

Краевые задачи для вязко-трансзвукового уравнения в полуграниченных областях

Ю.П. Апаков * Х.К. Иброхимов

Аннотация

В настоящем исследовании изучены краевые задачи вязко-трансзвукового уравнений в полубесконечных областях. Единственность решения данных задач обоснована с использованием метода энергетических интегралов. При этом показано, что в случае нарушения условий единственности соответствующие однородные задачи обладают нетривиальными решениями. Существование решения обосновано методом разделения переменных; искомое решение построено в виде бесконечного ряда, для которого полностью доказана возможность почленного дифференцирования по всем переменным.

Ключевые слова: Дифференциальные уравнения третьего порядка, вязко-трансзвуковое уравнение, краевые задачи, теорема единственности, существование решения, метод разделения переменных, спектральная задача (собственные значения), бесконечные функциональные ряды, абсолютная и равномерная сходимость.

Предметная классификация AMS (2020): Основная: 35C10; Дополнительная: 35J15.

1. Введение

Одним из наиболее перспективных направлений современной математической физики является исследование дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка. Данный класс уравнений служит важным теоретическим инструментом при решении задач нелинейной акустики, изучении гидродинамической теории космической плазмы, а также при математическом моделировании процессов фильтрации жидкости в пористых средах [1].

В газодинамических процессах резкие скачки параметров потока локализуются в узких зонах вблизи ударных волн. Наличие существенных градиентов в рассматриваемых средах требует обязательного учета влияния вязкости и теплопроводности газа, а также нелинейных свойств самого течения. В контексте теории коротких волн данные физические процессы находят свое математическое описание через вязкое трансзвуковое уравнение (ВТ-уравнение), выступающее основным предметом изучения в этой области [2-3].

Прикладное значение ВТ-уравнения наиболее отчетливо проявляется при анализе обтекания воздушным потоком крыльев самолета, когда число Маха $M \approx 1$. Как показано в фундаментальных работах Н.Н. Кузнецова и О.С. Рыжова [4-5], введение члена с третьей производной позволяет математически обосновать внутреннее трение газа и «размытие» структуры ударной волны (structure of the shock wave).

Исходя из системы уравнений Навье-Стокса, с учетом диссипативных свойств газа (вязкости и теплопроводности), выведено уравнение третьего порядка, обладающее кратными характеристиками. Отличительной особенностью данной модели является наличие второй производной по временной координате

[6]:

$$u_{xxx} + u_{yy} - \frac{\nu}{y} u_y = u_x u_{xx}, \quad \nu = \text{const.}$$

В частности, случай $\nu = 1$ соответствует осесимметричному течению, тогда как при $\nu = 0$ уравнение описывает плоскопараллельный поток [7].

Основополагающие принципы теории уравнений третьего порядка с кратными характеристиками были разработаны в трудах [8-9]. Согласно монографии [10], уравнения дисперсионно-диссипативного типа играют ключевую роль в анализе динамики нелинейных волн.

В исследованиях [11-12] осуществлено построение фундаментальных решений для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками и наличием вторых производных по времени. Данные решения представлены в терминах вырожденных гипергеометрических функций, при этом детально проанализированы их свойства и получены асимптотические оценки для случая $|t| \rightarrow \infty$.

В работах [13-14] представлен анализ краевых задач для уравнений третьего порядка, рассматриваемых в полуограниченных трехмерных областях.

Вопросы постановки и исследования краевых задач для уравнений третьего порядка со второй временной производной в ограниченных областях отражены в публикациях [15-17].

