

Решение граничной задачи с несимметричными временными условиями для неоднородного уравнения четвертого порядка с постоянными коэффициентами методом функции Грина

Ю.П. Апаков * З.Н. Нуритдинова

Аннотация

В представленной статье исследуется корректность постановки краевой задачи в прямоугольной области для неоднородного уравнения четвертого порядка, содержащего младшие члены с постоянными коэффициентами. На основе метода энергетических неравенств (интегралов энергии) строго обоснована единственность решения рассматриваемой задачи. С использованием сконструированной функции Грина получено явное представление искомого решения. При исследовании вопросов равномерной сходимости рядов доказано, что возникающий в знаменателе «малый определитель» строго отличен от нуля, что гарантирует существование регулярного решения.

Ключевые слова: Дифференциальное уравнение четвертого порядка; Функций Грина; Младших членов; Кратные характеристики; Единственность и существование решения; Постановка граничной задачи.

Предметная классификация AMS (2020): Основная: 35C10; Дополнительная: 35J15.

1. Введение

Значительная часть задач газовой динамики, теории упругости, а также механики пластин и оболочек ассоциируется с исследованием дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка. С позиции прикладного моделирования физических систем дифференциальные уравнения четвертого порядка также представляют серьезный научный интерес (см. [1-5]).

Классификации подобных уравнений и разработке методов решения некоторых краевых задач посвящена известная монография Т.Д. Джураева и А. Сопуева [6]. Данные исследования заложили основу для дальнейшего развития общей теории дифференциальных уравнений четвертого порядка.

В контексте этих изысканий, авторами Д. Амановым и М.Б. Мурзамбетовой в [7] было получено решение краевой задачи для неоднородного уравнения, содержащего один младший член. Вопросам начально-краевых задач, описывающих вынужденные колебания консольной балки, посвящена работа К.Б. Сабитова и О.В. Фадеевой [8]. В статье Б.Ю. Иргашева [9] с помощью построения функции Грина детально исследована краевая задача для уравнения высокого порядка с кратными характеристиками. Кроме того, задача для уравнения четвертого порядка с априори неизвестной правой частью успешно изучена в работе А.К. Уринова и М.С. Азизова [10].

2. Постановка задач

В области $D = \{(x, y) : 0 < x < p, 0 < y < q\}$ рассмотрим уравнение четвертого порядка вида

$$U_{xxxx} - U_{yy} + A_1 U_{xx} + A_3 U_y + A_2 U = F(x, y),$$

где $p, q, A_i \in R, i = \overline{1, 3}$ и $F(x, y)$ -заданная достаточно гладкая функция. Заменой

$$U(x, y) = u(x, y) e^{\left(\frac{A_3}{2} y\right)}$$

это уравнение можно привести к уравнению

$$L[u] = u_{xxxx} - u_{yy} + a_1 u_{xx} + a_2 u = f(x, y), \quad (2.1)$$

где

$$a_1 = A_1, \quad a_2 = A_2 + \frac{A_3^2}{4}, \quad f(x, y) = F(x, y) e^{\left(-\frac{A_3}{2} y\right)}, \quad f_{xyy}(x, y) \in C(\bar{D}).$$

Для уравнения (2.1) в области D изучим следующую задачу.

Задача A_1 . Найти функцию $u(x, y)$ из класса $C_{x,y}^{4,2}(D) \cap C_{x,y}^{3,1}(\bar{D})$, удовлетворяющую уравнению (2.1) в области D и следующим краевым условиям:

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} u|_{y=q} = 0, \quad 0 \leq x \leq p, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m} u \Big|_{x=0} = \psi_m(y), \quad \frac{\partial^m}{\partial x^m} u \Big|_{x=p} = \psi_{m+1}(y), \quad m = 1, 3, \quad 0 \leq y \leq q, \quad (2.3)$$

здесь $\psi_i(y), i = \overline{1, 4}$ - заданные достаточно гладкие функции.

