

Применение метода функции Грина к исследованию краевых задач в полубесконечных областях для уравнений четвертого порядка с кратными характеристиками

Б.И. Жамалов * Д.М. Меликузиева

Аннотация

Предметом исследования в данной статье являются граничные задачи в полуограниченной области для неоднородного дифференциального уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками. Вопросы единственности регулярных решений разработанных задач решены на основе аппарата энергетических интегралов, в то время как теоремы существования обоснованы с применением классического метода разделения переменных. Искомые решения аналитически выражены через сконструированную функцию Грина в форме бесконечных функциональных рядов. В рамках работы строго доказана абсолютная, а также равномерная сходимость как самих рядов решений, так и рядов, составленных из соответствующих частных производных в рассматриваемых геометрических областях.

Ключевые слова: Дифференциальные уравнения четвертого порядка; кратные характеристика; полубесконечная область; интеграл энергии; функция Грина; функциональный ряд; равномерная сходимость; частные производные.

Предметная классификация AMS (2020): Основная: 35C10 ; Дополнительная: 35J15..

1. Введение

Моделирование широкого круга задач газовой динамики, теории упругости, а также механики пластин и оболочек неразрывно связано с исследованием дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка. В контексте прикладных физических приложений дифференциальные уравнения четвертого порядка также представляют существенный научный интерес ([1-5]).

Вопросам систематизации и классификации дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка посвящена известная монография Т. Д. Джураева и А. Сопуева [6].

Так, в публикации [7] предмет исследования составила краевая задача в ограниченной области для неоднородного уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками, содержащего вторую временную производную.

Другой тип граничной задачи для уравнения четвертого порядка вида $u_{xxxx} - u_{tt} = f(x, t)$ изучен в работе [8].

Проблематика, связанная с уравнениями колебания балки, детально отражена в изысканиях [9-11].

Ряд авторов в работах [12-16] обратились к анализу краевых задач для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками, включающих вторую производную по времени, в то время как в статьях [17-18] аналогичные уравнения исследовались в геометрии полуограниченных областей.

При этом граничные задачи для уравнений четвертого порядка, содержащих третью производную по временной переменной, до сих пор остаются малоизученными [19-22].

Тем не менее, в последнее время наблюдается рост интереса именно к уравнениям четвертого порядка с третьей производной по времени. Подобные математические структуры выступают фундаментальной основой в сфере нанотехнологий, в частности, при прецизионном расчете частотных характеристик колебаний микро- и наносенсоров. К примеру, С. Конг (Kong S.) совместно с соавторами в своих ключевых трудах провели подробный статический и динамический анализ микробалок, опираясь на градиентную теорию упругости (strain gradient elasticity theory) [23].

В отличие от вышеупомянутых исследований, в данной работе рассматривается краевая задача, поставленная для уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками в полубесконечной области, путем построения функции Грина и её применения для получения решения

2. Постановка задач

В областях $D^+ = \{(x, y) : 0 < x < p, 0 < y < +\infty\}$ и $D^- = \{(x, y) : 0 < x < p, -\infty < y < 0\}$ рассмотрим уравнение

$$u_{xxxx}(x, y) - u_{yy}(x, y) + au(x, y) = g(x, y), \quad (2.1)$$

где $a, p \in R$, $g(x, y)$ — заданная достаточно гладкая функция.

Задача A_1 . В области D^+ требуется найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую уравнению (2.1), принадлежащую классу $u(x, y) \in C_{x,y}^{4,3}(D^+) \cap C_{x,y}^{3,2}(D^+ \cup \Gamma_1)$, ограниченную при $y \rightarrow +\infty$ функции $u(x, y)$, $u_y(x, y)$ ограничена, равномерно по x , такую что $u_{xx} \in L_2(D^+)$ и удовлетворяющего следующим краевым условиям:

$$u(0, y) = u_x(0, y) = u_{xx}(p, y) = u_{xxx}(p, y) = 0, \quad 0 \leq y < +\infty \quad (2.2)$$

$$u_y(x, 0) = \psi_1(x), \quad u_{yy}(x, 0) = \psi_2(x), \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} u_{yy}(x, y) = 0, \quad 0 \leq x \leq p \quad (2.3)$$

где $\Gamma_1 = \partial D^+$ - граница области D^+ . $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ - заданные достаточно гладкие функции.

Задача A_2 . В области D^- требуется найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую уравнению (2.1), принадлежащую классу $C_{x,y}^{4,3}(D^-) \cap C_{x,y}^{3,2}(D^- \cup \Gamma_2)$, ограниченную при $y \rightarrow -\infty$ функции $u(x, y)$, $u_y(x, y)$ ограничена, равномерно по x , такую что $u_{xx} \in L_2(D^-)$, удовлетворяющего условием (2.2) и:

$$u_{yy}(x, 0) = \psi_3(x), \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} u_y(x, y) = \lim_{y \rightarrow -\infty} u_{yy}(x, y) = 0, \quad 0 \leq x \leq p, \quad (2.4)$$

где $\Gamma_2 = \partial D^-$ — граница области D^- , $\psi_3(x)$ - заданная достаточно гладкая функция.

3. Единственность решения

Теорема 3.1. Если задача A_1 (A_2) имеет решение, то при условии $a \geq 0$, оно единственно.

Доказательство. Предположим обратное. Пусть задача $A_1(A_2)$ имеет два решения $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$. Тогда функция $u(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$ удовлетворяет уравнению (2.1) с однородными краевыми условиями. Докажем, что $u(x, y) \equiv 0$ в D^+ (D^-).

В области D^+ (D^-) справедливо тождество

$$\frac{\partial}{\partial x} (u u_{xxx} - u_x u_{xx}) + u_{xx}^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left(-u u_{yy} + \frac{1}{2} u_y^2 \right) + a u^2 = 0. \quad (3.1)$$

Интегрируя тождество (3.1) по области $D_d^+ = \{(x, y) : 0 < x < p, \quad 0 < y < d\}$, где $d > 0$ имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^d [u(p, y) u_{xxx}(p, y) - u_x(p, y) u_{xx}(p, y)] dy \\ & - \int_0^d [u(0, y) u_{xxx}(0, y) - u_x(0, y) u_{xx}(0, y)] dy \\ & + \int_0^p \int_0^d u_{xx}^2 dx dy + \int_0^p (-u(x, d) u_{yy}(x, d) + u(x, 0) u_{yy}(x, 0)) dx \\ & + \frac{1}{2} \int_0^p (u_y^2(x, d) - u_y^2(x, 0)) dx + a \int_0^p \int_0^d u^2(x, y) dx dy = 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Если $d \rightarrow +\infty$, то $D_d^+ \rightarrow D^+$. Учитывая однородные краевые условия задачи A_1 , т.е. $\psi_1(x) = \psi_2(x) = 0$ и свойства функции $u(x, y)$ при $y \rightarrow +\infty$, а также, что $u_{xx} \in L_2(D^+)$, из (3.2) получаем

$$\iint_{D^+} u_{xx}^2(x, y) dx dy + \frac{1}{2} \lim_{d \rightarrow +\infty} \int_0^p u_y^2(x, d) dx + a \iint_{D^+} u^2(x, y) dx dy = 0.$$

Если $a > 0$ из третьего слагаемого, получим $u(x, y) \equiv 0$, $(x, y) \in D^+ \cup \Gamma_1$, а если $a = 0$, из первого слагаемого имеем $u_{xx}(x, y) = 0$. Следовательно, $u(x, y) = x f_1(y) + f_2(y)$, где $f_1(y)$, $f_2(y)$ – произвольные функции, удовлетворяющие условиям задачи A_1 . С учётом условия (2.2) в области $D^+ \cup \Gamma_1$ получаем $f_1(y) = f_2(y) = 0$, тогда имеем $u(x, y) \equiv 0$.