2. Постановка задач

В областях $D^+ = \{(x, y) : x \in (0, +\infty), y \in (0, q)\}$ и $D^- = \{(x, y) : x \in (-\infty, 0), y \in (0, q)\}$, рассмотрим уравнения в виде

$$L[u] = \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \mu \right) u = 0, \quad (2.1)$$

При этом μ и q являются действительными параметрами ($\mu, q \in \mathbb{R}$), для которых нами рассматриваются нижеследующие задачи

Задача B_1 . Найти регулярное решение уравнения (2.1), в области D^+ из класса $C_{x,y}^{3,2}(D^+) \cap C_{x,y}^{2,1}(D^+ \cup \Gamma_1)$, такое что при $x \rightarrow +\infty$ производная первого порядка по y и производная второго порядка по x ограничены и равномерны по переменной y , и $u_y \in L_2(D^+)$, удовлетворяющее следующим граничным условиям:

$$u(x, 0) = u(x, q) = 0, \quad 0 \leq x < +\infty, \quad (2.2)$$

$$\begin{cases} au(0, y) + bu_{xx}(0, y) = \psi_1(y), \\ u_x(0, y) = \psi_2(y), \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, y) = 0, \end{cases} \quad 0 \leq y \leq q, \quad (2.3)$$

где $\Gamma_1 = \partial D^+$ - граница области D^+ , $a, b \in \mathbb{R}$, такие что $a^2 + b^2 \neq 0$, а $\psi_i(y)$ ($i = 1, 2$) - заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям:

$$\psi_i(0) = \psi_i(q) = 0, \quad (i = 1, 2). \quad (2.4)$$

Задача B_2 . Найти регулярное решение уравнения (2.1), в области D^- из класса $C_{x,y}^{3,2}(D^-) \cap C_{x,y}^{2,1}(D^- \cup \Gamma_2)$, такое что при $x \rightarrow -\infty$ производная первого порядка по y и производная второго порядка по x ограничены и равномерны по переменной y , и $u_y \in L_2(D^-)$, удовлетворяющее граничным условиям (2.2) при $-\infty < x \leq 0$ и

$$\begin{cases} cu(0, y) + du_{xx}(0, y) = \psi_3(y), \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x, y) = \lim_{x \rightarrow -\infty} u_x(x, y) = 0, \end{cases} \quad 0 \leq y \leq q, \quad (2.5)$$

где $\Gamma_2 = \partial D^-$ - граница области D^- , $c, d \in \mathbb{R}$, такие что $c^2 + d^2 \neq 0$, а $\psi_3(y)$ — заданная достаточно гладкая функция, удовлетворяющее условиям:

$$\psi_3(0) = \psi_3(q) = 0. \quad (2.6)$$

3. Единственность решения

Теорема 3.1. Если задача B_1 (B_2) имеет решение, то при выполнении условий $ab \leq 0$, $\mu \leq 0$ ($cd \geq 0$, $\mu \leq 0$) оно единственно.

Доказательство. Предположим обратное. Пусть задача B_1 (B_2) имеет два решения $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$. Тогда функция $u(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$ удовлетворяет уравнению (2.1) с однородными краевыми условиями. Докажем, что $u(x, y) \equiv 0$ в $D^+ \cup \Gamma_1$ ($D^- \cup \Gamma_2$).

В области D^+ (D^-) справедливо следующее тождество:

$$u L[u] \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left(u u_{xx} - \frac{1}{2} u_x^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} (u u_y) - u_y^2 + \mu u^2 = 0. \quad (3.1)$$

Интегрируя тождество (3.1) по области $D_p^+ = \{(x, y) : 0 < x < p, 0 < y < q\}$, где $p > 0$, имеем

$$\int_0^p \int_0^q \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(u u_{xx} - \frac{1}{2} u_x^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} (u u_y) \right] dx dy - \int_0^p \int_0^q u_y^2 dx dy + \mu \int_0^p \int_0^q u^2 dx dy = 0.$$

При стремлении параметра p к бесконечности ($p \rightarrow +\infty$) область D_p^+ переходит в D^+ . Учитывая это предельное расширение области, а также опираясь на однородность краевых условий задачи B_1 , условие $a \neq 0$, асимптотическое поведение функции $u(x, y)$ на бесконечности ($x \rightarrow +\infty$) и $u_y \in L_2(D^+)$, получаем

$$\frac{1}{2} \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_0^q u_x^2(p, y) dy - \frac{b}{a} \int_0^q u_{xx}^2(0, y) dy + \int_0^p \int_0^q u_y^2(x, y) dx dy - \mu \int_0^p \int_0^q u^2(x, y) dx dy = 0$$

Рассмотрим случай, когда параметр $\mu = 0$, с учётом условий Теоремы 3.1, т.е. $ab \leq 0$, приходим к равенству $u_y(x, y) = 0$. Решение данного уравнения имеет вид: $u(x, y) = f(x)$. Исходя из граничного условия (2.2), согласно которому $u(x, 0) = 0$, заключаем, что $f(x) \equiv 0$. Следовательно, $u(x, y) \equiv 0$ в $D^+ \cup \Gamma_1$. Аналогично, при $\mu < 0$ из пятого слагаемого непосредственно следует, что $u(x, y) \equiv 0$ в $D^+ \cup \Gamma_1$.

