 0$ является также поверхностью, на которой происходит смена типа уравнения.

Задача В. Найти функцию $u(x, y, z)$, удовлетворяющую уравнению (1.1) в области $\Omega \setminus \{y = 0\}$ и условиям

$$u(x, y, z) \in C_{x,y,z}^{2,2,2}(\Omega), \quad u, u_x, z^{2\gamma} u_z \in C(\bar{\Omega}), \quad (1.2)$$

$$u(x, y, 0) = 0, \quad u(x, y, c) = 0, \quad x \in [0, a], \quad y \in [-b_0, b], \quad (1.3)$$

$$u(x, -b_0, z) = f_1(x, z), \quad u(x, b, z) = f_2(x, z), \quad x \in [0, a], \quad z \in [0, c]; \quad (1.4)$$

$$\lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{2\beta} u_y(x, y, z) = \lim_{y \rightarrow +0} y^{2\beta} u_y(x, y, z), \quad x \in (0, a), \quad z \in (0, c), \quad (1.5)$$

$$u(0, y, z) = 0, \quad y \in [-b_0, b], \quad z \in [0, c], \quad (1.6)$$

а также нелокальным интегральным условиям

$$\int_0^a u(x, y, z) dx = 0, \quad y \in [-b_0, b], \quad z \in [0, c]. \quad (1.7)$$

Условие (1.7) обычно называется интегральным условием первого рода. Сведем его к нелокальному условию другого вида.

Если проинтегрируем уравнение (1.1) при фиксированном $y \in (-b_0, b)$ и $z \in (0, c)$ по переменной x на промежутке от ε до $a - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число, то получим

$$\begin{aligned} & \int_{\varepsilon}^{a-\varepsilon} \left(B_{-1/2}^x + \operatorname{sgn} y \cdot B_{\beta-1/2}^y + B_{\gamma-1/2}^z \right) u(x, y, z) dx = \\ & = \int_{\varepsilon}^{a-\varepsilon} u_{xx}(x, y, z) dx + \int_{\varepsilon}^{a-\varepsilon} \left(\operatorname{sgn} y \cdot B_{\beta-1/2}^y + B_{\gamma-1/2}^z \right) u(x, y, z) dx = 0 \end{aligned}$$

или

$$u_x(a - \varepsilon, y, z) - u_x(\varepsilon, y, z) + \left(\operatorname{sgn} y \cdot B_{\beta-1/2}^y + B_{\gamma-1/2}^z \right) \int_{\varepsilon}^{a-\varepsilon} u(x, y, z) dx = 0.$$

В силу условий (1.7), в последнем равенстве перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, в результате получим условие вида $u_x(a, y, z) - u_x(0, y, z) = 0$. Таким образом, если функция $u(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению (1.1) и условию (1.7), то эта функция удовлетворяет условию

$$u_x(a, y, z) - u_x(0, y, z) = 0, \quad y \in [-b_0, b], \quad z \in [0, c], \quad (1.8)$$

выражающее равенство потоков через боковые стороны $x = 0$ и $x = 1$ параллелепипеда Ω .

Нелокальные краевые задачи с интегральными условиями возникают при математическом моделировании физических процессов, в которых непосредственное измерение величин на границе исследуемой области невозможно или существенно затруднено. К числу таких процессов относятся, в частности, задачи теплопроводности [2], [3] и влагопереноса в капиллярно-пористых средах [4]. В связи с этим исследование нелокальных задач с интегральными условиями представляет значительный теоретический и прикладной интерес. В последние годы данное направление активно развивается: изучаются вопросы существования и единственности решений, а также разрабатываются эффективные методы доказательства разрешимости таких задач (см., например, [5], [6], [7], [8]).

Особенностью рассматриваемой нелокальной задачи является несамосопряженность соответствующего дифференциального оператора. Вследствие этого система его собственных функций, вообще говоря, не является полной, что требует ее дополнения системой присоединенных функций. Фундаментальные результаты, посвященные исследованию базисных свойств систем собственных и присоединенных функций, получены в работах [9], [10]. Следует также отметить исследования [11], [12], [13], [14], [15], в которых рассмотрен ряд близких по постановке и методам исследования нелокальных задач, главным образом в двумерных областях.

Нелокальные краевые задачи для эллиптических уравнений с сингулярными коэффициентами в трехмерных областях исследованы в работах [16], [17], [18], [19]. Однако аналогичные нелокальные задачи для трехмерных уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами до настоящего времени методом спектрального анализа практически не изучены, что определяет актуальность настоящего исследования.

В настоящей работе вместо задачи {(1.1)-(1.7)} рассматривается задача {(1.1)-(1.6), (1.8)}.

2. Построение собственных и присоединенных функций

Для получения решения задач {(1.1)-(1.6), (1.8)}, формально применим метод Фурье. Сначала найдем нетривиальные решения задачи {(1.1)-(1.3), (1.5), (1.6), (1.8)}. С этой целью, разделив переменные по формуле $u(x, y, z) = X(x)Q(y)Z(z)$, из уравнения (1.1) и краевых условий (1.3), (1.5), (1.6), (1.8) получим уравнение

$$\operatorname{sgn} y \cdot B_{\beta-1/2}^y Q(y) - \lambda Q(y) = 0, \quad y \in (-b_0, 0) \cup (0, b) \quad (2.1)$$

и задачи на собственные значения

$$B_{\gamma-1/2}^z Z(z) + (\lambda - \mu) Z(z) = 0, \quad Z(0) = 0, \quad Z(c) = 0; \quad (2.2)$$

$$X''(x) + \mu X(x) = 0, \quad (2.3)$$

$$X(0) = 0, \quad X'(0) = X'(a), \quad (2.4)$$

где $\mu, \lambda \in R$ – константа разделения.

Сначала рассмотрим задачу {(2.3), (2.4)}. Нетрудно убедиться, что при $\mu < 0$ задача не имеет нетривиальных решений. При $\mu = 0$ решением задачи является функция $X(x) = c_1 x$, где $c_1 = \text{const} \neq 0$. При $\mu > 0$, решение задачи {(2.3), (2.4)} будем искать в виде $X(x) = c_2 \sin \sqrt{\mu} x + c_3 \cos \sqrt{\mu} x$, где c_2, c_3 – произвольные постоянные. Определим константы c_2, c_3 из условий (2.4). Из первого условия (2.4) следует, что $c_3 = 0$. Из второго условия (2.4) получим $c_2 \sqrt{\mu} [1 - \cos(\sqrt{\mu} a)] = 0, c_2 \neq 0$. Решая это уравнение, находим $\mu_n = (2\pi n/a)^2, n \in N$.