Следует указать, что в публикациях [11-12] спектральный подход был применен к изучению краевых задач для модельных уравнений четвертого порядка с кратными характеристиками. В свою очередь, в изысканиях [13-15] предмет исследования составили граничные задачи для уравнений четвертого порядка с постоянными коэффициентами при наличии симметричных условий относительно переменной y .

В статье [16] рассмотрена смешанная краевая задача для однородного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, в то время как в работе [17] исследована краевая задача для неоднородного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в трехмерном пространстве. В статье [18] изучена краевая задача в прямоугольной области для неоднородного уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками, содержащего производную третьего порядка по времени.

3. Единственность решения

Теорема 3.1. Если задача A_1 имеет решение, то при выполнении условий $a_1 \leq 0$ и $a_2 \geq 0$, оно единственно.

Доказательство. Теорему докажем методом интегралов энергии. Предположим обратное. Пусть задача A_1 имеет два решения $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$. Тогда функция $u(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$ удовлетворяет однородному уравнению (2.1) и однородным краевым условиям. Докажем, что $u(x, y) = 0$ в $\bar{D}$.

В области D справедливо тождество

$$uL[u] \equiv \frac{\partial}{\partial x} (uu_{xxx} - u_x u_{xx} + a_1 uu_x) - \frac{\partial}{\partial y} (uu_y) + u_{xx}^2 + u_y^2 - a_1 u_x^2 + a_2 u^2 = 0. \quad (3.1)$$

$$\iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} (uu_{xxx} - u_x u_{xx} + a_1 uu_x) - \frac{\partial}{\partial y} (uu_y) \right] dx dy + \iint_D (u_{xx}^2 + u_y^2 - a_1 u_x^2 + a_2 u^2) dx dy = 0,$$

$$\begin{aligned} & \int_0^q [u(p, y)u_{xxx}(p, y) - u(0, y)u_{xxx}(0, y)]dy - \int_0^q [u_x(p, y)u_{xx}(p, y) - u_x(0, y)u_{xx}(0, y)]dy \\ & + a_1 \int_0^q [u(p, y)u_x(p, y) - u(0, y)u_x(0, y)] - \int_0^p [u(x, q)u_y(x, q) - u(x, 0)u_y(x, 0)]dx \\ & + \iint_D [u_{xx}^2 + u_y^2 - a_1 u_x^2 + a_2 u^2]dxdy = 0. \end{aligned}$$

Учитывая однородные краевые условия, получим

$$\int_0^p \int_0^q u_{xx}^2 dxdy + \int_0^p \int_0^q u_y^2 dxdy - a_1 \int_0^p \int_0^q u_x^2 dxdy + a_2 \int_0^p \int_0^q u^2 dxdy = 0. \quad (3.2)$$

В (3.2) если $a_1 < 0$, $a_2 > 0$, то из четвёртого слагаемого получим $u(x, y) \equiv 0$, $(x, y) \in \bar{D}$, а если $a_1 = a_2 = 0$, то из второго слагаемого имеем $u(x, y) = h(x)$. Здесь $h(x)$ является произвольной функцией, удовлетворяющей условиям задачи. Из условия $u(x, 0) = 0$, получим $h(x) = 0$, тогда $u(x, y) \equiv 0$, $(x, y) \in \bar{D}$. В силу последнего получим $u_1(x, y) = u_2(x, y)$.

Теорема 3.1 доказана.