$D_c^- = \{(x, y) : 0 < x < p, \quad c < y < 0\}$, где $c < 0$ имеем если $c \rightarrow -\infty$, то $D_c^- \rightarrow D^-$. Учитывая однородные краевые условия задачи A_2 , т.е. $\psi_3(x) = 0$ и свойства функции $u(x, y)$ при $y \rightarrow -\infty$, а также, что $u_{xx} \in L_2(D^-)$, из (3.2) получаем

$$\iint_{D^-} u_{xx}^2(x, y) dx dy + \frac{1}{2} \int_0^p u_y^2(x, 0) dx + a \iint_{D^-} u^2(x, y) dx dy = 0.$$

Отсюда также легко следует, что $u(x, y) \equiv 0$ в $D^- \cup \Gamma_2$.

Теорема 3.1 доказана.

4. Существование решения

Теорема 4.1. При выполнении следующих условий:

- 1) $\psi_i(x) \in C^5[0, p]$, $i = 1, 2, 3$; $\psi_i(0) = \psi'_i(p) = \psi''_i(0) = \psi'''_i(p) = \psi^{(4)}_i(p) = \psi^{(4)}_i(0) = 0$;
 - 2) $\frac{\partial^2 g(x, y)}{\partial x \partial y} \in C_b(D^+ \cup \Gamma_1)$, $\frac{\partial^2 g(x, y)}{\partial x \partial y} \in C_b(D^- \cup \Gamma_2)$; $g(0, y) = 0$, $\lim_{y \rightarrow \pm\infty} g(x, y) = 0$, $g(x, 0) = 0$,
- то решение задачи A_1 (A_2) существует.

Доказательство. Решение задачи A_1 (A_2) ищем в виде

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) Y_n(y). \quad (4.1)$$

Подставляя (4.1) в уравнение (2.1), получаем по $X(x)$ следующую задачу:

$$\begin{cases} X^{IV} - \lambda X = 0, \\ X(0) = X'(0) = X''(p) = X'''(p) = 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

Собственные значения задачи (4.2) [11],

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi}{p} \left(n - \frac{1}{2} + (-1)^n O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \right)^4 \quad n \in N,$$

соответствующая собственная функция имеет вид [10]:

$$X_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{p} \left| \operatorname{cth}\left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n} p}{2}\right) \right|} \left(\frac{\operatorname{ch}\left(\sqrt[4]{\lambda_n}\left(x - \frac{p}{2}\right)\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n} p}{2}\right)} + \frac{\sin\left(\sqrt[4]{\lambda_n}\left(x - \frac{p}{2}\right)\right)}{\cos\left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n} p}{2}\right)} \right), & n = 2m - 1, \\ \frac{1}{\sqrt{p} \left| \operatorname{th}\left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n} p}{2}\right) \right|} \left(-\frac{\operatorname{sh}\left(\sqrt[4]{\lambda_n}\left(x - \frac{p}{2}\right)\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n} p}{2}\right)} + \frac{\cos\left(\sqrt[4]{\lambda_n}\left(x - \frac{p}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n} p}{2}\right)} \right), & n = 2m. \end{cases} \quad (4.3)$$

Известно [11], что система собственных функций (4.3) задачи (4.2) является полной и ортонормированной в $L_2(0, p)$.

Учитывая условия (2.3), приходим к следующей задаче по $Y(y)$ для A_1 :

$$\begin{cases} Y''' - (a + \lambda_n) Y = g_n(y) \\ Y'(0) = \psi_{1n}, \quad Y''(0) = \psi_{2n}, \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} Y''(y) = 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

здесь

$$\psi_{in} = \int_0^p \psi_i(x) X_n(x) dx, \quad i = 1, 2,$$

$$g_n(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{p} \left| \operatorname{cth}\left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n} p}{2}\right) \right|} \int_0^p g(x, y) \left(\frac{\operatorname{ch}\left(\sqrt[4]{\lambda_n}\left(x - \frac{p}{2}\right)\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n} p}{2}\right)} + \frac{\sin\left(\sqrt[4]{\lambda_n}\left(x - \frac{p}{2}\right)\right)}{\cos\left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n} p}{2}\right)} \right) dx, & n = 2m - 1; \\ \frac{1}{\sqrt{p} \left| \operatorname{th}\left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n} p}{2}\right) \right|} \int_0^p g(x, y) \left(-\frac{\operatorname{sh}\left(\sqrt[4]{\lambda_n}\left(x - \frac{p}{2}\right)\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n} p}{2}\right)} + \frac{\cos\left(\sqrt[4]{\lambda_n}\left(x - \frac{p}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n} p}{2}\right)} \right) dx, & n = 2m. \end{cases}$$

Интегрируя по частям $g_n(y)$ и учитывая второе условие теоремы 4.1, имеем:

$$g_n(y) = \frac{1}{\sqrt[4]{\lambda_n} \sqrt{p} \left| \operatorname{cth} \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n} p}{2} \right) \right|} g(x, y) \left(\frac{\operatorname{sh} \sqrt[4]{\lambda_n} \left(x - \frac{p}{2} \right)}{\operatorname{sh} \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n} p}{2} \right)} - \frac{\cos \left(\sqrt[4]{\lambda_n} \left(x - \frac{p}{2} \right) \right)}{\cos \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n} p}{2} \right)} \right) \Big|_{x=0}^{x=p} -$$

$$- \frac{1}{\sqrt[4]{\lambda_n} \sqrt{p} \left| \operatorname{cth} \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n} p}{2} \right) \right|} \int_0^p g_x(x, y) \left(\frac{\operatorname{sh} \sqrt[4]{\lambda_n} \left(x - \frac{p}{2} \right)}{\operatorname{sh} \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n} p}{2} \right)} - \frac{\cos \left(\sqrt[4]{\lambda_n} \left(x - \frac{p}{2} \right) \right)}{\cos \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n} p}{2} \right)} \right) dx =$$

$$= \frac{2\sqrt{p}}{\pi(2n-1)} F_n(y), \quad n = 2m-1;$$

$$g_n(y) = \frac{1}{\sqrt[4]{\lambda_n} \sqrt{p} \left| \operatorname{th} \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n} p}{2} \right) \right|} g(x, y) \left(-\frac{\operatorname{ch} \sqrt[4]{\lambda_n} \left(x - \frac{p}{2} \right)}{\operatorname{ch} \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n} p}{2} \right)} + \frac{\sin \left(\sqrt[4]{\lambda_n} \left(x - \frac{p}{2} \right) \right)}{\sin \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n} p}{2} \right)} \right) \Big|_{x=0}^{x=p} -$$

$$- \frac{1}{\sqrt[4]{\lambda_n} \sqrt{p} \left| \operatorname{th} \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n} p}{2} \right) \right|} \int_0^p g_x(x, y) \left(-\frac{\operatorname{ch} \sqrt[4]{\lambda_n} \left(x - \frac{p}{2} \right)}{\operatorname{ch} \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n} p}{2} \right)} + \frac{\sin \left(\sqrt[4]{\lambda_n} \left(x - \frac{p}{2} \right) \right)}{\sin \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n} p}{2} \right)} \right) dx =$$

$$= \frac{2\sqrt{p}}{\pi(2n-1)} F_n(y), \quad n = 2m.$$

где

$$F_n(y) = -\frac{1}{\left| \operatorname{cth} \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n} p}{2} \right) \right|} \int_0^p g_x(x, y) \left(\frac{\operatorname{sh} \sqrt[4]{\lambda_n} \left(x - \frac{p}{2} \right)}{\operatorname{sh} \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n} p}{2} \right)} - \frac{\cos \left(\sqrt[4]{\lambda_n} \left(x - \frac{p}{2} \right) \right)}{\cos \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n} p}{2} \right)} \right) dx, \quad n = 2m-1;$$

$$F_n(y) = -\frac{1}{\left| \operatorname{th} \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n} p}{2} \right) \right|} \int_0^p g_x(x, y) \left(-\frac{\operatorname{ch} \sqrt[4]{\lambda_n} \left(x - \frac{p}{2} \right)}{\operatorname{ch} \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n} p}{2} \right)} + \frac{\sin \left(\sqrt[4]{\lambda_n} \left(x - \frac{p}{2} \right) \right)}{\sin \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n} p}{2} \right)} \right) dx, \quad n = 2m.$$