Теперь интегрируя тождество (3.1) по области $D_l^- = \{(x, y) : l < x < 0, 0 < y < q\}$, где $l < 0$ получаем:

$$\int_l^0 \int_0^q \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(u u_{xx} - \frac{1}{2} u_x^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} (u u_y) \right] dx dy - \int_l^0 \int_0^q u_y^2 dx dy + \mu \int_l^0 \int_0^q u^2 dx dy = 0.$$

Рассмотрим предельный случай при стремлении параметра l к минус бесконечности ($l \rightarrow -\infty$), что соответствует расширению подобласти D_l^- до границ области D^- . Принимая во внимание однородность краевых условий, заданных в задаче B_2 , и условие $c \neq 0$, а также опираясь на асимптотическое поведение функции $u(x, y)$ при $x \rightarrow -\infty$ и $u_y \in L_2(D^-)$, получаем

$$\frac{d}{c} \int_0^q u_{xx}^2(0, y) dy + \frac{1}{2} \int_0^q u_x^2(0, y) dy + \int_l^0 \int_0^q u_y^2(x, y) dx dy - \mu \int_l^0 \int_0^q u^2(x, y) dx dy = 0.$$

Отсюда также легко следует, что $u(x, y) \equiv 0$ в $D^- \cup \Gamma_2$.

В случае $b \neq 0$ ($d \neq 0$) аналогичным образом доказывается тождество $u(x, y) \equiv 0$ в области $D^+ \cup \Gamma_1$ ($D^- \cup \Gamma_2$).

Теорема 3.1 доказана.

Замечание 3.1. Стоит подчеркнуть, что в случае невыполнения условий Теоремы 3.1 однородная задача B_1 допускает существование нетривиальных решений. В частности, при $a = bk_n^2$ (где $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) и $k_n = \sqrt[3]{\lambda_n - \mu}$,

задача:

$$\begin{cases} u_{xxx} + u_{yy} + \mu u = 0, \\ u(x, 0) = u(x, q) = 0, \\ k_n^2 u(0, y) + u_{xx}(0, y) = 0, \\ u_x(0, y) = 0, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, y) = 0, \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \leq x < +\infty, \\ 0 \leq y \leq q, \end{matrix}$$

обладает ненулевым решением вида:

$$u_n(x, y) = A_1 e^{-\frac{k_n}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_n x - \frac{\pi}{6}\right) \sin \frac{n\pi}{q}y, \quad A_1 \in \mathbb{R}, \quad n \in N.$$

Замечание 3.2. Необходимо заметить, что нарушение условий Теоремы 3.1 приводит к тому, что однородная задача B_2 может обладать нетривиальными решениями. В частности, при $c = -dk_n^2$ (где $d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) и $k_n = \sqrt[3]{\lambda_n - \mu}$, задача:

$$\begin{cases} u_{xxx} + u_{yy} + \mu u = 0, \\ u(x, 0) = u(x, q) = 0, \\ -k_n^2 u(0, y) + u_{xx}(0, y) = 0, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x, y) = \lim_{x \rightarrow -\infty} u_x(x, y) = 0, \end{cases} \quad \begin{matrix} -\infty < x \leq 0, \\ 0 \leq y \leq q, \end{matrix}$$

существует ненулевое решение следующего вида:

$$u_n(x, y) = A_2 e^{k_n x} \sin \frac{n\pi}{q}y, \quad A_2 \in \mathbb{R}, \quad n \in N.$$

4. Существование решения

Теорема 4.1. Если $\psi_i(y) \in C^2[0, q]$, ($i = 1, 2$) и выполняются условия $a \neq bk_n^2$ и (2.4) то решение задачи B_1 существует.

