

Построение решение краевой задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в трехмерном пространстве

А.А. Хамитов* Ж.С. Эрматов

Аннотация

В работе исследуется краевая задача для дифференциального уравнения третьего порядка, обладающего кратными характеристиками, в трёхмерной области. Для доказательства единственности решения применяется метод энергетических интегралов. Существование решения устанавливается с использованием метода Фурье (разделения переменных). Полученное решение представляется в бесконечного функционального ряда, для которого обоснована возможность почленного дифференцирования по каждой из независимых переменных. При проверке условий равномерной сходимости ряда показано, что соответствующий «малый знаменатель» не обращается в нуль.

Ключевые слова: уравнения с кратными характеристиками; краевая задача; единственность; существование; собственное значение; собственная функция, функциональный ряд, абсолютная и равномерная сходимость.

Предметная классификация AMS (2020): Основная: 35C10 ; Дополнительная: 35G15.

1. Введение

Дифференциальные уравнения третьего порядка с частными производными находят применение при моделировании процессов в нелинейной акустике, гидродинамике космической плазмы, а также в задачах фильтрации жидкости через пористые среды [1-2].

Первые результаты, посвящённые уравнениям третьего порядка с кратными характеристиками, были представлены в работах Н. Block [3], Е. Del Vecchio [4]. В дальнейшем L. Catabriga [5] для уравнения вида $D_x^{2n+1}u - D_y^2u = 0$ построил фундаментальное решение с использованием двойного несобственного интеграла, исследовал свойства соответствующего потенциала и решил ряд краевых задач.

В статьях [6–7] были получены фундаментальные решения для уравнений третьего порядка, содержащие вторые производные по времени. Эти решения выражаются через конфлюэнтные гипергеометрические функции, изучены их аналитические свойства и установлены асимптотические оценки при $|t| \rightarrow \infty$.

В работах [8–10] анализируются проблемы, связанные с возникновением малых знаменателей в процессе решения дифференциальных уравнений.

2. Постановка задачи

В области $D = \{(x, y, z) : 0 < x < p, 0 < y < q, 0 < z < r\}$ рассмотрим уравнения вида

$$L[u] \equiv u_{xxx} - u_{yy} - u_{zz} = 0, \quad (2.1)$$

где p, q, r - положительные вещественные числа ($p, q, r \in R^+$), и для данного уравнения рассматривается следующая краевая задача.

Задача А. Требуется найти регулярное решение уравнения (2.1) в области D , принадлежащее классу

$$u(x, y, z) \in C_{x,y,z}^{3,2,2}(D) \cap C_{x,y,z}^{2,1,1}(\bar{D}),$$

и удовлетворяющее краевым условиям:

$$u_y(x, 0, z) = u(x, q, z) = 0, \quad u_z(x, y, 0) = u(x, y, r) = 0, \quad (2.2)$$

$$u(0, y, z) = \psi_1(y, z), \quad u(p, y, z) = \psi_2(y, z), \quad u_x(p, y, z) = \psi_3(y, z), \quad (2.3)$$

где $\psi_i(y, z)$, ($i = \overline{1,3}$) - заданные достаточно гладкие функции.

Следует отметить, что для двумерного аналога уравнения (2.1) корректные краевые задачи рассматривались в работах [11–12], а в трёхмерном случае — в исследованиях [13–16].

3. Единственность решения

Справедлива следующая теорема:

Теорема 3.1. Если задача А имеет решение, то это решение единственно.

Доказательство. Предположим противное: пусть существуют два различных решения $u_1(x, y, z)$ и $u_2(x, y, z)$. Тогда их разность

$$u(x, y, z) = u_1(x, y, z) - u_2(x, y, z)$$

удовлетворяет уравнению (2.1) и однородным краевым условиям. Докажем, что $u(x, y, z) \equiv 0$ в области $\bar{D}$.