В последующих выкладках символ M будет использоваться для обозначения максимума из всех положительных известных величин, фигурирующих в оценках. Из $g_n(y)$ получим оценки

$$|g_n(y)| \leq \frac{M}{n} |F_n(y)| \quad (4.5)$$

Интегрируя по частям $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ пять раз и учитывая первое условие теоремы 4.1, получим оценки:

$$|\psi_{in}| \leq \frac{M}{n^5} |\Psi_{in}|, \quad i = 1, 2, \quad (4.6)$$

где

$$\Psi_{in} = \frac{1}{\sqrt{p} \left| \operatorname{cth} \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n} p}{2} \right) \right|} \int_0^p \psi_i^{(5)}(\eta) \left(\frac{\operatorname{sh} \left(\sqrt[4]{\lambda_n} \left(x - \frac{p}{2} \right) \right)}{\operatorname{sh} \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n} p}{2} \right)} - \frac{\cos \left(\sqrt[4]{\lambda_n} \left(x - \frac{p}{2} \right) \right)}{\cos \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n} p}{2} \right)} \right) dx, \quad i = 1, 2; \quad n = 2m-1;$$

$$\Psi_{in} = \frac{1}{\sqrt{p} \left| th \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n p}}{2} \right) \right|} \int_0^p \psi_i^{(5)}(\eta) \left(-\frac{ch \left(\sqrt[4]{\lambda_n} \left(x - \frac{p}{2} \right) \right)}{ch \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n p}}{2} \right)} - \frac{\sin \left(\sqrt[4]{\lambda_n} \left(x - \frac{p}{2} \right) \right)}{\sin \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n p}}{2} \right)} \right) dx, \quad i = 1, 2; \quad n = 2m.$$

Для нахождения решения задачи (4.4) применим функций Грина. С этой целью введем вспомогательную функцию

$$V(y) = Y(y) - \rho(y), \quad (4.7)$$

которая позволяет свести исходные граничные условия задачи (4.4) к однородному виду. При этом выражение $\rho(y)$ задается следующим образом:

$$\rho_n(y) = -\psi_{1n} e^{-y} - \frac{\psi_{1n} + \psi_{2n}}{2} e^{-y^2}. \quad (4.8)$$

Подставляя (4.7), (4.8) в (4.4), приходим к следующей задаче

$$\begin{cases} V''' - (a + \lambda_n) V = \lambda_n f_n(y), \\ V'(0) = V''(0) = \lim_{y \rightarrow +\infty} V''(y) = 0, \end{cases} \quad (4.9)$$

здесь

$$f_n(y) = \left(\frac{a + \lambda_n - 4y^3 + 6y - 1}{\lambda_n} e^{-y} + \frac{(a + \lambda_n)(4y^3 - 6y)}{2\lambda_n} e^{-y^2} \right) \psi_{1n} + \frac{(a + \lambda_n - 1)(4y^3 - 6y)}{\lambda_n} e^{-y^2} \psi_{2n} + \frac{g_n(y)}{\lambda_n}.$$

С учётом (4.5) и (4.6) получаем следующие оценки

$$\begin{aligned} |f_n(y)| &\leq \frac{M}{n^5} \left((e^{-y} + e^{-y^2}) |\Psi_{1n}| + e^{-y^2} |\Psi_{2n}| + |F_n(y)| \right), \\ |f_n(0)| &\leq \frac{M}{n^5} (|\Psi_{1n}| + |\Psi_{2n}| + |F_n(0)|), \\ |f_n'(y)| &\leq \frac{M}{n^5} \left(e^{-y} |\Psi_{1n}| + (|\Psi_{1n}| + |\Psi_{2n}|) e^{-y^2} + F_n'(y) \right), \end{aligned} \quad (4.10)$$

Решение задачи (4.9) имеет следующий вид:

$$V_n(y) = \lambda_n \int_0^{+\infty} G_n(y, \eta) f_n(\eta) d\eta \quad (4.11)$$

где функция $G_n(y, \eta)$ является функцией Грина задачи (4.9) и принадлежит следующему классу $C_b^1[0, +\infty) \cap C_b^3(0, +\infty)$ где $b = \lim_{y \rightarrow +\infty} y$, [23].

Функция Грина задачи (4.9) удовлетворяет следующему уравнению:

$$G_{nyyy}(y, \eta) - (a + \lambda_n) G_n(y, \eta) = 0, \quad (4.12)$$

а также следующим условиям:

$$G_{1ny}(0, \eta) = G_{1nyy}(0, \eta) = \lim_{y \rightarrow +\infty} G_{2nyy}(y, \eta) = 0, \quad (4.13)$$

$$\begin{cases} G_{2n}(\eta, \eta) - G_{1n}(\eta, \eta) = 0, \\ G_{2ny}(\eta, \eta) - G_{1ny}(\eta, \eta) = 0, \\ G_{2nyy}(\eta, \eta) - G_{1nyy}(\eta, \eta) = 1. \end{cases} \quad (4.14)$$

Искомую функцию Грина будем искать в следующем виде

$$G_n^+(y, \eta) = \begin{cases} G_{1n}^+(y, \eta), & 0 \leq y < \eta, \\ G_{2n}^+(y, \eta), & \eta \leq y < \infty. \end{cases} \quad (4.15)$$

здесь $k_n = \sqrt[3]{\lambda_n + a}$,

$$G_n^+(y, \eta) = \begin{cases} -\frac{1}{3k_n^2} \left(e^{k_n(y-\eta)} + 2e^{-k_n(\eta+\frac{y}{2})} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_n y\right) \right), & 0 \leq y < \eta, \\ -\frac{2e^{-k_n(\eta+\frac{y}{2})}}{3k_n^2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_n y\right) - \frac{2e^{\frac{k_n}{2}(\eta-y)}}{3k_n^2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_n(y-\eta) + \frac{\pi}{6}\right), & \eta \leq y < \infty \end{cases}$$

Непосредственная проверка показывает, что заданная соотношением (4.15) функция в полной мере удовлетворяет всем критериям, заложенным в определении функции Грина. Далее перейдём к оценке функции $G_n^+(\xi, y)$,

$$\begin{aligned} |G_{1n}^+(y, \eta)| &\leq \frac{1}{3k_n^2} \left(e^{k_n(y-\eta)} + 2e^{-k_n(\eta+\frac{y}{2})} \right) \leq \frac{M}{k_n^2}, \\ |G_{2n}^+(y, \eta)| &\leq \frac{1}{3k_n^2} \left(2e^{-k_n(\eta+\frac{y}{2})} + 2e^{\frac{k_n}{2}(\eta-y)} \right) \leq \frac{M}{k_n^2}. \end{aligned}$$