Доказательство. Решение задачи B_1 представим в следующем виде:

$$u(x, y) = X(x)Y(y). \quad (4.1)$$

После подстановки выражения (4.1) в уравнение (2.1) и применения метода разделения переменных для функции $Y(y)$ приходим к классической задаче Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} Y'' + \lambda Y = 0, \\ Y(0) = Y(q) = 0, \end{cases} \quad (4.2)$$

где λ - параметр разделения.

Нетривиальные решения рассматриваемой задачи (4.2) возможны лишь при выполнении условия:

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{q}\right)^2, \quad n \in N.$$

Указанные числа представляют собой спектр собственных значений задачи (4.2), при этом соответствующие им собственные функции определяются выражением:

$$Y_n(y) = \sqrt{\frac{2}{q}} \sin\left(\frac{n\pi}{q}y\right), \quad n \in N. \quad (4.3)$$

Следует подчеркнуть, что система собственных функций (4.3) задачи (4.2) обладает свойствами полноты и ортонормированности в пространстве $L_2(D^+)$, составляя тем самым базис [18].

Для $X_n(x)$ приходим к следующей задаче:

$$\begin{cases} X_n'''(x) - (\lambda_n - \mu) X_n(x) = 0, \\ aX_n(0) + bX_n''(0) = \psi_{1n}, \\ X_n'(0) = \psi_{2n}, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} X_n(x) = 0, \end{cases} \quad (4.4)$$

где

$$\psi_{in} = \sqrt{\frac{2}{q}} \int_0^q \psi_i(y) \sin\left(\frac{n\pi}{q}y\right) dy, \quad (i = 1, 2), \quad n \in N.$$

Решение уравнения в задаче (4.4) имеет вид

$$X_n(x) = C_{1n}e^{k_n x} + e^{-\frac{1}{2}k_n x} \left(C_{2n} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} k_n x + C_{3n} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} k_n x \right) \quad (4.5)$$

где

$$k_n = \sqrt[3]{\lambda_n - \mu} = \sqrt[3]{\left(\frac{n\pi}{q}\right)^2 - \mu}, \quad n \in N.$$

Исходя из условий задачи B_1 , на бесконечности должно выполняться соотношение $\lim_{x \rightarrow +\infty} X_n(x) = 0$. Данное требование обуславливает обнуление коэффициента C_{1n} в выражении (4.5). В результате подстановки $C_{1n} = 0$ функция (4.5) преобразуется к следующему виду:

$$X_n(x) = e^{-\frac{1}{2}k_n x} \left(C_{2n} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} k_n x + C_{3n} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} k_n x \right) \quad (4.6)$$

Опираясь на условия, сформулированные в задаче (4.4), приходим к следующему результату:

$$\begin{cases} \left(a - \frac{bk_n^2}{2}\right) C_{2n} - \frac{\sqrt{3}bk_n^2}{2} C_{3n} = \psi_{1n}, \\ -\frac{k_n}{2} C_{2n} + \frac{\sqrt{3}k_n}{2} C_{3n} = \psi_{2n}. \end{cases} \quad (4.7)$$

Определитель системы (4.7), принимает следующий вид:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a - \frac{bk_n^2}{2} & -\frac{\sqrt{3}bk_n^2}{2} \\ -\frac{k_n}{2} & \frac{\sqrt{3}k_n}{2} \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{3}k_n}{2} (a - bk_n^2) = \frac{\sqrt{3}k_n^3}{2} \bar{\Delta}$$

где

$$\bar{\Delta} = \left(\frac{a}{k_n^2} - b\right).$$

На основании условий Теоремы 4.1 (в частности, при $a \neq bk_n^2$), главный определитель системы отличен от нуля ($\Delta \neq 0$). Следовательно, система (4.7) имеет единственное решение вида:

$$C_{2n} = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\psi_{1n}}{k_n^2} + b \frac{\psi_{2n}}{k_n} \right),$$

$$C_{3n} = \frac{1}{\sqrt{3} \bar{\Delta}} \left(\frac{\psi_{1n}}{k_n^2} + \frac{\psi_{2n}}{k_n} \left(\frac{2a}{k_n^2} - b \right) \right).$$

С учётом (4.1), решение задачи B_1 имеет вид:

$$u(x, y) = \sqrt{\frac{2}{q}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}k_n x} \left(C_{2n} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} k_n x + C_{3n} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} k_n x \right) \sin\left(\frac{n\pi}{q}y\right). \quad (4.8)$$

В дальнейшем, для упрощения записи, максимальное из всех найденных положительных констант в полученных оценках будет обозначаться символом M .