Итак, задача {(2.3), (2.4)} имеет собственные значения вида $\mu_n = (2\pi n)^2, n = 0, 1, 2, \dots$. Собственные функции, соответствующие этим собственным значениям, имеют вид: $X_0(x) = c_1 x, X_n(x) = c_2 \sin(2\pi n x/a), n \in N$. Для удобства дальнейших вычислений положим $c_1 = 1, c_2 = 1$:

$$X_0(x) = x, \quad X_n(x) = \sin(2\pi n x/a), \quad n \in N. \quad (2.5)$$

Отметим, что собственные функции (2.5) не полны и не образуют базис в пространстве $L_2(0, a)$. Дополним собственные функции $X_n(x)$ до полной системы присоединенными функциями краевой задачи {(2.3), (2.4)}.

Присоединенную функцию $\tilde{X}_n(x)$, отвечающую тому же μ_n , что и собственной функции $X_n(x)$, определим как решение следующей задачи:

$$\tilde{X}_n''(x) + \mu_n \tilde{X}_n(x) = p_n X_n(x), \quad \tilde{X}_n(0) = 0, \quad \tilde{X}_n'(0) = \tilde{X}_n'(a), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.6)$$

где $p_n \neq 0$ – произвольная постоянная.

При $n = 0$ задача (2.6) не имеет решения. Если положить $p_n = -4\pi n/a$, то для $n \in N$ получим $\tilde{X}_n(x) = x \cos(2\pi n x/a)$.

Систему собственных и присоединенных функций задачи {(2.3), (2.4)} обозначим следующим образом:

$$X_0(x) = x, \quad X_n(x) = \sin(2\pi n x/a), \quad \tilde{X}_n(x) = x \cos(2\pi n x/a), \quad n \in N. \quad (2.7)$$

Каждому собственному значению μ_n при $n \in N$ соответствует собственная функция $X_n(x)$ и присоединенная функция $\tilde{X}_n(x)$.

Как известно [20], задача {(2.3), (2.4)} является несамосопряженной. Сопряженной ей будет следующая задача:

$$T''(x) + \mu T(x) = 0, \quad x \in (0, a), \quad (2.8)$$

$$T'(a) = 0, \quad T(0) = T(a). \quad (2.9)$$

В самом деле, $\int_0^a X''(x) T(x) dx = \{X'(a)[T(a) - T(0)] - X(a)T'(a)\} + \int_0^a X(x)T''(x) dx$.

Отсюда видно, что выражение в фигурной скобке будет равно нулю при $T(a) = T(0), T'(a) = 0$.

Решая задачу {(2.8), (2.9)}, найдем собственные значения $\bar{\mu}_n = \mu_n = (2\pi n/a)^2$, $n = 0, 1, \dots$ и собственные функции

$$T_0(x) = s_0, \quad T_n(x) = s_n \cos(2\pi nx/a), \quad n \in N,$$

где $s_n \neq 0$ — произвольные постоянные.

Из соображений биортонормировки, положим $s_0 = \frac{2}{a^2}$, $s_n = \frac{4}{a^2}$, $n \in N$.

Присоединенные функции сопряженной задачи {(2.8), (2.9)} определяются из задачи

$$\tilde{T}_n''(x) + \bar{\mu}_n \tilde{T}_n(x) = p_n T_n(x), \quad \tilde{T}_n(0) = \tilde{T}_n(a), \quad \tilde{T}_n'(a) = 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.10)$$

Они имеют вид $\tilde{T}_n(x) = (4/a^2)(a-x) \sin(2\pi nx/a)$, $n \in N$. При $n = 0$ задача (2.10) не имеет решения.

Систему собственных и присоединенных функций сопряженной задачи обозначим следующим образом:

$$T_0(x) = \frac{2}{a^2}, \quad T_n(x) = \frac{4}{a^2} \cos \frac{2\pi nx}{a}, \quad \tilde{T}_n(x) = \frac{4(a-x)}{a^2} \sin \frac{2\pi nx}{a}, \quad n \in N. \quad (2.11)$$

При этом каждому $\mu_n = (2\pi n/a)^2$, $n \in N$ соответствует собственная функция $T_n(x)$ и присоединенная $\tilde{T}_n(x)$.

Лемма 2.1. Последовательности функций (15) и (19), образуют биортогональную на интервале $(0, a)$ систему функций.

Доказательство леммы 2.1 проводится непосредственно с помощью вычисления соответствующих интегралов.

В работе [13] доказано, что система функций (2.7) и (2.11) полна в пространстве $L_2(0, a)$ и образует базис в пространстве $L_2(0, a)$.

Теперь перейдем к исследованию задачи (2.2). Решение задачи (2.2) определяется формулой [17]

$$Z_m(z) = z^{1/2-\gamma} J_{1/2-\gamma}(\sigma_m z/c), \quad m \in N. \quad (2.12)$$

Здесь $J_\nu(z)$ — функция Бесселя первого рода порядка ν , а σ_m — m -ый положительный корень уравнения $J_{1/2-\gamma}(z) = 0$, $\lambda_{nm} = (2\pi n/a)^2 + (\sigma_m/c)^2$, $n+1, m \in N$.

Согласно работе [21], система собственных функций (2.2) ортогональна и полна в пространстве $L_2(0, c)$ с весом $z^{2\gamma}$.

Полагая в уравнении (2.2) $\lambda = \lambda_{nm}$, найдем его общее решение:

$$Q_{nm}(y) = \begin{cases} a_{nm} y^{1/2-\beta} I_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}} y) + b_{nm} y^{1/2-\beta} K_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}} y), & y \in (0, b], \\ c_{nm} (-y)^{1/2-\beta} J_{1/2-\beta}[\sqrt{\lambda_{nm}} (-y)] + d_{nm} (-y)^{1/2-\beta} Y_{1/2-\beta}[\sqrt{\lambda_{nm}} (-y)], & y \in [-b_0, 0), \end{cases} \quad (2.13)$$

где a_{nm} , b_{nm} , c_{nm} и d_{nm} — произвольные постоянные, $I_l(x)$ и $K_l(x)$ — функция Бесселя мнимого аргумента и функция Макдональда порядка l [21] соответственно.