Замечание 3.1. Отметим, что при нарушении условий теоремы 3.1 однородная задача A_1 для однородного уравнения (2.1) может иметь нетривиальные решения. Например, когда $a_1 = \left(\frac{\pi k}{p}\right)^2$, $a_2 = -\left(\frac{\pi(2n-1)}{2q}\right)^2$ задача

$$\begin{cases} u_{xxxx}(x, y) + \left(\frac{\pi k}{p}\right)^2 u_{xx}(x, y) - \left(\frac{\pi(2n-1)}{2q}\right)^2 u(x, y) - u_{yy} = 0, \\ u(x, 0) = u_y(x, q) = 0, \\ u_x(0, y) = u_x(p, y) = u_{xxx}(0, y) = u_{xxx}(p, y) = 0, \end{cases}$$

имеет нетривиальные решения вида

$$u_{k,n} = \left(C_1 + C_2 \cos\left(\frac{\pi k}{p}x\right)\right) \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2q}y\right), \quad k, n \in N, C_1, C_2 \in R.$$

4. Существование решения

Теорема 4.1. Если выполняются следующие условия:

- 1) $E < \frac{\mu_1^3(1-e^{-2\mu_1 p})^2}{p(1+2\mu_1^2)}$;
- 2) $\psi_i^{(j)}(0) = \psi_i^{(j)}(q) = 0, \psi_i(y) \in C^3[0, q], i = \overline{1, 4}, j = 0, 2$;
- 3) $f(x, 0) = f(x, q) = 0, 0 \leq x \leq p$, то решение задачи A_1 существует.

Здесь,

$$E = \max\{|a_i|, i = 1, 2\}, \mu_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2q}}.$$

Доказательство. Решение задачи A_1 ищем в виде :

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \cdot Y_n(y). \quad (4.1)$$

Формально считая, что (4.1) удовлетворяет уравнению (2.1), и подставляя (4.1) в (2.1), учитывая условия (2.2), для $Y_n(y)$ приходим следующей задаче:

$$\begin{cases} Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, \\ Y(0) = Y'(q) = 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

Нетривиальное решение задачи (4.1) существует только при

$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2q}\right)^2$, $n = 1, 2, 3, \dots$ и называются собственными значениями задачи (4.2), а соответствующие им собственные функции имеют вид:

$$Y_n(y) = \sqrt{\frac{2}{q}} \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2q}y\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.3)$$

Отметим, что система собственных функций (4.3) задачи (4.2) является полной и ортонормированной в пространстве $L_2(0, q)$ [16]. Учитывая граничные условия (2.3), получим задачу для $X_n(x)$:

$$\begin{cases} X_n^{(4)}(x) + a_1 X_n''(x) + a_2 X_n(x) + \lambda_n X_n(x) = f_n(x), \\ X_n'(0) = \psi_{1n}, \quad X_n'(p) = \psi_{2n}, \quad X_n'''(0) = \psi_{3n}, \quad X_n'''(p) = \psi_{4n}, \end{cases} \quad (4.4)$$

где

$$\psi_{in} = \int_0^q \psi_{in}(\eta) Y_n(\eta) d\eta, \quad i = \overline{1, 4}, \quad f_n(x) = \int_0^q f(x, \eta) Y_n(\eta) d\eta, \quad n \in N.$$

Решаем задачу (4.4) с помощью функции Грина. Для этого введем функцию

$$V_n(x) = X_n(x) - \rho_n(x) \quad (4.5)$$

здесь

$$\rho_n(x) = \frac{2px - x^2}{2p} \psi_{1n} + \frac{x^2}{2p} \psi_{2n} + \frac{4px^3 - x^4 - 4p^2 x^2}{24p} \psi_{3n} + \frac{x^4 - 2p^2 x^2}{24p} \psi_{4n}.$$

Подставляем (4.5) в (4.4), получим задачу

$$\begin{cases} V_n^{(4)}(x) + \lambda_n V_n(x) = g_n(x) - a_1 V_n''(x) - a_2 V_n(x), \\ V_n'(0) = V_n'(p) = V_n'''(0) = V_n'''(p) = 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

Решение задачи (4.6) будем искать в следующем виде:

$$V(x) = \int_0^p G_n(x, \xi) (g_n(\xi) - a_1 V_n''(\xi) - a_2 V_n(\xi)) d\xi \quad (4.7)$$