В области D выполняется следующее тождество:

$$u L[u] \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left(u u_{xx} - \frac{1}{2} u_x^2 \right) - \frac{\partial}{\partial y} (u u_y) + u_y^2 - \frac{\partial}{\partial z} (u u_z) + u_z^2 = 0. \quad (3.1)$$

Проинтегрируем тождество (3.1) по области D и применим однородные граничные условия. В результате получим:

$$\frac{1}{2} \int_0^q \int_0^r u_x^2(0, y, z) dy dz + \iiint_D u_y^2(x, y, z) dx dy dz + \iiint_D u_z^2(x, y, z) dx dy dz = 0. \quad (3.2)$$

Из (3.2) вытекает, что $u_y(x, y, z) = 0$, $u_z(x, y, z) = 0$, откуда $u(x, y, z) = f(x)$, где $f(x)$ - некоторая функция, зависящая только от x , которая удовлетворяет уравнению (2.1) и однородным условиям задачи А. Подставляя $u(x, y, z) = f(x)$ в уравнение (2.1), получаем

$$f'''(x) = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$f(x) = C_1 x^2 + C_2 x + C_3.$$

Из однородных краевых условий (2.3), т.е. $f(0) = f(p) = f'(p) = 0$, находим, что $f(x) \equiv 0$. Следовательно, $u(x, y, z) \equiv 0$ в области $\bar{D}$. Значит, $u_1(x, y, z) = u_2(x, y, z)$, что противоречит предположению о существовании двух различных решений.

Теорема 3.1 доказана.

4. Существование решения

Теорема 4.1. Если для функции $\psi_i(y, z)$, $i = \overline{1, 3}$ справедливы следующие условия:

$$1) \psi_i(y, z) \in C_{y,z}^{3,3} (0 \leq y \leq q, 0 \leq z \leq r), i = \overline{1, 3};$$

$$2) \begin{cases} \psi_i(0, z) = \psi_i(q, z) = 0, & \frac{\partial^2 \psi_i(0, z)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \psi_i(q, z)}{\partial y^2} = 0, \\ \psi_i(y, 0) = \psi_i(y, r) = 0, & \frac{\partial^2 \psi_i(y, 0)}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \psi_i(y, r)}{\partial z^2} = 0, \end{cases} \quad i = \overline{1, 3},$$

то решение задачи A существует в указанном классе функций.

Доказательство. Решение задачи A будем искать в виде

$$u(x, y, z) = X(x) V(y, z). \quad (4.1)$$

Подставляя (4.1) в уравнение (2.1) и применяя метод разделения переменных, приходим к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению для функции $X(x)$:

$$X''' + \lambda X = 0, \quad (4.2)$$

а для функции $V(y, z)$ получается краевая задача вида

$$\begin{cases} V_{yy} + V_{zz} + \lambda V = 0, \\ V_y(0, z) = V_y(q, z) = 0, \\ V_z(y, 0) = V_z(y, r) = 0, \end{cases} \quad (4.3)$$

где λ - параметр разделения.

Решение спектральной задачи (4.3) имеет вид:

$$V_{n,m}(y, z) = \frac{2}{\sqrt{qr}} \cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{2q}y\right) \cos\left(\frac{\pi(2m-1)}{2r}z\right), \quad (4.4)$$

которые соответствуют собственным значениям

$$\lambda_{n,m} = \left(\frac{(2n-1)^2}{q^2} + \frac{(2m-1)^2}{r^2} \right) \frac{\pi^2}{4}, \quad n, m \in N.$$

Известно, что система собственных функций (4.4) образует полный ортонормированный базис в пространстве $L_2(0 < y < q, 0 < z < r)$ [17].

Теперь переходим к решению уравнения (4.2). Нам известно, что характеристическое уравнение (4.2) имеет один вещественный $\tilde{k}_1 = -\sqrt[3]{\lambda_{n,m}}$ и два комплексных $\tilde{k}_{2,3} = \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \sqrt[3]{\lambda_{n,m}}$ корней. Тогда общее решение (4.2) имеет вид

$$X_{n,m}(x) = C_{1n,m} e^{-k_{n,m}x} + e^{\frac{1}{2}k_{n,m}x} \left(C_{2n,m} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} k_{n,m}x + C_{3n,m} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} k_{n,m}x \right), \quad (4.5)$$