Теперь в (2.13) на основании $u \in C(\bar{\Omega})$ и условия склеивания (1.5) подберем постоянные a_{nm} , b_{nm} , c_{nm} и d_{nm} так, чтобы выполнялись условия

$$Q_{nm}(+0) = Q_{nm}(-0), \quad \lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{2\beta} Q'_{nm}(y) = \lim_{y \rightarrow +0} y^{2\beta} Q'_{nm}(y). \quad (2.14)$$

Из (2.13) в силу $\beta \in (0, 1/2)$ следует, что первое из равенств (2.14) выполнено, если $d_{nm} = -\pi b_{nm}/2$ при любых a_{nm} и c_{nm} , а второе равенство имеет место, при $c_{nm} = \frac{\pi b_{nm}}{2} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta\pi}{2}\right) - a_{nm}$ и $d_{nm} = -\frac{\pi b_{nm}}{2}$. С учетом последних равенств, функция (2.13) перепишется в виде

$$Q_{nm}(y) = \begin{cases} a_{nm} y^{1/2-\beta} I_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}} y) + b_{nm} y^{1/2-\beta} K_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}} y), & y \in [0, b], \\ -a_{nm} (-y)^{1/2-\beta} J_{1/2-\beta}[\sqrt{\lambda_{nm}} (-y)] + b_{nm} (-y)^{1/2-\beta} \bar{Y}_{1/2-\beta}[\sqrt{\lambda_{nm}} (-y)], & y \in [-b_0, 0], \end{cases} \quad (2.15)$$

где $\bar{Y}_{1/2-\beta}[\sqrt{\lambda_{nm}} (-y)] = \frac{\pi}{2 \cos \beta\pi} \{J_{1/2-\beta}[\sqrt{\lambda_{nm}} (-y)] + J_{\beta-1/2}[\sqrt{\lambda_{nm}} (-y)]\}$.

3. Единственность решения задачи В

Пусть $u(x, y, z)$ – решение задачи В. Рассмотрим следующие функции:

$$\omega_{0m}(y) = d_m \int_0^c \int_0^a u(x, y, z) T_0(x) z^{2\gamma} Z_m(z) dx dz, \quad m \in N, \quad (3.1)$$

$$\omega_{nm}(y) = d_m \int_0^c \int_0^a u(x, y, z) T_n(x) z^{2\gamma} Z_m(z) dx dz, \quad m, n \in N, \quad (3.2)$$

$$\tilde{\omega}_{nm}(y) = d_m \int_0^c \int_0^a u(x, y, z) \tilde{T}_n(x) z^{2\gamma} Z_m(z) dx dz, \quad n, m \in N, \quad (3.3)$$

где $\{T_0(x), T_n(x), \tilde{T}_n(x)\}$ и $Z_m(z)$ – функции, определенные равенствами (2.11) и (2.12) соответственно, а $d_m = 2/[cJ_{3/2-\gamma}(\sigma_m)]^2$.

Аналогично задаче А, изученными авторами [22], можно доказать, что функция $\omega_{nm}(y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\operatorname{sgn} y \cdot B_{\beta-1/2}^y \omega_{nm}(y) - \lambda_{nm} \omega_{nm}(y) = 0, \quad y \in (-b_0, 0) \cup (0, b),$$

т.е. уравнению (2.1) при $\lambda = \lambda_{nm}$.

Кроме того, в силу граничных условий (1.4), из (3.2) следует, что функция $\omega_{nm}(y)$ удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$\omega_{nm}(-b_0) = f_{1nm}, \quad \omega_{nm}(b) = f_{2nm}, \quad (3.4)$$

где $f_{jnm} = d_m \int_0^c \int_0^a f_j(x, z) T_n(x) z^{2\gamma} Z_m(z) dx dz$, $j = \overline{1, 2}$.

Отсюда следует, что функция $\omega_{nm}(y)$, которая имеет вид (3.2), является решением уравнения (2.1) при $\lambda = \lambda_{nm}$, удовлетворяющим условиям (3.4). Поэтому, удовлетворяя общее решение (2.15) уравнения (2.1) (при $\lambda = \lambda_{nm}$) условиям (3.4), получим систему уравнений

$$\begin{cases} a_{nm} I_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}} b) + b_{nm} K_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}} b) = b^{\beta-1/2} f_{2nm}, \\ -a_{nm} J_{1/2-\beta}[\sqrt{\lambda_{nm}} b_0] + b_{nm} \bar{Y}_{1/2-\beta}[\sqrt{\lambda_{nm}} b_0] = b_0^{\beta-1/2} f_{1nm}. \end{cases} \quad (3.5)$$

откуда при условии

$$\Delta_{nm}(b_0, b) = I_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}} b) \bar{Y}_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}} b_0) + K_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}} b) J_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}} b_0) \neq 0, \quad (3.6)$$

однозначно находим коэффициенты a_{nm} и b_{nm} :

$$a_{nm} = \frac{b^{\beta-1/2} \bar{Y}_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}} b_0) f_{2nm} - b_0^{\beta-1/2} K_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}} b) f_{1nm}}{\Delta_{nm}(b_0, b)},$$

$$b_{nm} = \frac{b_0^{\beta-1/2} I_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}} b) f_{1nm} + b^{\beta-1/2} J_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}} b_0) f_{2nm}}{\Delta_{nm}(b_0, b)}.$$

Подставляя эти коэффициенты в (2.15), получим

$$\omega_{nm}(y) = \begin{cases} \left[(y/b)^{1/2-\beta} \Delta_{nm}(b_0, y) f_{2nm} + \right. \\ \left. + (y/b_0)^{1/2-\beta} A_{nm}(y, b) f_{1nm} \right] / \Delta_{nm}(b_0, b), \quad y \in [0, b]; \\ \left[(-y/b_0)^{1/2-\beta} \Delta_{nm}(-y, b) f_{1nm} + \right. \\ \left. + (-y/b)^{1/2-\beta} B_{nm}(b_0, -y) f_{2nm} \right] / \Delta_{nm}(b_0, b), \quad y \in [-b_0, 0], \end{cases} \quad (3.7)$$

где

$$\begin{aligned} A_{nm}(y, b) &= I_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}b}) K_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}y}) - K_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}b}) I_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}y}), \\ B_{nm}(b_0, -y) &= J_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}b_0}) \bar{Y}_{1/2-\beta}(-\sqrt{\lambda_{nm}y}) - \bar{Y}_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}b_0}) J_{1/2-\beta}(-\sqrt{\lambda_{nm}y}). \end{aligned}$$