где

$$g_n(x) = f_n(x) + \frac{\psi_{3n} - \psi_{4n}}{p} - a_1 \left(\frac{\psi_{2n} - \psi_{1n}}{p} + \frac{6px - 3x^2 - 2p^2}{6p} \psi_{3n} + \frac{3x^2 - p^2}{6p} \psi_{4n} \right) - (a_2 + \lambda_n) \left(\frac{2px - x^2}{2p} \psi_{1n} + \frac{x^2}{2p} \psi_{2n} + \frac{4px^3 - x^4 - 4p^2 x^2}{24p} \psi_{3n} + \frac{x^4 - 2p^2 x^2}{24p} \psi_{4n} \right).$$

$G_n(x, \xi)$ функция Грина задачи

$$\begin{cases} V_n^{(4)} + \lambda_n V_n(x) = 0, \\ V_n'(0) = V_n'(p) = V_n'''(0) = V_n'''(p) = 0, \end{cases} \quad (4.8)$$

которая имеет вид [19],

$$G_n(x, \xi) = \begin{cases} G_n^1(x, \xi), & 0 \leq x < \xi \leq p, \\ G_n^2(x, \xi), & 0 \leq \xi < x \leq p, \end{cases}$$

и обладают следующими свойствами:

1. В каждой из интервалов $0 \leq x \leq \xi$ и $\xi \leq x \leq p$ функция $G_n(x, \xi)$ рассматриваемая как функция от переменной x , является решением уравнения

$$G_{nxxxx}(x, \xi) + \lambda_n G_n(x, \xi) = 0.$$

2. Функция $G_n(x, \xi)$, удовлетворяет краевые условия

$$G_{nx}^1(0, \xi) = G_{nxxx}^1(0, \xi) = G_{nx}^2(p, \xi) = G_{nxxx}^2(p, \xi) = 0.$$

3. В $0 \leq x \leq p$ функции $G_n(x, \xi)$, $G_{nx}(x, \xi)$, $G_{nxx}(x, \xi)$ непрерывные, т.е.

$$G_n^2(\xi, \xi) - G_n^1(\xi, \xi) = G_{nx}^2(\xi, \xi) - G_{nx}^1(\xi, \xi) = G_{nxx}^2(\xi, \xi) - G_{nxx}^1(\xi, \xi) = 0.$$

4. При $x = \xi$, функция $G_{nxxx}(x, \xi)$ имеет разрыв первого рода, т.е.