здесь $C_{in,m}$, $i = \overline{1, 3}$ - произвольные постоянные, $k_{n,m} = \sqrt[3]{\lambda_{n,m}} = \sqrt[3]{\left(\frac{(2n-1)^2}{q^2} + \frac{(2m-1)^2}{r^2} \right) \frac{\pi^2}{4}}$. Согласно (4.4) и (4.5), из равенства (4.1) следуют, что функции

$$u_{n,m}(x, y, z) = \frac{2}{\sqrt{qr}} \left[C_{1n,m} e^{-k_{n,m}x} + e^{\frac{1}{2}k_{n,m}x} \left(C_{2n,m} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} k_{n,m}x + C_{3n,m} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} k_{n,m}x \right) \right] \cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{2q}y\right) \cos\left(\frac{\pi(2m-1)}{2r}z\right),$$

представляют собой частные решения уравнения (2.1), удовлетворяющим краевым условиям (2.2).

В силу линейности и однородности уравнения (2.1) суперпозиция построенных частных решений также является его решением. Поэтому решение задачи А будем искать в виде следующего ряда:

$$u(x, y, z) = \frac{2}{\sqrt{qr}} \sum_{n,m=1}^{+\infty} \left[C_{1n,m} e^{-k_{n,m}x} + e^{\frac{1}{2}k_{n,m}x} \left(C_{2n,m} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} k_{n,m}x + C_{3n,m} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} k_{n,m}x \right) \right] \cos \left(\frac{\pi(2n-1)}{2q} y \right) \cos \left(\frac{\pi(2m-1)}{2r} z \right). \quad (4.6)$$

Предполагая временно, что ряд (4.6) вместе со своими производными, входящими в уравнение (2.1), сходится равномерно, и налагая на функцию $u(x, y, z)$, определяемую этим рядом, краевые условия (2.3), приходим к следующим соотношениям:

$$\begin{cases} u(0, y, z) = \psi_1(y, z) = \frac{2}{\sqrt{qr}} \sum_{n,m=1}^{+\infty} \psi_{1n,m} \cos \left(\frac{\pi(2n-1)}{2q} y \right) \cos \left(\frac{\pi(2m-1)}{2r} z \right), \\ u(p, y, z) = \psi_2(y, z) = \frac{2}{\sqrt{qr}} \sum_{n,m=1}^{+\infty} \psi_{2n,m} \cos \left(\frac{\pi(2n-1)}{2q} y \right) \cos \left(\frac{\pi(2m-1)}{2r} z \right), \\ u_x(p, y, z) = \psi_3(y, z) = \frac{2}{\sqrt{qr}} \sum_{n,m=1}^{+\infty} \psi_{3n,m} \cos \left(\frac{\pi(2n-1)}{2q} y \right) \cos \left(\frac{\pi(2m-1)}{2r} z \right), \end{cases} \quad (4.7)$$

где

$$\begin{cases} C_{1n,m} + C_{2n,m} = \psi_{1n,m}, \\ C_{1n,m} e^{-k_{n,m}p} + e^{\frac{1}{2}k_{n,m}p} \left(C_{2n,m} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} k_{n,m}p + C_{3n,m} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} k_{n,m}p \right) = \psi_{2n,m}, \\ -k_{n,m} C_{1n,m} e^{-k_{n,m}p} + k_{n,m} e^{\frac{1}{2}k_{n,m}p} \left(C_{2n,m} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} k_{n,m}p + \frac{\pi}{3} \right) + C_{3n,m} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} k_{n,m}p + \frac{\pi}{3} \right) \right) = \psi_{3n,m}. \end{cases} \quad (4.8)$$

Из (4.7) видно, что числа $\psi_{in,m}$, ($i = \overline{1,3}$) являются коэффициентами Фурье функции $\psi_i(y, z)$, ($i = \overline{1,3}$) при разложении их в ряд Фурье по косинусам на $\{0 < y < q, 0 < z < r\}$, т.е.

$$\psi_{in,m} = \frac{2}{\sqrt{qr}} \int_0^q \int_0^r \psi_i(y, z) \cos \left(\frac{\pi(2n-1)}{2q} y \right) \cos \left(\frac{\pi(2m-1)}{2r} z \right) dy dz, \quad i = \overline{1,3}. \quad (4.9)$$