Аналогично $\omega_{nm}(y)$ получим, что функция $\omega_{0m}(y)$, определенная формулой (24), удовлетворяет условиям

$$\operatorname{sgny} \cdot B_{\beta-1/2}^y \omega_{0m}(y) - \lambda_{0m} \omega_{0m}(y) = 0, \quad y \in (-b_0, 0) \cup (0, b), \quad (3.8)$$

$$\omega_{0m}(-0) = \omega_{0m}(+0), \quad \lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{2\beta} \omega'_{0m}(y) = \lim_{y \rightarrow 0} y^{2\beta} \omega'_{0m}(y), \quad (3.9)$$

$$\omega_{0m}(-b_0) = f_{10m}, \quad \omega_{0m}(b) = f_{20m}, \quad (3.10)$$

где $f_{j0m} = \frac{2d_m}{a^2} \int_0^c \int_0^a f_j(x, z) z^{2\gamma} Z_m(z) dx dz, \quad j = \overline{1, 2}.$

Единственное решение задачи (3.8)-(3.10) определяется формулой

$$\omega_{0m}(y) = \begin{cases} \left[(y/b)^{1/2-\beta} \Delta_{0m}(b_0, y) f_{20m} + \right. \\ \left. + (y/b_0)^{1/2-\beta} A_{0m}(y, b) f_{10m} \right] / \Delta_{0m}(b_0, b), \quad y \in [0, b]; \\ \left[(-y/b_0)^{1/2-\beta} \Delta_{0m}(-y, b) f_{10m} + \right. \\ \left. + (-y/b)^{1/2-\beta} B_{0m}(b_0, -y) f_{20m} \right] / \Delta_{0m}(b_0, b), \quad y \in [-b_0, 0], \end{cases} \quad (3.11)$$

где

$$\begin{aligned} A_{0m}(y, b) &= I_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{0m}b}) K_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{0m}y}) - K_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{0m}b}) I_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{0m}y}), \\ B_{0m}(b_0, -y) &= J_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{0m}b_0}) \bar{Y}_{1/2-\beta}(-\sqrt{\lambda_{0m}y}) - \bar{Y}_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{0m}b_0}) J_{1/2-\beta}(-\sqrt{\lambda_{0m}y}). \\ \Delta_{0m}(b_0, b) &= I_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{0m}b}) \bar{Y}_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{0m}b_0}) + K_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{0m}b}) J_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{0m}b_0}) \neq 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Повторяя те же действия над функцией $\omega_{nm}(y)$, заданной формулой (3.4), что и для функции $\tilde{\omega}_{nm}(y)$, получим неоднородное дифференциальное уравнение

$$[\tilde{\omega}_{nm}(y)]'' + \frac{2\beta}{y} [\tilde{\omega}_{nm}(y)]' - \lambda_{nm} \tilde{\omega}_{nm}(y) = \frac{4\pi n}{a} \omega_{nm}(y), \quad y \in (-b_0, 0) \cup (0, b), \quad (3.13)$$

где $y \in (-b_0, 0) \cup (0, b)$, с соответствующими граничными условиями

$$\tilde{\omega}_{nm}(-b_0) = \tilde{f}_{1nm}, \quad \tilde{\omega}_{nm}(b) = \tilde{f}_{2nm}, \quad (3.14)$$

и условиями сопряжения

$$\tilde{\omega}_{nm}(0+0) = \tilde{\omega}_{nm}(0-0), \quad \lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{2\beta} \tilde{\omega}'_{nm}(y) = \lim_{y \rightarrow 0} y^{2\beta} \tilde{\omega}'_{nm}(y), \quad (3.15)$$

где $\tilde{f}_{jnm} = d_m \int_0^c \int_0^a f_j(x, z) \tilde{T}_n(x) z^{2\gamma} Z_m(z) dx dz, \quad j = \overline{1, 2}$, а функция $\omega_{nm}(y)$ определяется равенством (3.7).

На основании метода вариации произвольных постоянных найдем решение задачи (3.13)-(3.15), которое определяется по формуле

$$\tilde{\omega}_{nm}(y) = \begin{cases} \left[(y/b)^{1/2-\beta} \Delta_{nm}(b_0, y) \tilde{f}_{2nm} + \right. \\ \left. + (y/b_0)^{1/2-\beta} A_{nm}(y, b) \tilde{f}_{1nm} \right] / \Delta_{nm}(b_0, b) + \tilde{\omega}_{nm}^+(y), \quad y \in [0, b]; \\ \left[(-y/b_0)^{1/2-\beta} \Delta_{nm}(-y, b) \tilde{f}_{1nm} + \right. \\ \left. + (-y/b)^{1/2-\beta} B_{nm}(b_0, -y) \tilde{f}_{2nm} \right] / \Delta_{nm}(b_0, b) + \tilde{\omega}_{nm}^-(y), \quad y \in [-b_0, 0], \end{cases} \quad (3.16)$$

где функции $\tilde{\omega}_{nm}^+(y)$ и $\tilde{\omega}_{nm}^-(y)$ определены соответственно равенствами

$$\tilde{\omega}_{nm}^+(y) = \frac{4\pi n}{a\Delta_{nm}(b_0, b)} \left\{ y^{1/2-\beta} A_{nm}(y, b) \left[\int_{-b_0}^0 (-t)^{1/2+\beta} B_{nm}(b_0, -t) \omega_{nm}(t) dt + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_0^y t^{1/2+\beta} A_{nm}(t, b) \omega_{nm}(t) dt \right] + y^{1/2-\beta} \Delta_{nm}(b_0, y) \int_y^b t^{1/2+\beta} A_{nm}(t, b) \omega_{nm}(t) dt \right\}, \quad (3.17)$$

$$\tilde{\omega}_{nm}^-(y) = \frac{4\pi n}{a\Delta_{nm}(b_0, b)} \left\{ (-y)^{1/2-\beta} \Delta_{nm}(-y, b) \int_{-b_0}^y (-t)^{1/2+\beta} B_{nm}(b_0, -t) \omega_{nm}(t) dt + \right. \\ \left. + (-y)^{1/2-\beta} B_{nm}(b_0, -y) \left[\int_y^0 (-t)^{1/2+\beta} B_{nm}(b_0, -t) \omega_{nm}(t) dt + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_0^b t^{1/2+\beta} A_{nm}(t, b) \omega_{nm}(t) dt \right] \right\}. \quad (3.18)$$

При условии (3.6) из формул (3.7), (3.11), (3.7) следует единственность решения задачи В, так как если $f_1(x, z) \equiv 0$, $f_2(x, z) \equiv 0$ на $x \in [0, a]$, $z \in [0, c]$, то $\omega_{nm}(y) \equiv 0$, $\omega_{0m}(y) \equiv 0$, $\tilde{\omega}_{nm}(y) \equiv 0$ для $n \in N$ на $[-b_0, b]$. Тогда из (3.1)-(3.3) имеем

$$\int_0^c \int_0^a u(x, y, z) T_0(x) z^{2\gamma} Z_m(z) dx dz = 0, \quad \int_0^c \int_0^a u(x, y, z) T_n(x) z^{2\gamma} Z_m(z) dx dz = 0, \\ \int_0^c \int_0^a u(x, y, z) \tilde{T}_n(x) z^{2\gamma} Z_m(z) dx dz = 0, \quad n \in N.$$