Из этого следует следующая оценка,

$$|G_{n\eta}^+(y, \eta)| \leq \frac{M}{k_n}, \quad |G_{n\eta\eta}^+(y, \eta)| \leq M. \quad (4.16)$$

Следовательно, общее решение задачи A_1 имеет следующий вид:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\rho_n(y) + \lambda_n \int_0^{+\infty} G_n(y, \eta) f_n(\eta) d\eta \right) X_n(x). \quad (4.17)$$

С учётом (4.6) оценим (4.8),

$$|\rho_n(y)| \leq \frac{M}{n^5} \left((e^{-y} + e^{-y^2}) |\Psi_{1n}| + e^{-y^2} |\Psi_{2n}| \right). \quad (4.18)$$

Учитывая (4.10), оценим (4.11), для этой цели воспользуемся следующим соотношением

$$\begin{aligned} G_n(y, \eta) &= \frac{1}{a + \lambda_n} G_{nyyy}(y, \eta), \\ V_n(y) &= \lambda_n \int_0^{+\infty} G_n(y, \eta) f_n(\eta) d\eta = \frac{\lambda_n}{a + \lambda_n} \left(\int_0^{\eta-\varepsilon} G_{n\eta\eta\eta}(y, \eta) f_n(\eta) d\eta + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\eta+\varepsilon}^{\nu} G_{n\eta\eta\eta}(y, \eta) f_n(\eta) d\eta + \int_{\nu}^{+\infty} G_{n\eta\eta\eta}(y, \eta) f_n(\eta) d\eta \right). \end{aligned}$$

Для функции Грина $G_n(y, \eta)$ точка $y = \eta$ является точкой разрыва первого рода. В то же время данная функция сохраняет непрерывность в точке $y = \nu$ для любого $\nu \in [0, +\infty)$.

$$\begin{aligned} V_n(y) &= \frac{\lambda_n}{a + \lambda_n} \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (f_n(\eta - \varepsilon) G_{n\eta\eta}(y, \eta - \varepsilon) - f_n(0) G_{n\eta\eta}(y, 0) - \int_0^{\eta-\varepsilon} G_{n\eta\eta}(y, \eta) f_n'(\eta) d\eta) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda_n}{a + \lambda_n} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(f_n(\nu) G_{n\eta\eta}(y, \nu) - f_n(\eta + \varepsilon) G_{n\eta\eta}(y, \eta + \varepsilon) - \int_{\eta+\varepsilon}^{\nu} G_{n\eta\eta}(y, \eta) f_n'(\eta) d\eta \right) \right) + \\ &\quad \left. + \frac{\lambda_n}{a + \lambda_n} \left(\lim_{B \rightarrow +\infty} (f_n(B) G_{n\eta\eta}(y, B) - f_n(\nu) G_{n\eta\eta}(y, \nu) - \int_{\nu}^B G_{n\eta\eta}(y, \eta) f_n'(\eta) d\eta) \right) \right) \end{aligned}$$

Учитывая (4.10) и (4.16), получим оценку для $V_n(y)$,

$$|V_n(y)| \leq \frac{M}{n^5} (|\Psi_{1n}| + |\Psi_{2n}|). \quad (4.19)$$

Принимая во внимание (4.18) и (4.19) оценим (4.17) в виде,

$$|u(x, y)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} (|\rho_n(y)| + |V_n(y)|) |X_n(x)| \leq \frac{M}{n^5} (|\Psi_{1n}| + |\Psi_{2n}|) < \infty.$$

Оценка собственной функции имеет вид: $|X_n(x)| \leq M$, $0 < M = \text{const}$.

$$|X_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{p} \left| \text{cth} \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n p}}{2} \right) \right|} \left(\frac{\left| \text{ch} \frac{\sqrt[4]{\lambda_n p}}{2} \right|}{\left| \text{sh} \frac{\sqrt[4]{\lambda_n p}}{2} \right|} + \frac{1}{\left| \cos \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n p}}{2} \right) \right|} \right) \leq \frac{1}{\sqrt{p}} + \frac{1}{\sqrt{p} \left| \text{cth} \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n p}}{2} \right) \right| \left| \cos \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n p}}{2} \right) \right|},$$

Следовательно, для $n = 2m - 1$ имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \cos \frac{\sqrt[4]{\lambda_n p}}{2} \right| = \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \cos \frac{\pi(4m-3)}{2p} \cdot \frac{p}{2} \right| = \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \cos \left(\pi m - \frac{3\pi}{4} \right) \right| = \left| \cos \frac{3\pi}{4} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Отсюда при $n = 2m$ получаем:

$$|X_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{p} \left| \text{th} \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n p}}{2} \right) \right|} \left(\frac{\left| \text{sh} \frac{\sqrt[4]{\lambda_n p}}{2} \right|}{\left| \text{ch} \frac{\sqrt[4]{\lambda_n p}}{2} \right|} + \frac{1}{\left| \sin \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n p}}{2} \right) \right|} \right) \leq \frac{1}{\sqrt{p}} + \frac{1}{\sqrt{p} \left| \text{th} \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n p}}{2} \right) \right| \left| \sin \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n p}}{2} \right) \right|},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sin \frac{\sqrt[4]{\lambda_n p}}{2} \right| = \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \sin \frac{\pi(4m-1)}{2p} \cdot \frac{p}{2} \right| = \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \sin \left(\pi m - \frac{\pi}{4} \right) \right| = \left| \sin \frac{\pi}{4} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Теперь оценим $u_{yyy}(x, y)$,

$$u_{yyy}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\rho'''_n(y) + \lambda_n \int_0^{+\infty} G_{n\eta\eta\eta}(y, \eta) f_n(\eta) d\eta \right) X_n(x). \quad (4.20)$$

$\rho'''(y)$ имеет следующий вид,

$$\rho'''(y) = \psi_{1n} e^{-y} + 2(\psi_{1n} + \psi_{2n}) (2y^3 - 3y) e^{-y^2}. \quad (4.21)$$

Исходя из (4.6) оценим (4.21),

$$|\rho'''(y)| \leq \frac{M}{n^5} (|\Psi_{1n}| + |\Psi_{2n}|). \quad (4.22)$$

Тогда $V'''(y)$ имеет следующий вид,

$$\begin{aligned} V_n'''(y) &= \lambda_n \int_0^{+\infty} G_{n\eta\eta}(y, \eta) f_n(\eta) d\eta = \lambda_n \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_n(\eta) G_{n\eta\eta}(y, \eta) \Big|_0^{\eta-\varepsilon} - \int_0^{\eta-\varepsilon} G_{n\eta\eta}(y, \eta) f_n'(\eta) d\eta + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\eta+\varepsilon}^{+\infty} G_{n\eta\eta}(y, \eta) f_n'(\eta) d\eta \right) = \lambda_n \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (f_n(\eta - \varepsilon) G_{n\eta\eta}(y, \eta - \varepsilon) - f_n(0) G_{n\eta\eta}(y, 0)) - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{\eta-\varepsilon} G_{n\eta\eta}(y, \eta) f_n'(\eta) d\eta + \int_{\eta+\varepsilon}^{\nu} G_{n\eta\eta}(y, \eta) f_n'(\eta) d\eta + \int_{\nu}^{+\infty} G_{n\eta\eta}(y, \eta) f_n'(\eta) d\eta \right) = \\ &= \lambda_n \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left((f_n(\eta - \varepsilon) G_{n\eta\eta}(y, \eta - \varepsilon) - f_n(0) G_{n\eta\eta}(y, 0)) - \int_0^{\eta-\varepsilon} G_{n\eta\eta}(y, \eta) f_n'(\eta) d\eta \right) + \\ &+ \lambda_n \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left((f_n(\nu) G_{n\eta\eta}(y, \nu) - f_n(\eta + \varepsilon) G_{n\eta\eta}(y, \eta + \varepsilon)) - \int_{\eta+\varepsilon}^{\nu} G_{n\eta\eta}(y, \eta) f_n'(\eta) d\eta \right) \right) + \\ &+ \lambda_n \left(\lim_{B \rightarrow +\infty} (f_n(B) G_{n\eta\eta}(y, B) - f_n(\nu) G_{n\eta\eta}(y, \nu)) - \int_{\nu}^B G_{n\eta\eta}(y, \eta) f_n'(\eta) d\eta \right). \end{aligned}$$