Далее установим условия, обеспечивающие абсолютную и равномерную сходимость ряда (4.8) в пределах области $D^+ \cup \Gamma_1$. Опираясь на выражение (4.8), запишем:

$$\begin{aligned} |u(x, y)| &\leq \sqrt{\frac{2}{q}} \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \left[e^{-\frac{1}{2}k_n x} \left(C_{2n} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} k_n x + C_{3n} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} k_n x \right) \right] \sin \left(\frac{n\pi}{q} y \right) \right| \leq \\ &\leq M \sum_{n=1}^{+\infty} [|C_{2n}| + |C_{3n}|]. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Выполним оценку коэффициентов C_{in} , ($i = 2, 3$) в следующем виде:

$$|C_{2n}| \leq M \left[\frac{|\psi_{1n}|}{k_n^2} + \frac{|\psi_{2n}|}{k_n} \right], \quad |C_{3n}| \leq M \left[\frac{|\psi_{1n}|}{k_n^2} + \frac{|\psi_{2n}|}{k_n} \right].$$

В результате подстановки полученных оценок коэффициентов C_{in} , ($i = 2, 3$) в выражение (4.9), получим

$$|u(x, y)| \leq M \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{|\psi_{1n}|}{k_n^2} + \frac{|\psi_{2n}|}{k_n} \right]. \quad (4.10)$$

Применяя метод интегрирования по частям к выражениям ψ_{in} ($i = 1, 2$) и принимая во внимание условие (2.4), получим

$$\psi_{in} = \left(\frac{q}{\pi} \right)^2 \frac{\Psi_{in}}{n^2}, \quad (i = 1, 2),$$

где

$$\Psi_{in} = -\sqrt{\frac{2}{q}} \int_0^q \psi''_i(y) \sin \left(\frac{n\pi}{q} y \right) dy, \quad (i = 1, 2).$$

Тогда

$$|\psi_{in}| \leq M \frac{|\Psi_{in}|}{n^2}, \quad (i = 1, 2), \quad M = \text{const} > 0.$$

С учетом полученных выше оценок, из соотношения (4.10) имеем:

$$|u(x, y)| \leq M \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{|\Psi_{1n}|}{n^{\frac{10}{3}}} + \frac{|\Psi_{2n}|}{n^{\frac{8}{3}}} \right] < \infty.$$

Таким образом, вышеизложенные оценки подтверждают абсолютную и равномерную сходимость ряда (4.8) в замкнутой области $D^+ \cup \Gamma_1$.

Перейдем к обоснованию абсолютной и равномерной сходимости частных производных ряда (4.8), входящих в уравнение (2.1), в замкнутой области $D^+ \cup \Gamma_1$. С этой целью продифференцируем ряд (4.8) по переменной y до второго порядка включительно, в результате чего получим следующее выражение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = - \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \left[e^{-\frac{1}{2}k_n x} \left(C_{2n} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} k_n x + C_{3n} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} k_n x \right) \right] Y_n(y).$$

Принимая во внимание полученную оценку для функции $u(x, y)$, имеем

$$\left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right| \leq M \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{|\Psi_{1n}|}{n^{\frac{4}{3}}} + \frac{|\Psi_{2n}|}{n^{\frac{2}{3}}} \right].$$

Применяя неравенства Коши–Буняковского и Бесселя к полученным выражениям, приходим к следующей оценке:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right| &\leq M \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\Psi_{1n}|}{n^{\frac{4}{3}}} + \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} |\Psi_{2n}|^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}} \right] \leq \\ &\leq M \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\Psi_{1n}|}{n^{\frac{4}{3}}} + \|\psi''_{2n}(y)\|_{L_2(0,q)} \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}} \right] < \infty, \end{aligned}$$

где

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |\Psi_{2n}|^2 \leq \|\psi''_2(y)\|_{L_2(0,q)}^2.$$

Таким образом, функциональный ряд, представляющий частную производную $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, сходится абсолютно и равномерно в замкнутой области $D^+ \cup \Gamma_1$.