Отсюда в силу полноты системы функций (2.11) в пространстве $L_2(0, a)$ и $u(x, y, z) \in C(\bar{\Omega})$ следует, что $\int_0^c u(x, y, z) z^{2\gamma} Z_m(z) dz = 0$. В силу полноты системы функций (2.12) с весом $z^{2\gamma}$ в пространстве $L_2(0, c)$ и $u(x, y, z) \in C(\bar{\Omega})$, следует, что $u(x, y, z) \equiv 0$ в $\bar{\Omega}$.

Если при некоторых b_0, b и $n = l$, $m = k \in N$ нарушено условие (3.6), т.е. $\Delta_{lk}(b_0, b) = 0$, то однородная задача В (где $f_1(x, z) = f_2(x, z) = 0$) имеет нетривиальное решение

$$u_{lk}(x, y, z) = \begin{cases} y^{1/2-\beta} [\Delta_{lk}(b_0, y) + A_{lk}(y, b)] X_l(x) Z_k(z), & y > 0; \\ (-y)^{1/2-\beta} [\Delta_{lk}(-y, b) + B_{lk}(b_0, -y)] X_l(x) Z_k(z), & y < 0, \end{cases} \quad (3.19)$$

где $Z_k(z)$ находятся по формуле (2.12), $X_l(x) = A_1 x + A_2 \sin(2\pi n x/a) + A_3 x \cos(2\pi n x/a)$, $A_j = \overline{1, 3}$ – произвольные постоянные.

Нетрудно убедиться, что построенная функция (3.19) относится к классу $u(x, y, z) \in C_{x,y,z}^{2,2,2}(\Omega)$ и является решением уравнения (1.1) во всей области Ω .

Естественно возникает вопрос о существовании значений параметра b_0 , при которых выражение $\Delta_{nm}(b_0, b)$ обращается в нуль при фиксированных n и m . Представим выражение $\Delta_{nm}(b_0, b)$ в следующем виде:

$$\Delta_{nm}(b_0, b) = I_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}} b) \delta_{nm}(b_0, b),$$

где

$$\delta_{nm}(b_0, b) = \bar{Y}_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}} b_0) + \frac{K_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}} b)}{I_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}} b)} J_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}} b_0).$$

Существование нулей $\delta_{nm}(b_0, b)$ относительно b_0 следует из того, что $J_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}}y)$ и $\bar{Y}_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}}y)$, $y = b_0$, являются линейно независимыми решениями уравнения Бесселя

$$y^2 Q''(y) + yQ'(y) + [\lambda_{nm}y^2 - (1/2 - \beta)^2] Q(y) = 0. \quad (3.20)$$

Поскольку функции $J_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}}y)$ и $\delta_{nm}(y, b)$ являются линейно независимыми решениями уравнения (3.20), то, согласно общей теории линейных дифференциальных уравнений [23], их нули строго чередуются. Иными словами, на каждом интервале между двумя последовательными нулями одного из этих решений содержится ровно один нуль другого. Поскольку функция $J_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}}y)$ имеет счётное множество положительных нулей, функция $\delta_{nm}(y, b)$ также обладает счётным множеством положительных нулей относительно переменной y при фиксированном b_0 . Тем самым доказано следующее утверждение.

Теорема 3.1. Если решение задачи В существует, то оно является единственным тогда и только тогда, когда $\Delta_{nm}(b_0, b) \neq 0$ при всех $n, m \in N$.

4. Существование решения задачи В

Рассмотрим теперь вопрос о существовании решения задачи В. Поскольку b_0 и b — любые положительные числа, при достаточно больших n и m выражение $\Delta_{nm}(b_0, b)$, которое входит в знаменатели формул (3.7), (3.11), (3.16), может стать достаточно малым из-за существования счетного множества нулей относительно b_0 . Следовательно, возникает проблема малых знаменателей как и при изучении задачи А для уравнения (1) [22].

Как известно [24], асимптотическое поведение функции $I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$ при больших x , имеет вид

$$I_\nu(x) \approx \frac{e^x}{(2\pi x)^{1/2}}, \quad K_\nu(x) \approx \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x}, \quad (4.1)$$

поэтому величина $\frac{K_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}}b)}{I_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}}b)} J_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}}b_0)$ есть бесконечно малая более высокого порядка, чем $\bar{Y}_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}}b_0)$ при больших n и m .

Поэтому достаточно рассмотреть выражение

$$\tilde{\delta}_{nm}(b_0) = \bar{Y}_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}}b_0) = \frac{\pi}{2 \cos \beta \pi} \left[J_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}}b_0) + J_{\beta-1/2}(\sqrt{\lambda_{nm}}b_0) \right],$$

которое также имеет счетное множество положительных нулей относительно b_0 .

Лемма 4.1. Пусть b_0 — любое натуральное число или $b_0 = p/q$ — любое дробное число, где $(p, q) = 1$, $(4, q) = 1$, $p, q \in N$, причем

$$n^2 + (m - \gamma/2)^2 / c^2 \neq (d - 1/4)^2 q^2 / p^2, \quad d \in Z, \quad \forall n, m \in N,$$

то существуют положительное число C_0 и $\forall n_0, m_0 \in N$, такие, что при всех $n > n_0$ и $m > m_0$ справедлива оценка

$$|\tilde{\delta}_{nm}(b)| \geq C_0. \quad (4.2)$$

Доказательство. Согласно работе [21], при достаточно больших m , для m -ного положительного корня уравнения $J_{1/2-\gamma}(x) = 0$, имеет место соотношение

$$\sigma_m \approx \pi(m - \gamma/2). \quad (4.3)$$

При достаточно больших n , справедлива следующая приближительная равенства

$$\mu_n \approx (\pi n)^2. \quad (4.4)$$

Тогда в силу асимптотической формулы функции Бесселя при достаточно больших ξ [24]

$$J_\nu(\xi) \approx \left(\frac{2}{\pi\xi}\right)^{1/2} \cos\left(\xi - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad (4.5)$$

и с учетом (4.2) и (4.3) справедлива приближительная равенства

$$\lambda_{nm}^{1/4} \Delta_{nm}(b_0) \approx A \sin\left(\sqrt{\lambda_{nm}} b_0 + \pi/4\right), \quad (4.6)$$

где $A = \sqrt{\pi} (2b_0)^{-1/2} \cos^{-1}(\beta\pi/2 + \pi/4)$.