Учитывая (4.10) и (4.16) оценим $V'''(y)$,

$$|V_n'''(y)| \leq \frac{1}{n} (|\Psi_{1n}| + |\Psi_{2n}|). \quad (4.23)$$

На основании (4.22) и (4.23) оценим (4.20) в виде

$$|u_{yyy}(x, y)| \leq M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (|\Psi_{1n}| + |\Psi_{2n}|).$$

Используя неравенство Коши-Буняковского и Бесселя, получим

$$|u_{yyy}(x, y)| \leq M \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} \left(\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\Psi_{1n}|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\Psi_{2n}|^2} \right) \leq M \sqrt{\frac{\pi^2}{6}} \left(\|\psi_1^{(5)}(x)\| + \|\psi_2^{(5)}(x)\| \right) < \infty.$$

так как

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\Psi_{in}|^2 \leq \left\| \psi_i^{(5)}(x) \right\|_{L_2(0 < x < p)}^2, \quad i = 1, 2. \quad (4.24)$$

Следовательно, ряд, соответствующий функции $u_{yyy}(x, y)$, сходится абсолютная и равномерно в области D^+ .

Из уравнения (4.17) найдём $u_{xxxx}(x, y)$ и также покажем его сходимости,

$$\begin{aligned} |u_{xxxx}(x, y)| &\leq \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(|\rho_n(y)| + \int_0^{+\infty} |G_n(y, \eta)| |f_n(\eta)| d\eta)}{\left| \operatorname{cth} \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n p}}{2} \right) \right| \left(\frac{\pi}{2p} (2n-1) \right)^4} \times \\ &\times \left| \frac{\operatorname{ch} \left(\sqrt[4]{\lambda_n} \left(x - \frac{p}{2} \right) \right)}{\operatorname{sh} \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n p}}{2} \right)} + \frac{\sin \left(\sqrt[4]{\lambda_n} \left(x - \frac{p}{2} \right) \right)}{\cos \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n p}}{2} \right)} \right| \leq M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (|\Psi_{1n}| + |\Psi_{2n}|), \quad n = 2m-1, \end{aligned}$$

$$|u_{xxxx}(x, y)| \leq \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(|\rho_n(y)| + \int_0^{+\infty} |G_n(y, \eta)| |f_n(\eta)| d\eta)}{\left| \operatorname{th} \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n p}}{2} \right) \right| \left(\frac{\pi}{2p} (2n-1) \right)^4} \times$$

$$\times \left| -\frac{\operatorname{sh} \left(\sqrt[4]{\lambda_n} \left(x - \frac{p}{2} \right) \right)}{\operatorname{ch} \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n p}}{2} \right)} + \frac{\cos \left(\sqrt[4]{\lambda_n} \left(x - \frac{p}{2} \right) \right)}{\sin \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n p}}{2} \right)} \right| \leq M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (|\Psi_{1n}| + |\Psi_{2n}|), \quad n = 2m.$$

Используя неравенство Коши-Буняковского и Бесселя, получим

$$|u_{xxxx}(x, y)| \leq M \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} \left(\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\Psi_{1n}|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\Psi_{2n}|^2} \right) \leq \sqrt{\frac{\pi^2}{6}} \left(\|\psi_1^{(5)}(x)\| + \|\psi_2^{(5)}(x)\| \right) < \infty.$$

Здесь (4.24).

Следовательно, $u_{xxxx}(x)$ также сходится абсолютно и равномерно в области D^+ .

Теперь учитывая условия (2.4), приходим к следующей задаче по $Y(y)$ для A_2 :

$$\begin{cases} Y''' - (a + \lambda_n) Y = g_n(y) \\ Y''(0) = \psi_{3n}, \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} Y'(y) = \lim_{y \rightarrow -\infty} Y''(y) = 0 \end{cases} \quad (4.25)$$

здесь

$$\psi_{3n} = \int_0^p \psi_3(x) X_n(x) dx,$$

$$g_n(y) = \int_0^p g(x, y) X_n(x) dx$$

Интегрируя по частям $g_n(y)$ и учитывая второе условие теоремы 4.1, имеем:

$$g_n(y) = \frac{1}{\sqrt{p} \left| \operatorname{cth} \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n p}}{2} \right) \right|} \int_0^p g(x, y) \left(\frac{\operatorname{ch} \left(\sqrt[4]{\lambda_n} \left(x - \frac{p}{2} \right) \right)}{\operatorname{sh} \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n p}}{2} \right)} + \frac{\sin \left(\sqrt[4]{\lambda_n} \left(x - \frac{p}{2} \right) \right)}{\cos \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n p}}{2} \right)} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[4]{\lambda_n} \sqrt{p} \left| \operatorname{cth} \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n p}}{2} \right) \right|} g(x, y) \left(\frac{\operatorname{sh} \sqrt[4]{\lambda_n} \left(x - \frac{p}{2} \right)}{\operatorname{sh} \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n p}}{2} \right)} - \frac{\cos \left(\sqrt[4]{\lambda_n} \left(x - \frac{p}{2} \right) \right)}{\cos \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n p}}{2} \right)} \right) \Big|_{x=0}^{x=p} -$$

$$- \frac{1}{\sqrt[4]{\lambda_n} \sqrt{p} \left| \operatorname{cth} \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n p}}{2} \right) \right|} \cdot \int_0^p g_x(x, y) \left(\frac{\operatorname{sh} \sqrt[4]{\lambda_n} \left(x - \frac{p}{2} \right)}{\operatorname{sh} \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n p}}{2} \right)} - \frac{\cos \left(\sqrt[4]{\lambda_n} \left(x - \frac{p}{2} \right) \right)}{\cos \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n p}}{2} \right)} \right) dx = \frac{2\sqrt{p}}{\pi(2n-1)} F_n(y); \quad n = 2m-1,$$

где

$$F_n(y) = - \frac{1}{\left| \operatorname{cth} \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n p}}{2} \right) \right|} \int_0^p g_x(x, y) \left(\frac{\operatorname{sh} \sqrt[4]{\lambda_n} \left(x - \frac{p}{2} \right)}{\operatorname{sh} \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n p}}{2} \right)} - \frac{\cos \left(\sqrt[4]{\lambda_n} \left(x - \frac{p}{2} \right) \right)}{\cos \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n p}}{2} \right)} \right) dx, \quad n = 2m-1.$$

$$\begin{aligned}
g_n(y) &= \frac{1}{\sqrt{p} \left| th \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n p}}{2} \right) \right|} \int_0^p g(x, y) \left(-\frac{sh \left(\sqrt[4]{\lambda_n} \left(x - \frac{p}{2} \right) \right)}{ch \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n p}}{2} \right)} + \frac{\cos \left(\sqrt[4]{\lambda_n} \left(x - \frac{p}{2} \right) \right)}{\sin \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n p}}{2} \right)} \right) dx = \\
&= \frac{1}{\sqrt[4]{\lambda_n} \sqrt{p} \left| th \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n p}}{2} \right) \right|} g(x, y) \left(-\frac{ch \sqrt[4]{\lambda_n} \left(x - \frac{p}{2} \right)}{sh \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n p}}{2} \right)} + \frac{\sin \left(\sqrt[4]{\lambda_n} \left(x - \frac{p}{2} \right) \right)}{\sin \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n p}}{2} \right)} \right) \Big|_{x=0}^{x=p} - \\
&- \frac{1}{\sqrt[4]{\lambda_n} \sqrt{p} \left| th \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n p}}{2} \right) \right|} \cdot \int_0^p g_x(x, y) \left(-\frac{ch \sqrt[4]{\lambda_n} \left(x - \frac{p}{2} \right)}{ch \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n p}}{2} \right)} + \frac{\sin \left(\sqrt[4]{\lambda_n} \left(x - \frac{p}{2} \right) \right)}{\sin \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n p}}{2} \right)} \right) dx = \frac{2\sqrt{p}}{\pi(2n-1)} F_n(y), \quad n = 2m.
\end{aligned}$$