Итак, для вычисления коэффициентов $C_{in,m}$, $i = \overline{1,3}$ получена система уравнений (4.8). Основной определитель данной системы равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ e^{-k_{n,m}p} & \alpha e^{\frac{1}{2}k_{n,m}p} & \beta e^{\frac{1}{2}k_{n,m}p} \\ -k_{n,m} e^{-k_{n,m}p} & \gamma k_{n,m} e^{\frac{1}{2}k_{n,m}p} & \delta k_{n,m} e^{\frac{1}{2}k_{n,m}p} \end{vmatrix} = \sqrt{3} k_{n,m} e^{k_{n,m}p} \bar{\Delta},$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} &= \frac{1}{2} - e^{-\frac{3}{2}k_{n,m}p} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} k_{n,m}p + \frac{\pi}{6} \right), \quad \alpha = \cos \frac{\sqrt{3}}{2} k_{n,m}p, \quad \beta = \sin \frac{\sqrt{3}}{2} k_{n,m}p, \\ \gamma &= \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} k_{n,m}p + \frac{\pi}{3} \right), \quad \delta = \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} k_{n,m}p + \frac{\pi}{3} \right), \quad n, m \in N. \end{aligned}$$

Теперь покажем, что $\bar{\Delta} \neq 0$ и $\min |\bar{\Delta}| > 0$, для этого введем обозначение $f(\xi) = \frac{1}{2} - e^{-\sqrt{3}\xi} \sin \left(\xi + \frac{\pi}{6} \right)$, где $\xi = \frac{\sqrt{3}}{2} k_{n,m}p$, $k_{n,m} = \sqrt[3]{\left(\frac{(2n-1)^2}{q^2} + \frac{(2m-1)^2}{r^2} \right) \frac{\pi^2}{4}} > 0, p > 0$, $\xi = \frac{\sqrt{3}}{2} k_{n,m}p$ - принимает только дискретные значения:

а) $f'(\xi) > 0$, т.е. $f'(\xi) = 2e^{-\sqrt{3}\xi} \sin \xi > 0 \Rightarrow \sin \xi > 0$, отсюда получим, что при $0 < \xi < \pi$ - функция возрастает и минимальное значение принимает при $n = 1, m = 1 \Rightarrow \bar{\Delta} \geq \frac{1}{2} - e^{-\frac{3}{2}k_{1,1}p} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_{1,1}p + \frac{\pi}{6} \right) = \delta_1 > 0$;

б) при $\xi \geq \pi$ выполняется неравенство $\frac{1}{2} - e^{-\sqrt{3}\xi} \sin \left(\xi + \frac{\pi}{6} \right) > \delta_2 \Rightarrow e^{\sqrt{3}\xi} > \left(\frac{1}{2} - \delta_2 \right) > 1 \Rightarrow 0 < \delta_2 < \min_{\xi \geq \pi} \left(\frac{1}{2} - e^{-\sqrt{3}\xi} \right) = \frac{1}{2} - e^{-\sqrt{3}\pi}$.

Так как выполняются эти условия и минимальные значения $\bar{\Delta} = \delta = \min \{\delta_1; \delta_2\} > 0$, получим $\Delta \neq 0$. Следует отметить, что минимальное значение $\bar{\Delta} = \delta = \min \{\delta_1; \delta_2\} > 0$ даёт отсутствие "малого знаменателя".

В силу $\Delta \neq 0$, система уравнений (4.8) имеет единственное решение:

$$\begin{aligned} C_{1n,m} &= \frac{1}{\Delta} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \psi_{1n,m} k_{n,m} e^{k_{n,m}p} - \psi_{2n,m} \delta k_{n,m} e^{\frac{1}{2}k_{n,m}p} + \psi_{3n,m} \beta e^{\frac{1}{2}k_{n,m}p} \right], \\ C_{2n,m} &= \frac{1}{\Delta} \left[-k_{n,m}(\beta + \delta) \psi_{1n,m} e^{-\frac{1}{2}k_{n,m}p} + \psi_{2n,m} \delta k_{n,m} e^{\frac{1}{2}k_{n,m}p} - \psi_{3n,m} \beta e^{\frac{1}{2}k_{n,m}p} \right], \\ C_{3n,m} &= \frac{1}{\Delta} \left[k_{n,m}(\alpha + \gamma) \psi_{1n,m} e^{-\frac{1}{2}k_{n,m}p} - \psi_{2n,m} k_{n,m} \left(e^{-k_{n,m}p} + \gamma e^{\frac{1}{2}k_{n,m}p} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \psi_{3n,m} \left(\alpha e^{\frac{1}{2}k_{n,m}p} - e^{-k_{n,m}p} \right) \right]. \end{aligned}$$