Предположим, что πn , $(m - \gamma/2)\pi/c$ и πh — числа Пифагора, т.е. $(\pi n)^2 + \left[\frac{\pi}{c}(m - \frac{\gamma}{2})\right]^2 = \pi^2 h^2$, $h \in R$. Для примера здесь покажем оценку (4.6), для случая, когда h — натуральное число. Тогда (4.6) переписывается в виде $\sqrt{\pi h} \Delta_{nm}(b_0) \approx A \sin(\pi h b_0 + \pi/4)$.

Если, например, $b_0 = l \in N$, то получим

$$\left|\sqrt{\pi h} \Delta_{nm}(l)\right| = A \sin \frac{\pi}{4} = \frac{A}{\sqrt{2}} \geq \tilde{C}_0 > 0, \quad \tilde{C}_0 = const. \quad (4.7)$$

Пусть $b_0 = p/q$ — рациональное число, где $p, q \in N$, $(p, q) = (4, q) = 1$. Тогда

$$\left|\sqrt{\pi h} \Delta_{nm}\left(\frac{p}{q}\right)\right| = A \left|\sin \pi \left(\frac{hp}{q} + \frac{1}{4}\right)\right|.$$

Разделим hp на q с остатком: $hp = sq + r$, $s = 1, 2, \dots, r = 0, 1, \dots, 0 \leq r \leq q-1$. Если учесть это, то выражение $\sqrt{\pi h} \Delta_{nm}(p/q)$ примет вид

$$\sqrt{\pi h} \Delta_{nm}\left(\frac{p}{q}\right) = A \left|\sin \pi \left(\frac{r}{q} + \frac{1}{4}\right)\right| \geq \tilde{C}_0 > 0. \quad (4.8)$$

Потребуем, чтобы число $\tilde{C}_0$ было больше нуля, а это возможно только тогда, когда $hp/q + 1/4 \neq d$, $d \in Z$ или $n^2 + (m - \gamma/2)^2/c^2 \neq (d - 1/4)^2 q^2/p^2$, $d \in Z$.

Из (4.7), (4.8) и $\lambda_{nm}^{-1/4} < 1$ при всех $n > n_0$ и $m > m_0$ следует справедливость оценки (4.2). Лемма 4.1 доказана.

Если $\delta_{nm}(b_0, b) \neq 0$ при $n = 1, 2, \dots, n_0$ и выполнена оценка (4.2), то решение задачи В можно представить в виде суммы двойного ряда

$$u(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \omega_{0m}(y) X_0(x) Z_m(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \omega_{nm}(y) \tilde{X}_n(x) Z_m(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\omega}_{nm}(y) X_n(x) Z_m(z), \quad (4.9)$$

где функции $\omega_{0m}(y)$, $\omega_{nm}(y)$, $\tilde{\omega}_{nm}(y)$, $X_0(x)$, $X_n(x)$, $\tilde{X}_n(x)$ и $Z_m(z)$ находятся соответственно по формулам (3.11), (3.7), (3.16), (2.7), (2.7), (2.7) и (2.12).

Теперь покажем, что при определенных условиях относительно функций $f_1(x, z)$ и $f_2(x, z)$ ряд (4.9) и его производные u_x , $z^{2\gamma} u_z$ в замкнутой области $\bar{\Omega}$, а производные второго порядка по x и $B_{\beta-1/2}^y u$, $B_{\gamma-1/2}^z u$ соответственно в любом компакте $K \subset \Omega_+ \cup \Omega_-$ сходятся равномерно.

Лемма 4.2. Для функций (2.7) и (2.11) справедливы следующие оценки

$$|R_n(x)| \leq b_1, |R'_n(x)| \leq b_2 n, |R''_n(x)| \leq b_3 n^2, \quad (4.10)$$

где b_j , $j = \overline{1, 3}$ — положительные постоянные, а в качестве функции $R_n(x)$ можно взять одну из функций, приведенных в формулах (2.7) и (2.11).

Справедливость оценки (4.10) легко следует из свойства тригонометрических функций.

В работе [22] доказаны следующие оценки:

$$|Z_m(z)| \leq b_4 \frac{z^{1-2\gamma}}{\sigma_m^{\gamma-1/2}}, \quad |z^{2\gamma} Z'_m(z)| \leq b_5 \sigma_m^{1/2}, \quad \left|B_{\gamma-1/2}^z Z_m(z)\right| \leq b_4 \frac{z^{1-2\gamma}}{\sigma_m^{\gamma-5/2}}, \quad (4.11)$$

$$J_{3/2-\gamma}^2(\sigma_m) \geq b_6(\sigma_m)^{-1}, \quad |d_m| \leq b_7\sigma_m, \quad (4.12)$$

где $b_j, j = \overline{4, 7}$ – положительные постоянные.

Аналогично леммам 4.7 работы [22], можно доказать, следующую лемму.

Лемма 4.3. Если $\beta, \gamma \in (0, 1/2)$ и функция $f_1(x, z)$ и $f_2(x, z)$ удовлетворяют условиям

I. $f_l(x, z) \in C_{x,z}^{4,5}(\Pi)$, $l = \overline{1, 2}$, где $\Pi = \{(x, z) : x \in (0, a), z \in (0, c)\}$;

II. $(\partial^j/\partial x^j) f_l(x, z)|_{x=0} = 0$, $(\partial^j/\partial x^j) f_l(x, z)|_{x=a} = 0$, $l = \overline{1, 2}$, $j = \overline{0, 3}$;

III. $(\partial^j/\partial z^j) f_l(x, z)|_{z=0} = 0$, $(\partial^j/\partial z^j) f_l(x, z)|_{z=c} = 0$, $l = \overline{1, 2}$, $j = \overline{0, 4}$.

Тогда для коэффициентов f_{lnm} , $l = \overline{1, 2}$, определенных равенствами (21), справедлива следующая оценка:

$$|f_{lnm}| \leq b_8 n^{-4}(\sigma_m)^{-4,5}, \quad l = \overline{1, 2}, \quad (4.13)$$

где b_8 – некоторая положительная постоянная.