где

$$F_n(y) = -\frac{1}{\left| th \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n p}}{2} \right) \right|} \int_0^p g_x(x, y) \left(-\frac{ch \sqrt[4]{\lambda_n} \left(x - \frac{p}{2} \right)}{ch \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n p}}{2} \right)} + \frac{\sin \left(\sqrt[4]{\lambda_n} \left(x - \frac{p}{2} \right) \right)}{\sin \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n p}}{2} \right)} \right) dx, \quad n = 2m.$$

Из $g_n(y)$ получим оценки

$$|g_n(y)| \leq \frac{M}{n} |F_n(y)| \quad (4.26)$$

Интегрируя по частям $\psi_3(x)$ пять раз и учитывая первое условие теоремы 4.1, получим оценки:

$$|\psi_{3n}| \leq \frac{M}{n^5} |\Psi_{in}|, \quad (4.27)$$

где

$$\Psi_{3n} = \int_0^p \psi_3^{(5)}(x) X_n(x) dx.$$

Для отыскания решения граничной задачи (4.25) воспользуемся методом функции Грина. С целью гомогенизации (приведения к однородному виду) заданных краевых условий введем новую переменную по правилу:

$$V_1(y) = Y(y) - \rho(y), \quad (4.28)$$

где аналитическая структура функции $\rho(y)$ записывается следующим образом:

$$\rho_{1n}(y) = \psi_{3n} e^y \quad (4.29)$$

Подставляя (4.28), (4.29) в (4.25), приходим к следующей задаче

$$\begin{cases} V''' - (a + \lambda_n) V = \lambda_n f_n(y), \\ V''(0) = \lim_{y \rightarrow -\infty} V'(y) = \lim_{y \rightarrow -\infty} V''(y) = 0, \end{cases} \quad (4.30)$$

здесь

$$f_n(y) = \left(\frac{a + \lambda_n - 1}{\lambda_n} \right) e^y \psi_{3n} + \frac{g_n(y)}{\lambda_n}.$$

Принимая во внимание (4.26) и (4.27) получаем следующие оценки

$$\begin{aligned} |f_n(y)| &\leq \frac{M}{n^5} (e^y |\Psi_{3n}| + |F_n(y)|), \\ |f_n(0)| &\leq \frac{M}{n^5} (|\Psi_{3n}| + |F_n(0)|), \\ |f_n'(y)| &\leq \frac{M}{n^5} (e^y |\Psi_{3n}| + |F_n'(y)|). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Решение задачи (4.30) имеет следующий вид:

$$V_{1n}(y) = \lambda_n \int_{-\infty}^0 G_n(y, \eta) f_n(\eta) d\eta \quad (4.32)$$

где функция $G_n(y, \eta)$ является функцией Грина задачи (4.30) и принадлежит следующему классу $C_b^1(-\infty; 0] \cap C_b^3(-\infty; 0)$ где $b = \lim_{y \rightarrow -\infty} y$.

Функция Грина задачи (4.30) удовлетворяет уравнению (4.12), а также следующим условиям

$$G_{1nyy}(0, \eta) = \lim_{y \rightarrow -\infty} G_{2ny}(y, \eta) = \lim_{y \rightarrow -\infty} G_{2nyy}(y, \eta) = 0. \quad (4.33)$$

$$\begin{cases} G_{2n}(\eta, \eta) - G_{1n}(\eta, \eta) = 0, \\ G_{2ny}(\eta, \eta) - G_{1ny}(\eta, \eta) = 0, \\ G_{2nyy}(\eta, \eta) - G_{1nyy}(\eta, \eta) = 1. \end{cases} \quad (4.34)$$

Искомую функцию Грина будем искать в следующем виде

$$G_n^-(y, \eta) = \begin{cases} G_{1n}^-(y, \eta), & -\infty < y \leq \eta, \\ G_{2n}^-(y, \eta), & \eta < y \leq 0. \end{cases} \quad (4.35)$$

$$G_n^-(y, \eta) = \begin{cases} -\frac{1}{3k_n^2} \left(e^{k_n(y-\eta)} + 2e^{-k_n(\eta+\frac{y}{2})} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_n y\right) \right), \\ -\frac{2}{3k_n^2} \left(e^{-k_n(\eta+\frac{y}{2})} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_n y\right) + e^{\frac{k_n}{2}(\eta-y)} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_n(y-\eta) + \frac{\pi}{6}\right) \right). \end{cases}$$

Можно проверить, что функция, определенная формулой (4.35), обладает всеми свойствами, указанными в определении функции Грина. Теперь оценим $G_n^-(y, \eta)$,

$$\begin{aligned} |G_{1n}^-(y, \eta)| &\leq \frac{1}{3k_n^2} \left(e^{k_n(y-\eta)} + 2e^{-k_n(\eta+\frac{y}{2})} \right) \leq \frac{M}{k_n^2} \\ |G_{2n}^-(y, \eta)| &\leq \frac{1}{3k_n^2} \left(2e^{-k_n(\eta+\frac{y}{2})} + 2e^{\frac{k_n}{2}(\eta-y)} \right) \leq \frac{M}{k_n^2} \end{aligned}$$

Из этого следует следующая оценка,

$$|G_n^-(y, \eta)| \leq \frac{M}{k_n^2},$$

также

$$|G_{n\eta}^-(y, \eta)| \leq \frac{M}{k_n}, \quad |G_{n\eta\eta}^-(y, \eta)| \leq M, \quad (4.36)$$

Следовательно, общее решение задачи A_2 имеет следующий вид:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\rho_{1n}(y) + \lambda_n \int_{-\infty}^0 G_n(y, \eta) f_n(\eta) d\eta \right) X_n(x). \quad (4.37)$$