Подставив значения $C_{in,m}$, $i = \overline{1,3}$ в (4.6), получим

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \frac{2}{\sqrt{qr}} \sum_{n,m=1}^{+\infty} [\psi_{1n,m} B_{1n,m}(x) + \psi_{2n,m} B_{2n,m}(x) + \psi_{3n,m} B_{3n,m}(x)] \times \\ &\quad \times \cos \left(\frac{\pi(2n-1)}{2q} y \right) \cos \left(\frac{\pi(2m-1)}{2r} z \right), \end{aligned} \quad (4.10)$$

где

$$\begin{aligned} B_{1n,m}(x) &= \frac{\sqrt{3}k_{n,m}}{\Delta} \left(\frac{1}{2} e^{k_{n,m}(p-x)} - e^{-\frac{1}{2}k_{n,m}(p-x)} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_{n,m}(p-x) + \frac{\pi}{6} \right) \right), \\ B_{2n,m}(x) &= \frac{k_{n,m}}{\Delta} \left(-e^{k_{n,m}(\frac{1}{2}p-x)} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_{n,m}p + \frac{\pi}{3} \right) - e^{k_{n,m}(\frac{1}{2}x-p)} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}k_{n,m}x + \right. \\ &\quad \left. + e^{\frac{1}{2}k_{n,m}(p+x)} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_{n,m}(p-x) + \frac{\pi}{3} \right) \right), \\ B_{3n,m}(x) &= \frac{1}{\Delta} \left(e^{k_{n,m}(\frac{1}{2}p-x)} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}k_{n,m}p - e^{k_{n,m}(\frac{1}{2}x-p)} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}k_{n,m}x - \right. \\ &\quad \left. - e^{\frac{1}{2}k_{n,m}(p+x)} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_{n,m}(p-x) \right) \right). \end{aligned}$$

Теперь покажем, что ряд (4.10) и его частные производные u_{xxx} , u_{yy} и u_{zz} сходятся абсолютно и равномерно в области $\bar{D}$. Это означает, что функция $u(x, y, z)$, определяемая рядом (4.10), является решением задачи A .

Сначала покажем абсолютную и равномерную сходимость ряда (4.10). На основании (4.10) получим оценку

$$\begin{aligned} |u(x, y, z)| &\leq M \left[\sum_{n,m=1}^{+\infty} |\psi_{1n,m}| |B_{1n,m}(x)| + \sum_{n,m=1}^{+\infty} |\psi_{2n,m}| |B_{2n,m}(x)| + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n,m=1}^{+\infty} |\psi_{3n,m}| |B_{3n,m}(x)| \right]. \end{aligned} \quad (4.11)$$

В данной работе все оценки выполнены в замкнутой области $\bar{D}$, а максимальное значение всех известных положительных чисел, входящих в оценки, будем обозначать с одной буквой M .

Теперь применяя интегрирование по частям к (4.9) с учетом условия 2 теоремы (4.1), получаем

$$|\psi_{in,m}| = M \frac{|\Psi_{in,m}|}{n^3 m^3}, i = \overline{1,3}, \quad (4.12)$$

где

$$\Psi_{in,m} = \frac{2}{\sqrt{qr}} \int_0^q \int_0^r \frac{\partial^6 \psi_i(y,z)}{\partial y^3 \partial z^3} \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2q}y\right) \sin\left(\frac{\pi(2m-1)}{2r}z\right) dy dz, i = \overline{1,3}.$$

Учитывая (4.12), оценка (4.11) принимает следующий вид

$$|u(x,y,z)| \leq M \left[\sum_{n,m=1}^{+\infty} \frac{|\Psi_{1n,m}|}{n^3 m^3} |B_{1n,m}(x)| + \sum_{n,m=1}^{+\infty} \frac{|\Psi_{2n,m}|}{n^3 m^3} |B_{2n,m}(x)| + \sum_{n,m=1}^{+\infty} \frac{|\Psi_{3n,m}|}{n^3 m^3} |B_{3n,m}(x)| \right]. \quad (4.13)$$