Далее выполним дифференцирование ряда (4.8) по переменной x до третьего порядка:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \sum_{n=1}^{+\infty} k_n^3 \left[e^{-\frac{1}{2}k_n x} \left(C_{2n} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} k_n x - C_{3n} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} k_n x \right) \right] Y_n(y).$$

С учетом оценки $u(x, y)$ имеем:

$$\left| \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right| \leq M \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{|\Psi_{1n}|}{n^{\frac{4}{3}}} + \frac{|\Psi_{2n}|}{n^{\frac{2}{3}}} \right].$$

Отсюда также как, u_{yy} следует абсолютная и равномерная сходимость ряда в области $D^+ \cup \Gamma_1$.

Теорема 4.1 доказана.

Теорема 4.2. Если $\psi_3(y) \in C^2[0, q]$ и выполняются условия $c \neq -dk_n^2$ и (2.6) то решение задачи B_2 существует.

Доказательство. Решение задачи B_2 также имеет вид (4.1), и при подстановке в (2.1) для функции $X(x)$ в области D^- получаем следующую задачу:

$$\begin{cases} X'''_n(x) - (\lambda_n - \mu) X_n(x) = 0, \\ cX_n(0) + dX''_n(0) = \psi_{3n}, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} X_n(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} X'_n(x) = 0, \end{cases} \quad (4.11)$$

где

$$\psi_{3n} = \sqrt{\frac{2}{q}} \int_0^q \psi_3(y) \sin\left(\frac{n\pi}{q}y\right) dy, \quad n \in N.$$

Общее решение уравнения в задаче (4.11) имеет вид (4.5). В силу условий $\lim_{x \rightarrow -\infty} X_n(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} X'_n(x) = 0$ следует, что $C_{2n} = C_{3n} = 0$, тогда (4.5) принимает следующий вид:

$$X_n(x) = C_{1n} e^{k_n x}. \quad (4.12)$$

С учетом заданных граничных условий, коэффициент C_{1n} определяется следующим образом:

$$C_{1n} = \frac{\psi_{3n}}{c + dk_n^2},$$

где

$$\psi_{3n} = \sqrt{\frac{2}{q}} \int_0^q \psi_3(y) \sin\left(\frac{n\pi}{q}y\right) dy, \quad n \in N. \quad (4.13)$$

На основании соотношений (4.3) и (4.12) решение задачи B_2 имеет в следующем виде:

$$u(x, y) = \sqrt{\frac{2}{q}} \sum_{n=1}^{+\infty} C_{1n} e^{k_n x} \sin\left(\frac{n\pi}{q} y\right), \quad n \in N. \quad (4.14)$$

Перейдем к обоснованию абсолютной и равномерной сходимости ряда (4.14). Непосредственно из выражения (4.14) получим следующую оценку:

$$|u(x, y)| \leq \sqrt{\frac{2}{q}} \sum_{n=1}^{+\infty} \left| C_{1n} e^{k_n x} \sin\left(\frac{n\pi}{q} y\right) \right| \leq M \sum_{n=1}^{+\infty} |C_{1n}|. \quad (4.15)$$

Оценка C_{1n} имеет вид

$$|C_{1n}| \leq M \frac{|\psi_{3n}|}{k_n^2}, \quad M = \text{const} > 0.$$

Применяя метод интегрирования по частям к выражению (4.13) и принимая во внимание условие (2.6), приходим к следующей оценке:

$$|\psi_{3n}| \leq M \frac{|\Psi_{3n}|}{n^2},$$

где

$$\Psi_{3n} = -\sqrt{\frac{2}{q}} \int_0^q \psi''_3(y) \sin\left(\frac{n\pi}{q} y\right) dy.$$