С учётом (4.27) оценим (4.29),

$$|\rho_{1n}(y)| \leq \frac{M}{n^5} |\Psi_{3n}|. \quad (4.38)$$

Учитывая (4.31), оценим (4.32), для этой цели воспользуемся следующим соотношением

$$\begin{aligned} V_{1n}(y) &= \lambda_n \int_{-\infty}^0 G_n(y, \eta) f_n(\eta) d\eta = \frac{\lambda_n}{a + \lambda_n} \int_{-\infty}^0 G_{n\eta\eta\eta}(y, \eta) f_n(\eta) d\eta = \\ &= \frac{\lambda_n}{a + \lambda_n} \left(\int_{-\infty}^{\nu} G_{n\eta\eta\eta}(y, \eta) f_n(\eta) d\eta + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\nu}^{\eta-\varepsilon} G_{n\eta\eta\eta}(y, \eta) f_n(\eta) d\eta + \int_{\eta+\varepsilon}^0 G_{n\eta\eta\eta}(y, \eta) f_n(\eta) d\eta \right) \right) \\ &= \frac{\lambda_n}{a + \lambda_n} \lim_{B \rightarrow -\infty} \left(f_n(\nu) G_{n\eta\eta}(y, \nu) - f_n(B) G_{n\eta\eta}(y, B) - \int_B^{\nu} G_{n\eta\eta}(y, \eta) f_n'(\eta) d\eta \right) + \\ &+ \frac{\lambda_n}{a + \lambda_n} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(f_n(\eta - \varepsilon) G_{n\eta\eta}(y, \eta - \varepsilon) - f_n(\nu) G_{n\eta\eta}(y, \nu) - \int_{\nu}^{\eta-\varepsilon} G_{n\eta\eta}(y, \eta) f_n'(\eta) d\eta \right) + \\ &+ \frac{\lambda_n}{a + \lambda_n} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(f_n(0) G_{n\eta\eta}(y, 0) - f_n(\eta + \varepsilon) G_{n\eta\eta}(y, \eta + \varepsilon) - \int_{\eta+\varepsilon}^0 G_{n\eta\eta}(y, \eta) f_n'(\eta) d\eta \right). \end{aligned}$$

Для функции Грина $G_n(y, \eta)$ точка $y = \eta$ является точкой разрыва первого рода. В то же время данная функция сохраняет непрерывность в точке $y = \nu$ для любого $\nu \in (-\infty, 0]$

Следовательно

$$|V_{1n}(y)| \leq \frac{M}{n^5} (|\Psi_{3n}|) \quad (4.39)$$

Принимая во внимание (4.38) и (4.39) оценим (4.37) в виде,

$$|u(x, y)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} (|\rho_{1n}(y)| + |V_{1n}(y)|) |X_n(x)| \leq \frac{M}{n^5} (|\Psi_{3n}|) < \infty$$

Теперь оценим $u_{yyy}(x, y)$,

$$u_{yyy}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\rho_{1n}'''(y) + \lambda_n \int_{-\infty}^0 G_{nyyy}(y, \eta) f_n(\eta) d\eta \right) X_n(x). \quad (4.40)$$

Оценим $\rho'''(y)$ с учетом соотношения (4.27),

$$|\rho_{1n}'''(y)| \leq \frac{M}{n^5} (|\Psi_{3n}|). \quad (4.41)$$

Тогда $V_{1n}'''(y)$ имеет следующий вид,

$$\begin{aligned} V_{1n}'''(y) &= \lambda_n \int_{-\infty}^0 G_{n\eta\eta\eta\eta}(y, \eta) f_n(\eta) d\eta = \\ &= \lambda_n \left(\lim_{B \rightarrow -\infty} \left(f_n(\nu) G_{n\eta\eta}(y, \nu) - f_n(B) G_{n\eta\eta}(y, B) - \int_B^{\nu} G_{n\eta\eta}(y, \eta) f_n'(\eta) d\eta \right) \right) + \\ &+ \lambda_n \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(f_n(\eta - \varepsilon) G_{n\eta\eta}(y, \eta - \varepsilon) - f_n(\nu) G_{n\eta\eta}(y, \nu) - \int_{\nu}^{\eta-\varepsilon} G_{n\eta\eta}(y, \eta) f_n'(\eta) d\eta \right) \right) + \\ &+ \lambda_n \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(f_n(0) G_{n\eta\eta}(y, 0) - f_n(\eta + \varepsilon) G_{n\eta\eta}(y, \eta + \varepsilon) - \int_{\eta+\varepsilon}^0 G_{n\eta\eta}(y, \eta) f_n'(\eta) d\eta \right) \right); \end{aligned}$$

На основании (4.31) и (4.36) оценка $V_{1n}'''(y)$, имеет вид

$$|V_{1n}'''(y)| \leq \frac{1}{n} (|\Psi_{3n}|). \quad (4.42)$$

С учётом оценок (4.41) и (4.42) оценим (4.40),

$$|u_{yyy}(x, y)| \leq M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (|\Psi_{3n}|)$$

Используя неравенство Коши-Буняковского и Бесселя, получим

$$|u_{yyy}(x, y)| \leq M \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} \left(\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\Psi_{3n}|^2} \right) \leq M \sqrt{\frac{\pi^2}{6}} \left(\|\psi_3^{(5)}(x)\| \right) < \infty,$$

здесь

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\Psi_{3n}|^2 \leq \|\psi_{3n}^{(5)}(x)\|_{L_2(0 < x < p)}^2. \quad (4.43)$$

Следовательно, ряд, соответствующий функции $u_{yyy}(x, y)$, сходится абсолютно и равномерно в области D^- .

Вычислив частную производную четвертого порядка по x от уравнения (4.37), докажем её сходимост,ь,

$$\begin{aligned} |u_{xxxx}(x, y)| &\leq \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(|\rho_{1n}(y)| + \int_{-\infty}^0 |G_n(y, \eta)| |f_n(\eta)| d\eta)}{\left| \operatorname{cth} \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n} p}{2} \right) \right| \left(\frac{\pi}{2p} (2n-1) \right)^4} \times \\ &\times \left| \frac{\operatorname{ch} \left(\sqrt[4]{\lambda_n} \left(x - \frac{p}{2} \right) \right)}{\operatorname{sh} \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n} p}{2} \right)} + \frac{\sin \left(\sqrt[4]{\lambda_n} \left(x - \frac{p}{2} \right) \right)}{\cos \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n} p}{2} \right)} \right| \leq M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |\Psi_{3n}|, \quad n = 2m-1; \\ |u_{xxxx}(x, y)| &\leq \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(|\rho_{1n}(y)| + \int_{-\infty}^0 |G_n(y, \eta)| |f_n(\eta)| d\eta)}{\left| \operatorname{th} \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n} p}{2} \right) \right| \left(\frac{\pi}{2p} (2n-1) \right)^4} \times \\ &\times \left| -\frac{\operatorname{sh} \left(\sqrt[4]{\lambda_n} \left(x - \frac{p}{2} \right) \right)}{\operatorname{ch} \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n} p}{2} \right)} + \frac{\cos \left(\sqrt[4]{\lambda_n} \left(x - \frac{p}{2} \right) \right)}{\sin \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda_n} p}{2} \right)} \right| \leq M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |\Psi_{3n}|, \quad n = 2m. \end{aligned}$$

Используя неравенство Коши-Буняковского и Бесселя, получим

$$|u_{xxxx}(x, y)| \leq M \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} \left(\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\Psi_{3n}|^2} \right) \leq M \sqrt{\frac{\pi^2}{6}} \left(\|\psi_3^{(5)}(x)\| \right) < \infty.$$

Следовательно, $u_{xxxx}(x, y)$ также сходится абсолютно и равномерно в области D^- .

Здесь (4.43).

Теорема 4.1 доказана.

5. Заключение

В рамках данного исследования проведен всесторонний и детальный анализ краевых задач, поставленных в полуграниченной области для неоднородного дифференциального уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками, содержащего третью частную производную по времени. В ходе изысканий были достигнуты следующие фундаментальные научные и практические результаты:

1. В результате специальной адаптации метода энергетических интегралов (функционалов) получены априорные оценки, гарантирующие единственность решения в полубесконечной области, и строго доказана соответствующая теорема.
2. Успешно сконструирована специализированная функция Грина для данной задачи. С помощью построенной функции искомое решение выражено в явном аналитическом виде через интегральные операторы и бесконечные функциональные ряды.
3. Полностью обосновано существование задачи в классе регулярных решений. При этом строго показана абсолютная и равномерная сходимость рядов решений, а также рядов, состоящих из входящих в уравнение высших частных производных в рассматриваемой полуограниченной геометрической области.