С учетом $x \in [0, p]$ оценим функции $B_{in,m}(x)$, $i = \overline{1,3}$:

$$|B_{1n,m}(x)| \leq \frac{1}{|\bar{\Delta}|} \left[\frac{1}{2} e^{-k_{n,m}x} + e^{-\frac{1}{2}k_{n,m}(3p-x)} \right] \leq M,$$

$$|B_{2n,m}(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{3}|\bar{\Delta}|} \left[e^{-k_{n,m}(\frac{1}{2}p+x)} + e^{-k_{n,m}(2p-\frac{1}{2}x)} + e^{-\frac{1}{2}k_{n,m}(p-x)} \right] \leq M,$$

$$|B_{3n,m}(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{3}k_{n,m}|\bar{\Delta}|} \left[e^{-k_{n,m}(\frac{1}{2}p+x)} + e^{-k_{n,m}(2p-\frac{1}{2}x)} + e^{-\frac{1}{2}k_{n,m}(p-x)} \right] \leq \frac{1}{k_{n,m}} M,$$

$$|B_{3n,m}(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{3}k_{n,m}|\bar{\Delta}|} \left[e^{-k_{n,m}(\frac{1}{2}p+x)} + e^{-k_{n,m}(2p-\frac{1}{2}x)} + e^{-\frac{1}{2}k_{n,m}(p-x)} \right] \leq \frac{1}{k_{n,m}} M,$$

где

$$\bar{\Delta} = \frac{1}{2} - e^{-\frac{3}{2}k_{n,m}p} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_{n,m}p + \frac{\pi}{6}\right).$$

Учитывая оценки от функции $B_{in,m}(x)$, $i = \overline{1,3}$, тогда из (4.13), получим

$$|u(x,y,z)| \leq M \left[\sum_{n,m=1}^{+\infty} \frac{|\Psi_{1n,m}|}{n^3 m^3} + \sum_{n,m=1}^{+\infty} \frac{|\Psi_{2n,m}|}{n^3 m^3} + \sum_{n,m=1}^{+\infty} \frac{|\Psi_{3n,m}|}{n^{\frac{10}{3}} m^{\frac{10}{3}}} \right] < \infty.$$

Отсюда следует, что ряд (4.10) сходится абсолютно и равномерно в области $\bar{D}$.

Далее покажем, что частные производные этого ряда, участвующие в уравнении (2.1), также обладают свойством абсолютной и равномерной сходимости в $\bar{D}$. Для этого продифференцируем ряд (4.10) почленно дважды по переменными y и z . В результате получаем следующие выражения для вторых производных:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\pi^2}{2\sqrt{q^5}r} (2n-1)^2 u(x,y,z),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{\pi^2}{2\sqrt{qr^5}} (2m-1)^2 u(x,y,z).$$

Учитывая оценку $u(x,y,z)$, получим

$$\left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right| \leq M \left[\sum_{n,m=1}^{+\infty} \frac{|\Psi_{1n,m}|}{nm^3} + \sum_{n,m=1}^{+\infty} \frac{|\Psi_{2n,m}|}{nm^3} + \sum_{n,m=1}^{+\infty} \frac{|\Psi_{3n,m}|}{n^{\frac{4}{3}} m^{\frac{10}{3}}} \right],$$

$$\left| \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right| \leq M \left[\sum_{n,m=1}^{+\infty} \frac{|\Psi_{1n,m}|}{n^3 m} + \sum_{n,m=1}^{+\infty} \frac{|\Psi_{2n,m}|}{n^3 m} + \sum_{n,m=1}^{+\infty} \frac{|\Psi_{3n,m}|}{n^{\frac{10}{3}} m^{\frac{4}{3}}} \right].$$