Тогда из (4.15) получаем

$$|u(x, y)| \leq M \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\Psi_{3n}|}{n^{\frac{10}{3}}} < \infty.$$

Следовательно, ряд (4.14) сходится абсолютно и равномерно в области $D^- \cup \Gamma_2$. Далее обоснуем, что частные производные функционального ряда (4.14), входящие в исходное уравнение (2.1), также обладают свойствами абсолютной и равномерной сходимости в указанной области $D^- \cup \Gamma_2$. Для проверки этого факта вычислим почленную производную ряда (4.14) по переменной y :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = - \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n C_{1n} e^{k_n x} Y_n(y).$$

С учетом оценки (4.15) имеем:

$$\left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right| \leq M \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\Psi_{3n}|}{n^{\frac{4}{3}}} < \infty.$$

Таким образом, ряд, соответствующий функции $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, сходится абсолютно и равномерно в $D^- \cup \Gamma_2$.

Теперь вычислим частную производную третьего порядка по переменной x от ряда (4.14) получаем

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \sum_{n=1}^{+\infty} k_n^3 C_{1n} e^{k_n x} Y_n(y).$$

С учетом оценки для $u(x, y)$ получаем:

$$\left| \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right| \leq M \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\Psi_{3n}|}{n^{\frac{4}{3}}} < \infty.$$

Таким образом, установлено, что функциональный ряд (4.14) и все частные производные, входящие в состав уравнения (2.1), сходятся абсолютно и равномерно в замкнутой области $D^- \cup \Gamma_2$. На этом доказательство Теоремы 4.2 считается завершенным.

5. Заключение

В настоящей работе проведено комплексное исследование краевых задач для вязко-трансзвукового уравнения в полубесконечных областях. Единственность решения сформулированных задач была строго обоснована с применением метода энергетических интегралов. Ключевым результатом исследования является установление того факта, что при нарушении условий единственности соответствующие однородные задачи обладают нетривиальными решениями, что подчеркивает высокую чувствительность рассматриваемых математических моделей к заданным граничным параметрам.

Существование решения обосновано методом разделения переменных. Искомое решение было построено в виде бесконечного функционального ряда, для которого проведено детальное доказательство абсолютной и равномерной сходимости. Кроме того, была подтверждена законность почленного дифференцирования полученного ряда по всем переменным, что обеспечивает обоснованность его применения в качестве решения исходного уравнения в частных производных в исследуемой области.

Предложенный аналитический подход представляет собой эффективный инструментарий для решения широкого класса дифференциальных уравнений третьего порядка. Перспективы дальнейших исследований заключаются в расширении данных результатов на более сложные нелинейные уравнения, нестационарные задачи, а также системы дифференциальных уравнений с различными спектральными характеристиками.

Благодарность

Авторы хотели бы выразить искреннюю благодарность редактору и рецензентам за их полезные комментарии и предложения.

Финансирование

Для этой работы нет финансирования.