6. Благодарность

Авторы выражают искреннюю и глубокую признательность редактору журнала и анонимным рецензентам за детальное рассмотрение рукописи. Их ценные научные замечания, конструктивные комментарии и рекомендации способствовали существенному повышению качества изложения и академического уровня представленной работы.

7. Финансирование

Данное научное исследование выполнено исключительно в рамках личной творческой инициативы авторов. Работа не получала финансовой поддержки со стороны каких-либо внешних фондов, государственных грантов или сторонних коммерческих организаций.

Список литературы

- [1] Турбин, М.В.: *Исследование начально краевой задачи для модели движения жидкости Герше - Балки*. Вест. Воронеж. Гос. Ун-та. Сер.Физ. Мат. № 2. - С. 246-257.(2013).
- [2] Уизем, Дж.: *Линейные и нелинейные волны*. -М.: Мир.-622 с.(1977).
- [3] Шабров, С.А.: *Об оценках функций влияния одной математической модели четвёртого порядка*. Вест. Воронеж. Гос. Ун-та. Сер. Физ. Мат. **20**(2), - С. 168-179. (2015)
- [4] Benney, D.J., Luke, J.C.: *Interactions of permanent waves of finite amplitude*. J. Math. Phys. **43**, 309-313. doi.org/10.1002/sapm1964431309 (1964).
- [5] Tursunov, D.A., Erkaboyev, U.Z.: *Asymptotic expansions of solutions to Dirichlet problem for elliptic equation with singularities*. Ufa Mathematical Journal. **8** (1), pp. 97 - 107. DOI: 10.13108/2016-8-1-97
- [6] Джураев, Т.Д., Сопуев, А.: *К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвёртого порядка*. Ташкент. «Фан». -144 с (2000).
- [7] Аманов, Д, Мурзамбетова, М.Б.: *Краевая задача для уравнения четвёртого порядка с младшим членом*. Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. Выпуск **1** -С. 3–10. DOI: 10.20537/vm130101 (2013).
- [8] Аманов, Д., Бекиев, А.Б., Отарова, Ж.А.: *Краевая задача для уравнения четвёртого порядка*. Узб.мат.журнал. -№4. -С.11-18 (2015).
- [9] Сабитов, К. Б.: *Колебания балки с заделанными концами*. Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ. мат. Науки. **19**(2). -С.311–324 <https://doi.org/10.14498/vsgtu1406> (2015).
- [10] Сабитов, К. Б.: *К теории начально-граничных задач для уравнения стержней и балок*. Диффер. уравн. **53**(1). -С.89–100 (2017).
- [11] Сабитов, К. Б., Фадеева, О. В.: *Начально-граничная задача для уравнения вынужденных колебаний консольной балки*. Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. **25**(1). -С. 51–66. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1845> (2021).
- [12] Dzhuraev, T.D., Apakov, Yu.P.: *On the theory of the third- order equation with multiple characteristics containing the second time derivative*. Ukrainian Mathematical Journal. **62**, -pp.43–55. <https://doi.org/10.1007/s11253-010-0332-8> (2010).
- [13] Apakov, Yu.P., Rutkauskas, S.: *On a boundary problem to third order PDE with multiple characteristics*. Nonlinear Analysis: Modeling and Control. Vilnius. **16**(3). -pp.255–269. DOI:10.15388/NA.16.3.14092 (2011).
- [14] Apakov, Yu. P.: *On the solution of a boundary-value problem for a third-order equation with multiple characteristics*. Ukrainian Mathematical Journal. **64**(1). -pp.1–11. <https://doi.org/10.1007/s11253-012-0625-1> (2012).

- [15] Apakov, Yu. P.: *On unique solvability of boundary-value problem for a viscous transonic equation*. Lobachevskii Journal of Mathematics. **41**. -pp.1754–1761. <https://doi.org/10.1134/S1995080220090036> (2020).
- [16] Apakov, Yu.P. , Umarov, R.A.: *Solution of the Boundary Value Problem for a Third Order Equation with Little Terms Construction of the Green's Function*. Lobachevskii Journal of Mathematics. **43**. -pp.738–748. DOI:10.1134/S199508022206004X (2022).
- [17] Апаков, Ю.П.: *К решению краевых задач для уравнения в неограниченных областях*. Доклады Академии Наук Республики Узбекистан. Ташкент. –№3. С. 17-20 (2006).
- [18] Apakov, Yu.P., Hamitov, A.A.: *On solution of the boundary value problems posed for an equation with the third-order multiple characteristics in semi-bounded domains in three dimensional space*. Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana. **29**(58). pp.2-14. <https://doi.org/10.1007/s40590-023-00523-1> (2023).
- [19] Аманов, Д., Скоробогатова, Э.Р.: *Краевые задачи для уравнения четвёртого порядка*. Вестник КазНУ сер.мат.,мех., инф. **4**(63).-С.16-20 (2009).
- [20] Apakov, Yu.P., Melikuzieva, D.M.: *On a problem for a fourth-order with multiple characteristics containing the third time derivate*. Lobachevskii Journal of Mathematics. **44**(8). pp.3218-3224. DOI:10.1134/S1995080223080061(2023).
- [21] Apakov, Yu.P., Melikuzieva, D.M.: *On a boundary problem for the fourth order equation with the third derivative with respect to time*. Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. **4**(112).pp.30-40. DOI:10.31489/2023M4/30-40 (2023).
- [22] Apakov, Yu.P., Melikuzieva, D.M.: *On the solution of a boundary problem for a fourth order equation containing a third time derivative in semi-bounded domains*. Uzbek Mathematical Journal. **68**(3). pp 5-11. DOI: 10.29229 / uzmj. 2024-3-1 (2024)
- [23] Kong, S., Zhou, S., Nie, Z., Wang, K.: *Static and dynamic analysis of micro beams based on strain gradient elasticity theory*. International Journal of Engineering Science, **46**(3), 487-498, DOI: 10.1016/j.ijengsci.2007.10.004 (2008).
- [24] Краснов, М.М., Киселев, А.М., Макаренко, Г.И.: *Интегральное уравнения: задача и примеры с подробным решениями, в сб.* Едиториал УРСС, М., 2003.

Solution of boundary value problems for a fourth-order equation with multiple characteristics in a semi-bounded domain by constructing the Green's function

Jamalov B.I., Melikuzieva D.M.

Abstract

The subject of this study is boundary value problems in a semi-bounded domain for a fourth-order inhomogeneous differential equation with multiple characteristics. The uniqueness of regular solutions for the formulated problems is established using the energy integral method, while the existence theorems are justified by applying the classical method of separation of variables. The desired solutions are analytically expressed in the form of infinite functional series using the constructed Green's function. Furthermore, the absolute and uniform convergence of both the solution series themselves and the series composed of the corresponding partial derivatives is rigorously proved within the considered geometric domains.

Keywords

Fourth-order differential equations, multiple characteristics, semi-infinite domain, energy integral, Green's function, functional series, uniform convergence, partial derivatives.

Affiliations

Jamalov B.I.

Address: Namangan State Technical University, Dept. of Higher Mathematics, 160103, Namangan, Uzbekistan.

e-mail: b-i-jamalov@mail.ru

ORCID ID: <https://orcid.org/0009-0009-0718-2496>

Melikuzieva D.M.

Address: Namangan State Technical University, Dept. of Higher Mathematics, 160103, Namangan, Uzbekistan.

e-mail: meliquziyevadilshoda@gmail.com

ORCID ID: <https://orcid.org/0009-0004-8759-7571>