$$G_{nxxx}^2(\xi, \xi) - G_{nxxx}^1(\xi, \xi) = 1.$$

Здесь

$$\begin{aligned} G_n^1(x, \xi) &= \frac{1}{2\mu_n^3 \Delta} \{ [\cos(\mu_n p) \operatorname{sh}(\mu_n p) (\sin(\mu_n(\xi - p)) \operatorname{sh}(\mu_n(\xi - p)) - \\ &\quad - \cos(\mu_n(\xi - p)) \operatorname{ch}(\mu_n(\xi - p))) - \\ &\quad - \sin(\mu_n p) \operatorname{ch}(\mu_n p) (\sin(\mu_n(\xi - p)) \operatorname{sh}(\mu_n(\xi - p)) + \\ &\quad + \cos(\mu_n(\xi - p)) \operatorname{ch}(\mu_n(\xi - p)))] \cos(\mu_n x) \operatorname{ch}(\mu_n x) + \\ &\quad + [\sin(\mu_n p) \operatorname{ch}(\mu_n p) (\sin(\mu_n(\xi - p)) \operatorname{sh}(\mu_n(\xi - p)) - \\ &\quad - \cos(\mu_n(\xi - p)) \operatorname{ch}(\mu_n(\xi - p))) + \\ &\quad + \cos(\mu_n p) \operatorname{sh}(\mu_n p) (\sin(\mu_n(\xi - p)) \operatorname{sh}(\mu_n(\xi - p)) + \\ &\quad + \cos(\mu_n(\xi - p)) \operatorname{ch}(\mu_n(\xi - p)))] \sin(\mu_n x) \operatorname{sh}(\mu_n x) \}, \\ G_n^2(x, \xi) &= \frac{1}{2\mu_n^3 \Delta} \{ [\cos(\mu_n p) \operatorname{sh}(\mu_n p) (\sin(\mu_n \xi) \operatorname{sh}(\mu_n \xi) - \\ &\quad - \cos(\mu_n \xi) \operatorname{ch}(\mu_n \xi)) - \sin(\mu_n p) \operatorname{ch}(\mu_n p) (\sin(\mu_n \xi) \operatorname{sh}(\mu_n \xi) + \\ &\quad + (\cos(\mu_n \xi) \operatorname{ch}(\mu_n \xi))) \cos(\mu_n(x - p)) \operatorname{ch}(\mu_n(x - p)) + \\ &\quad + [\sin(\mu_n p) \operatorname{ch}(\mu_n p) (\sin(\mu_n \xi) \operatorname{sh}(\mu_n \xi) - \\ &\quad - \cos(\mu_n \xi) \operatorname{ch}(\mu_n \xi)) + \cos(\mu_n p) \operatorname{sh}(\mu_n p) (\sin(\mu_n \xi) \operatorname{sh}(\mu_n \xi) + \\ &\quad + \cos(\mu_n \xi) \operatorname{ch}(\mu_n \xi))] \sin(\mu_n(x - p)) \operatorname{sh}(\mu_n(x - p)) \}, \\ \Delta &= -e^{2\mu_n p} \bar{\Delta}, \bar{\Delta} = \frac{1 + e^{-4\mu_n p}}{2} - \cos(2\mu_n p) e^{-2\mu_n p}, \mu_n = \sqrt{\frac{\pi n}{2q}}. \end{aligned}$$

Для функция Грина имеет место следующие оценки:

$$|G_n(x, \xi)| \leq \frac{1}{\mu_n^3 (1 - e^{-2\mu_n p})^{-2}} \begin{cases} e^{-\mu_n(2p-x-\xi)}, & x, \xi \in (0, p), \\ e^{-2\mu_n p}, & x = \xi = 0, \\ 1, & x = \xi = p. \end{cases}$$

Лемма 4.1. Основной определитель $\bar{\Delta}$ не равен нулю.

Доказательство. Предположим, что $\bar{\Delta} = 0$, тогда получим

$$2 \cos(2\mu_n p) = e^{2\mu_n p} + e^{-2\mu_n p}.$$

С другой стороны, система неравенств

$$\begin{cases} e^{2\mu_n p} + e^{-2\mu_n p} > 2, \\ 2 \cos(2\mu_n p) \leq 2, \end{cases}$$

не имеет решения, отсюда $\bar{\Delta} > 0$.

Чтобы оценить $\bar{\Delta}$ снизу будем считать, что $\cos(2\mu_n p) = 1$ тогда имеем,

$$\bar{\Delta} \geq \frac{1}{2}(1 - e^{-2\mu_n p})^2.$$

Правая часть этого неравенства при натуральных значениях n возрастает, поэтому при $n = 1$ она принимает минимальное значение. Тогда получим:

$$\bar{\Delta} \geq \frac{1}{2}(1 - e^{-2\mu_1 p})^2 > 0.$$

Это доказывает отсутствие «малого знаменателя». Итак, $\bar{\Delta} \neq 0$. Лемма 4.1 доказана.