Теперь найдем оценки для функции $\omega_{nm}(y)$, определяемые равенствами (3.7). Для удобства перепишем её в виде

$$\omega_{nm}(y) = \begin{cases} P_{nm}^1(y) f_{2nm} + P_{nm}^2(y) f_{1nm}, & y \in [0, b]; \\ P_{nm}^3(y) f_{1nm} + P_{nm}^4(y) f_{2nm}, & y \in [-b_0, 0], \end{cases} \quad (4.14)$$

где $f_{jnm} = d_m \int_0^c \int_0^a f_j(x, z) T_n(x) z^{2\gamma} Z_m(z) dx dz$, $j = \overline{1, 2}$,

$$P_{nm}^1(y) = \frac{y^{1/2-\beta} \Delta_{nm}(b_0, y)}{b^{1/2-\beta} \Delta_{nm}(b_0, b)}, \quad P_{nm}^2(y) = \frac{y^{1/2-\beta} A_{nm}(y, b)}{b_0^{1/2-\beta} \Delta_{nm}(b_0, b)}, \quad y \in [0, b],$$

$$P_{nm}^3(y) = \frac{(-y)^{1/2-\beta} \Delta_{nm}(-y, b)}{b_0^{1/2-\beta} \Delta_{nm}(b_0, b)}, \quad P_{nm}^4(y) = \frac{(-y)^{1/2-\beta} B_{nm}(b_0, -y)}{b^{1/2-\beta} \Delta_{nm}(b_0, b)}, \quad y \in [-b_0, 0].$$

Лемма 4.4. Если выполнена оценка (45) при $n > n_0$ и $m > m_0$, тогда для таких n и m справедливы следующие оценки:

$$|P_{nm}^j(y)| \leq b_9, \quad y \in [0, b], \quad |B_{\beta-1/2}^y P_{nm}^j(y)| \leq b_9 \lambda_{nm}, \quad y \in (0, b), \quad j = \overline{1, 2}, \quad (4.15)$$

$$|P_{nm}^j(y)| \leq b_{10}, \quad y \in [-b_0, 0], \quad |B_{\beta-1/2}^y P_{nm}^j(y)| \leq b_{10} \lambda_{nm}, \quad y \in (-b_0, 0), \quad j = \overline{3, 4}, \quad (4.16)$$

где b_9, b_{10} – произвольные положительные постоянные.

Доказательство. Сначала рассмотрим функцию $P_{nm}^1(y)$ и её перепишем в другом виде

$$P_{nm}^1(y) = \frac{y^{1-2\beta} b_0^{\beta-1/2} \bar{I}_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}} y) \bar{J}_{\beta-1/2}(\sqrt{\lambda_{nm}} b_0)}{(1-2\beta) b^{1/2-\beta} \Delta_{nm}(b_0, b)} + \\ + \frac{b_0^{1/2-\beta} \bar{I}_{\beta-1/2}(\sqrt{\lambda_{nm}} y) \bar{J}_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}} b_0)}{(1-2\beta) b^{1/2-\beta} \Delta_{nm}(b_0, b)},$$

где $\bar{J}_\nu(z)$, $\bar{I}_\nu(z)$ – функции Бесселя-Клиффорда [25] и для них справедливы неравенства $|\bar{J}_\nu(z)| \leq 1$ и $|\bar{I}_\nu(z)| \leq e^z$, $z > 0$ при $\nu > -1/2$. В силу этих неравенств и оценок (4.2), вытекает первая оценка из (4.15) при $j = 1$.

Непосредственные вычисления показывают, что функция $P_{nm}^1(y)$ при $y \in (0, b)$ удовлетворяет уравнению (2.1). Тогда, справедливо равенство $B_{\beta-1/2}^y P_{nm}^1(y) = \lambda_{nm} P_{nm}^1(y)$. Отсюда, в силу первой оценки (4.15) при $j = 1$, следует справедливость второй оценки из (4.15) при $j = 1$.

Аналогично, доказываются оценки для функции $P_{nm}^j(y)$, $j = \overline{2, 4}$. Лемма 4.4 доказана.

Аналогичным методом доказывается оценки для функции $\omega_{0m}(y)$ и $\tilde{\omega}_{nm}(y)$.

В силу оценок (4.15), (4.16) и (4.13), функции (4.14) и $B_{\beta-1/2}^y \omega_{nm}(y)$ оцениваются следующим образом:

$$|\omega_{nm}(y)| \leq b_{11} n^{-4} \sigma_m^{-4,5}, \quad y \in [-b_0, b], \quad (4.17)$$

$$\left| B_{\beta-1/2}^y \omega_{nm}(y) \right| \leq b_{12} \lambda_{nm} n^{-4} \sigma_m^{-4,5}, \quad y \in (-b_0, 0) \cup (0, b). \quad (4.18)$$

Аналогичным образом функции (3.11), $B_{\beta-1/2}^y \omega_{0m}(y)$, (39) и $B_{\beta-1/2}^y \tilde{\omega}_{nm}(y)$ оцениваются следующим образом:

$$|\omega_{0m}(y)| \leq b_{13} \sigma_m^{-4,5}, \quad y \in [-b_0, b], \quad (4.19)$$

$$\left| B_{\beta-1/2}^y \omega_{0m}(y) \right| \leq b_{14} \lambda_{0m} \sigma_m^{-4,5}, \quad y \in (-b_0, 0) \cup (0, b). \quad (4.20)$$

$$|\tilde{\omega}_{nm}(y)| \leq b_{15} n^{-4} \sigma_m^{-4,5}, \quad y \in [-b_0, b], \quad (4.21)$$

$$\left| B_{\beta-1/2}^y \tilde{\omega}_{nm}(y) \right| \leq b_{16} \lambda_{nm} n^{-4} \sigma_m^{-4,5}, \quad y \in (-b_0, 0) \cup (0, b), \quad (4.22)$$

где b_j , $j = \overline{11, 16}$ – положительные постоянные.

Согласно оценкам (4.3), (4.4), (4.10)-(4.12) и (4.19)-(4.22), ряды (4.9), u_x , $z^{2\gamma} u_z$ в $\bar{\Omega}$, оцениваются соответственно числовыми рядами

$$b_{17} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-4} \sum_{m=1}^{\infty} m^{-4-\gamma}, \quad b_{18} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-4} \sum_{m=1}^{\infty} m^{-4-\gamma}, \quad b_{19} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-4} \sum_{m=1}^{\infty} m^{-4}, \quad (4.23)$$

а ряды u_{xx} , $B_{\beta-1/2}^y u$, $B_{\gamma-1/2}^z u$ в любом компакте $K \subset \Omega_+ \cup \Omega_-$ оцениваются соответственно числовыми рядами

$$b_{20} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \sum_{m=1}^{\infty} m^{-4-\gamma}, \quad b_{21} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \sum_{m=1}^{\infty} m^{-2-\gamma}, \quad b_{22} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-4} \sum_{m=1}^{\infty} m^{-2-\gamma}, \quad (4.24)$$

где b_j , $j = \overline{17, 22}$ – положительные постоянные.