Список литературы

- [1] Юлдашев Т. К.: *Обратная задача для одного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма третьего порядка*. Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2014. – № 1(34). – С. 56-65.
- [2] Диесперов В.Н., Ломакин Л.А.: *Об одной краевой задаче для линеаризованного осесимметрического ВТ уравнения*. ЖВМ и МФ. – 1974. – Т. 14. – № 5. – С. 1244-1260.
- [3] Alymkulov K., Tursunov D.A., Azimov B.A.: *Generalized method of boundary layer function for bisingularly perturbed differential cole equation*. (2017) Far East Journal of Mathematical Sciences, 101 (3), pp. 507 - 516. DOI: 10.17654/MS101030507
- [4] Кузнецов Н.Н., Рыжов О.С.: *Об уравнениях вязкого трансзвукового течения*. ЖВМ и МФ. – 1969. – Т. 9. – №. 1. – С. 164-180.
- [5] Ryzhov, O. S.: *Viscous Transonic Flows*. Annual Review of Fluid Mechanics.10(1), pp. 66-73. (1978).
- [6] Рыжов О. С.: *Асимптотическая картина обтекания тел вращения со звуковым потоком вязкого и теплопроводящего газа*. ПММ. – 1965. – Т. 29. – Вып. 6. – С. 1004-1014.
- [7] Диесперов В.Н.: *О функции Грина линеаризованного вязкого трансзвукового уравнения*. ЖВМ и МФ. - 1972. - Т. 12. - No 5. - С. 1265-1279.
- [8] Block H.: *Sur les equations lineaires aux derives partielles a carateristiques multiples*. Ark. Mat. Astron. Fus. – 1912. – 7(13). – pp. 1-34.
- [9] Del Vecchio E.: *Sulle equazioni*. Memorie R. Accad. Sci. Ser.2. – Torino. – 1915. – 66. – pp. 1-41.
- [10] Whitham G.B.: *Linear and Nonlinear Waves*. John Wiley Sons, 1974.
- [11] Джураев Т. Д., Апаков Ю.П.: *Об автомодельном решении одного уравнения третьего порядка*. Вестник Сам. гос. техн. ун-та. – 2007. – № 2(15). – С. 18-26.
- [12] Джураев Т. Д., Апаков Ю.П.: *К теории уравнения третьего порядка, содержащего вторую производную по времени*. Украинский математический журнал. – 2010. – Т. 62. – № 1. – С. 40-51.
- [13] Apakov Yu.P., Hamitov A.A.: *On solution of the boundary value problems posed for an equation with the third-order multiple characteristics in semi-bounded domains in three dimensional space*. Boletín de la Sociedad Matematica Mexicana. 2023. 29:58. – pp.2-14. <https://doi.org/10.1007/s40590-023-00523-1>
- [14] Apakov Yu.P., Hamitov A.A.: *Boundary value problems for a third order equation with multiple characteristics in three-dimensional space in semi-bounded domains*. Filomat. 2025. 39:8. - pp. 2603-2612. <https://doi.org/10.2298/FIL2508603A>

- [15] Апаков Ю.П., Иброхимов Х. К.: *О разрешимости краевой задачи для вязко-трансзвукового уравнения*. Научный вестник НамГУ. – 2024. – №10. – С. 43-48.
- [16] Apakov Yu. P., Ibrokhimov Kh. K.: *On solving the second boundary value problem for the Viscous Transonic Equation*. Bulletin of the Karaganda University. – 2025. – 3(19). – pp. 34-45.
- [17] Apakov Yu. P., Ibrokhimov Kh. K.: *Bitsadze-Samarskii Type Problem For The Viscous-Transonic Equation*. Journal of Mathematical Sciences. Published: 13 February 2026. <https://doi.org/10.1007/s10958-026-08224-6>.
- [18] Тихонов, А.Н., Самарский, А.А.: *Уравнения математической физики*. М.: "Наука". -724 с. (1966).

Boundary value problems for the viscous-transonic equation in semi-bounded domains

Apakov Yusupjon Pulatovich,* Ibrokhimov Khusniddin Komiljon ugli

Abstract

This research examines boundary value problems associated with the viscous-transonic equation within semi-infinite domains. The uniqueness of the solutions is established by employing the energy integral method. Furthermore, it is demonstrated that when uniqueness conditions are not satisfied, the corresponding homogeneous problems admit non-trivial solutions. The existence of the solution is addressed through the method of separation of variables; the required solution is represented as an infinite series, and the validity of its term-by-term differentiation with respect to all variables is rigorously proven.

Keywords

Third-order partial differential equation, viscous-transonic equation, boundary value problems, uniqueness theorem, existence of solution, method of separation of variables, spectral problem (eigenvalue), infinite functional series, absolute and uniform convergence.

Affiliations

Apakov Yusupjon Pulatovich

Address: Namangan State Technical University, Dept. of Higher Mathematics, 160103, Namangan, Uzbekistan and Institute of Mathematics named after V.I.Romanovsky Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan.

e-mail: yusupjonapakov@gmail.com

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-9611-1466>

Ibrokhimov Khusniddin Komiljon ugli

Address: Namangan State Technical University, Dept. of Higher Mathematics, 160103, Namangan, Uzbekistan.

e-mail: xusniddin571@mail.ru

ORCID ID: <https://orcid.org/0009-0001-7142-0956>