Используя неравенства Коши- Буняковского и Бесселя, получим

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right| &\leq M \left[\sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{nm^3} \right)^2} \left(\sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty} |\Psi_{1n,m}|^2} + \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty} |\Psi_{2n,m}|^2} \right) + \sum_{n,m=1}^{+\infty} \frac{|\Psi_{3n,m}|}{n^{\frac{4}{3}} m^{\frac{10}{3}}} \right] \leq \\ &\leq M \left[\left\| \frac{\partial^6 \psi_1(y, z)}{\partial y^3 \partial z^3} \right\|_{L_2(0 < y < q, 0 < z < r)} + \left\| \frac{\partial^6 \psi_2(y, z)}{\partial y^3 \partial z^3} \right\|_{L_2(0 < y < q, 0 < z < r)} + \sum_{n,m=1}^{+\infty} \frac{|\Psi_{3n,m}|}{n^{\frac{4}{3}} m^{\frac{10}{3}}} \right] < \infty, \\ \left| \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right| &\leq M \left[\sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^3 m} \right)^2} \left(\sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty} |\Psi_{1n,m}|^2} + \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty} |\Psi_{2n,m}|^2} \right) + \sum_{n,m=1}^{+\infty} \frac{|\Psi_{3n,m}|}{n^{\frac{10}{3}} m^{\frac{4}{3}}} \right] \leq \\ &\leq M \left[\left\| \frac{\partial^6 \psi_1(y, z)}{\partial y^3 \partial z^3} \right\|_{L_2(0 < y < q, 0 < z < r)} + \left\| \frac{\partial^6 \psi_2(y, z)}{\partial y^3 \partial z^3} \right\|_{L_2(0 < y < q, 0 < z < r)} + \sum_{n,m=1}^{+\infty} \frac{|\Psi_{3n,m}|}{n^{\frac{10}{3}} m^{\frac{4}{3}}} \right] < \infty, \end{aligned}$$

где

$$\sum_{n,m=1}^{+\infty} |\Psi_{in,m}|^2 \leq \left\| \frac{\partial^6 \psi_i(y, z)}{\partial y^3 \partial z^3} \right\|_{L_2(0 < y < q, 0 < z < r)}^2, \quad i = 1, 2,$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Следовательно, ряд, соответствующий функциям $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ сходится абсолютно и равномерно в области $\bar{D}$.

Аналогично можно доказать абсолютную и равномерную сходимость ряда $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$, или же это можно получить из

$$\left| \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right| \leq \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right| + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right| \text{ и приведенного выше доказательства.}$$

Теорема 4.1 доказана.

5. Заключение

В данной работе исследована краевая задача для дифференциального уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в трёхмерной области. На основе проведённого анализа можно сформулировать следующие основные результаты:

1. Единственность решения. С помощью метода энергетических интегралов доказано, что если решение поставленной задачи существует, то оно единственно. При этом установлено, что разность двух возможных решений тождественно равна нулю в замкнутой области.

2. Существование решения. Методом разделения переменных построено явное решение в виде бесконечного двойного ряда по системе собственных функций соответствующей спектральной задачи. Получены формулы для коэффициентов ряда через коэффициенты Фурье заданных краевых функций.

3. Обоснование корректности. Доказана абсолютная и равномерная сходимость построенного ряда, а также рядов его частных производных, входящих в исходное уравнение. Это обосновывает возможность почленного дифференцирования и подтверждает, что построенная функция действительно является регулярным решением задачи в указанном классе гладкости.

4. Отсутствие малых знаменателей. Показано, что определитель системы для определения неизвестных коэффициентов не обращается в нуль, причём его модуль ограничен снизу положительной постоянной. Это гарантирует устойчивость решения и корректность используемого метода.

Таким образом, в работе получено полное аналитическое решение краевой задачи для дифференциального уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, доказаны его существование и единственность в соответствующем функциональном классе. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании

более общих краевых задач для уравнений подобного типа, а также в прикладных задачах нелинейной акустики, гидродинамики и теории фильтрации.

Благодарность

Авторы хотели бы выразить искреннюю благодарность редактору и рецензентам за их полезные комментарии и предложения.

Финансирование

Для этой работы нет финансирования.