Числовые ряды в (4.23) и (4.24) сходятся, то абсолютно и равномерно сходится ряд (4.9) и ряды u_x , $z^{2\gamma} u_z$ в $\bar{\Omega}$, а ряды u_{xx} , $B_{\beta-1/2}^y u$ и $B_{\gamma-1/2}^z u$ сходятся на каждом компакте $K \subset \Omega_+ \cup \Omega_-$. Поэтому функция $u(x, y, z)$, определенная рядом (4.9), удовлетворяет всем условиям задачи В.

Список литературы

- [1] Киприянов И.А.: Сингулярные эллиптические краевые задачи. Москва: Наука, Физматлит. (1997).
- [2] Cannon J.R.: *The solution of the heat equation subject to the specification of energy*. Quart. Appl. Math. **21**, 155-160 (1963).
- [3] Ионкин Н.И., Моисеев Е.И.: *О задаче для уравнения теплопроводности с двуточечными краевыми условиями*. Дифференциальные уравнения. **15** (7), 1284-1295 (1979).
- [4] Нахушев А.М.: *Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод*. Дифференциальные уравнения. **18** (1), 72-81 (1982).
- [5] Дмитриев В.Б.: *Нелокальная задача с интегральными условиями для волнового уравнения*. Вестник СамГУ. (2), 15-17 (2006).
- [6] Кожанов А.И., Пулькина Л.С.: *О разрешимости некоторых граничных задач со смещением для линейных гиперболических уравнений*. Матем. журнал ин-та матем., Алматы. **9** (32), 78-92 (2009).
- [7] Пулькина Л.С.: *Нелокальная задача для гиперболического уравнения с интегральными условиями I рода с ядрами, зависящими от времени*. Известия вузов. Математика. (10), 32-44 (2012).
- [8] Сабитова Ю.К.: *Краевая задача с нелокальным интегральным условием для уравнений смешанного типа с вырождением на переходной линии*. Математические заметки. **98** (3), 393-406 (2025). <http://doi.org/10.4213/mzm9135>
- [9] Ильин В.А.: *О безусловной базисности на замкнутом интервале систем собственных и присоединенных функций дифференциального оператора второго порядка*. Доклады АН СССР. **273** (5), 1048-1053 (1983).
- [10] Ильин В.А.: *Об абсолютной и равномерной сходимости разложений по собственным и присоединенным функциям несамосопряженного эллиптического оператора*. Доклады АН СССР. **274** (1), 19-22 (1984).
- [11] Алимов Ш.А.: *Об одной спектральной задаче типа Бицадзе-Самарского*. Доклады АН СССР. **287** (6), 1289-1290 (1986).
- [12] Ашуров Р.Р.: *О биортogonalных разложениях одного несамосопряженного оператора Шредингера*. Дифференциальные уравнения. **27** (1), 156-158 (1991).

- [13] Ионкин Н.И.: *Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием*. Дифференциальные уравнения. **13** (2), 294-304 (1977).
- [14] Моисеев Е.И.: *О разрешимости одной нелокальной краевой задачи*. Дифференциальные уравнения. **37** (11), 1565-1567 (2001). <https://doi.org/10.1023/A:1017937403853>
- [15] Моисеев Е.И.: *О решении спектральным методом одной нелокальной краевой задачи*. Дифференциальные уравнения. **35** (8), 1094-1100 (1999).
- [16] Каримов К.Т.: *Нелокальная задача с интегральным условием для трехмерного эллиптического уравнения с сингулярными коэффициентами*. Бюллетень Института математики. (6), 10-24 (2018).
- [17] Karimov K.T.: *Nonlocal Problem for an Elliptic Equation with Singular Coefficients in a Semi-infinite Parallelepiped*. Lobachevskii Journal of Mathematics. **41** (1), 46-57 (2020). <https://doi.org/10.1134/S1995080220010084>
- [18] Karimov K.T.: *Nonlocal Problem for a Three-dimensional Elliptic Equation with Singular Coefficients in a Rectangular Parallelepiped*. Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. **13** (5), 533-546 (2020). <https://doi.org/10.17516/1997-1397-2020-13-5-533-546>
- [19] Urinov A.K., Karimov K.T.: *Nonlocal boundary value problems for a three-dimensional elliptic equation with singular coefficients in a semi-infinite parallelepiped*. Siberian Electronic Mathematical Reports. **17**, 161-178 (2020). <https://doi.org/10.33048/semi.2020.17.012>
- [20] Наймарк М.А.: *Линейные дифференциальные операторы*. -М.:Наука. (1969).
- [21] Ватсон Г. Н.: *Теория бесселевых функций*. -М.:Т.1.Изд. ИЛ. (1949).
- [22] Karimov K., Olimova D.: *A non-local boundary value problem in a semi-infinite parallelepiped for a three-dimensional equation of mixed type with two singular coefficients*. Bull. Inst. Math. **8** (3), 80-92 (2025).
- [23] Трикоми Ф.: *Дифференциальные уравнения*, -М.ИЛ, (1962).
- [24] Лебедев Н.Н.: *Специальные функции и их приложения*. -М.: Физматлит. (1963).
- [25] Капелевич М.Б.: *Об одном уравнении смешанного эллипτικο-гиперболического типа*. Математический сборник. (1), 11-38 (1952).

Boundary value problem with integral condition for a mixed-type equation with Bessel operators

K.T.Karimov, D.S.Olimova

Abstract

In this paper, we study a nonlocal problem with an integral condition in a parallelepiped for a three-dimensional mixed-type equation with Bessel operators. The proof of the uniqueness of the solution and its construction are performed using spectral analysis. The solution is constructed as a double Fourier series of the sum of trigonometric and Bessel functions.

Keywords

mixed type equations; singular coefficient; Bessel operator; Bessel function; Macdonald function; integral condition.

Affiliations

K.T. Karimov

Address: 1) Fergana State University, Fergana, Uzbekistan; 2) V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences

e-mail: karimovk80@mail.ru

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-9098-4116>

D.S. Olimova

Address: Fergana Military Academic Lyceum of the Ministry of Defense "Temurbekov School Fergana, Uzbekistan.

e-mail: dilfuzaolimova406@gmail.com

ORCID ID: <https://orcid.org/0009-0006-3624-3065>