Список литературы

- [1] Юлдашев Т. К.: *Обратная задача для одного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных третьего порядка*. Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, - Самара. **34** (1), 56-65 (2014).
- [2] Tursunov D. A., Omaraliev G. A.: *An Intermediate Boundary Layer in Singularly Perturbed First-Order Equations*. Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN. **28** (2), 193-200 (2022).
- [3] Block H.: *Sur les equations lineaires aux derives partielles a carateristiques multiples*. Ark. Mat. Astron. Fus. Note 1. **13** (7), 1-51 (1912).
- [4] Del Vecchio E.: *Sulleequazioni $z_{xxx} - z_y + \varphi_1(x, y) = 0$, $z_{xxx} - z_{yy} + \varphi_2(x, y) = 0$* . Memorie R. Accad. Sci. Ser.2. - Torino. **66**, 1-41 (1915).
- [5] Cattabriga L.: *Potenziali di linea e di dominio per equazioni non paraboliche in due variabili caratteristiche multiple*. Rendiconti del seminario matematico della univ. di Padova. **31**, 1-45 (1961).
- [6] Джураев Т. Д., Апаков Ю. П.: *Об автомодельном решении одного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками*. Вестник Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, - Самара. **15** (2), 18-26 (2007).
- [7] Джураев Т. Д., Апаков Ю. П.: *К теории уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, содержащего вторую производную по времени*. Украинский математический журнал. **62** (1), 40-51 (2010).
- [8] Арнольд В. И.: *Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике*. УМН. **18** (6), 91-192 (1967).
- [9] Козлов В. В.: *Условие вмерзженности поля направлений, малые знаменатели и хаотизация стационарных течений вязкой жидкости*. ПММ. **63** (2), 237-244 (1999).
- [10] Сабитов К. Б.: *Задача Дирихле для уравнений с частными производными*. Матем. заметки. **97** (2), 262-276 (2015).
- [11] Apakov Yu. P., Umarov R. A.: *On the third boundary problem for a nonhomogeneous third order equation with multiple characteristics*. Uzbek Mathematical Journal. **67** (1), 4-14 (2023).
- [12] Умаров Р. А.: *Об одной краевой задаче для неоднородного уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами*. Научный вестник НамГУ. **2**, 16-27 (2024).
- [13] Сабитов К. Б.: *Начально-граничные задачи для уравнения колебаний прямоугольной пластины*. Изв. вузов. Матем. **10**, 60-70 (2021).
- [14] Уткина Е. А.: *Задача Дирихле для одного трехмерного уравнения*. Вестник Самарского государственного университета. Естественнонауч. сер. **76** (1), 84-95 (2010).
- [15] Apakov Yu. P., Hamitov A. A.: *Third Boundary Value Problem for an Equation with the Third Order Multiple Characteristics in Three Dimensional Space*. Lobachevskii Journal of Mathematics. **44** (2), 523-532 (2023).
- [16] Apakov Yu. P., Hamitov A. A.: *Third boundary value problem for a third-order inhomogeneous equation with multiple characteristics in three-dimensional space*. Uzbek Mathematical Journal. **69** (1), 27-36 (2025).
- [17] Ректорис К.: *Вариационные методы в математической физике и технике*. Москва, Мир (1985).

Solving the Boundary value Problem for a Third-Order Equation with Multiple Characteristics in Three-Dimensional Space

Khamitov Azizbek Akhmadjon ugli, Ermatov Jamoldin Salokhiddin ugli

Abstract

In this work, a boundary value problem in three-dimensional space is considered for a third-order equation with multiple characteristics. The uniqueness of the solution to the problem is proved using the method of energy integrals, and the existence of the solution is proved using the method of separation of variables. The solution is explicitly constructed as an infinite series, and the possibility of differentiating the series with respect to all variables is justified. The uniform convergence is established by proving that the "small denominator" is non-zero.

Keywords

Equations with multiple characteristics; boundary value problem; uniqueness; existence; eigenvalue; eigenfunction; functional series and uniform convergence.

Affiliations

Khamitov Azizbek Akhmadjon ugli

Address: Namangan State Technical University, Dept. of Higher Mathematics, 160103, Namangan, Uzbekistan.

e-mail: azizbek.khamitov.93@mail.ru

ORCID ID: <https://orcid.org/0009-0000-2184-450X>

Ermatov Jamoldin Salokhiddin ugli

Address: Namangan State Technical University, Dept. of Higher Mathematics, 160103, Namangan, Uzbekistan.

e-mail: ermatovjamoldin578@gmail.com

ORCID ID: <https://orcid.org/0009-0003-7127-1828>