Интегрируя (4.7) по частям и вводя следующие обозначения:

$$\alpha_n(x) = \int_0^p G_n(x, \xi) g_n(\xi) d\xi,$$

$$\tilde{G}_n(x, \xi) = -a_1 G_{n\xi\xi}(x, \xi) - a_2 G_n(x, \xi),$$

получим

$$V_n(x) = \alpha_n(x) + \int_0^p \tilde{G}_n(x, \xi) V_n(\xi) d\xi, \quad n \in N, \quad (4.9)$$

являющееся интегральным уравнением Фредгольма второго рода. Решаем (14) с помощью последовательных приближений:

$$V_n(x) = \alpha_n(x) + \int_0^p R_n(x, \xi) \alpha_n(\xi) d\xi, \quad (4.10)$$

здесь

$$R_n(x, \xi) = \tilde{G}_{0n}(x, \xi) + \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{G}_{mn}(x, \xi),$$

$$\tilde{G}_{0n}(x, \xi) = \tilde{G}_n(x, \xi),$$

$$\tilde{G}_{mn}(x, \xi) = \int_0^p \tilde{G}_{1n}(x, s) \tilde{G}_{(m-1)n}(s, \xi) ds, \quad m = 2, 3, \dots, n \in N.$$

В силу (4.3), (4.5) и (4.10) решение задачи A_1 имеет вид

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n(x) + \int_0^p R_n(x, \xi) \alpha_n(\xi) d\xi + \rho_n(x) \right) Y_n(y). \quad (4.11)$$

Для оценки резольвенты составим мажорирующий ряд

$$\frac{1}{p} \sum_{m=0}^{\infty} (Jp)^{m+1}, \quad (4.12)$$

здесь

$$J = E \left(\frac{2}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_1^3} \right) (1 - e^{-2\mu_1 p})^{-2},$$

Из условия 1 теоремы 4.1 можно записать в виде

$$E \left(\frac{2}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_1^3} \right) (1 - e^{-2\mu_1 p})^{-2} p < 1,$$

отсюда

$$Jp < 1,$$

тогда мажорирующий ряд (4.12) представляет собой сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии. В этом случае резольвента равномерно сходится, и ее оценка имеет вид

$$|R_n(x, \xi)| \leq \frac{J}{1 - Jp} \leq M. \quad (4.13)$$

Теперь оценим $\alpha_n(x)$. Сначала, учитывая условия 2 и 3 теоремы 4.1, интегрируем по частям ψ_{in} три раза, а $f_n(x)$ два раза, находим следующие оценки:

$$|\psi_{in}| \leq \frac{M}{n^3} |\Psi_{in}|, \quad i = \overline{1, 4}, \quad |f_n(x)| \leq \frac{M}{n^2} |\Phi_n(x)|, \quad n \in N, \quad (4.14)$$

где

$$\Psi_{in} = \sqrt{\frac{2}{q}} \int_0^q \psi'''_i(\eta) \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2q}\eta\right) d\eta, \quad i = \overline{1, 4}, \quad \Phi_n(x) = \int_0^q f_{\eta\eta}(x, \eta) Y_n(\eta) d\eta.$$

Учитывая (4.14), и следующие оценки:

$$|g_n(x)| \leq \frac{M}{n} \sum_{i=1}^4 |\Psi_{in}| + \frac{M}{n^2} |\Phi_n(x)| + \frac{M}{n^3} \sum_{i=1}^4 |\Psi_{in}|,$$

$$|g'_n(x)| \leq \frac{M}{n} \sum_{i=1}^4 |\Psi_{in}| + \frac{M}{n^2} |\Phi'_n(x)| + \frac{M}{n^3} \sum_{i=1}^4 |\Psi_{in}|,$$

находим

$$|\alpha_n(x)| \leq \frac{M}{n^3} \sum_{i=1}^4 |\Psi_{in}| + \frac{M}{n^4} (1 + |\Phi_n(x)|) + \frac{M}{n^5} \sum_{i=1}^4 |\Psi_{in}|, \quad x \in [0, p]. \quad (4.15)$$

Согласно (4.13), (4.15) имеем

$$|V_n(x)| \leq \frac{M}{n^3} \sum_{i=1}^4 |\Psi_{in}| + \frac{M}{n^4} (1 + |\Phi_n(x)|) + \frac{M}{n^5} \sum_{i=1}^4 |\Psi_{in}|, \quad x \in [0, p]. \quad (4.16)$$

После некоторых вычислений для (4.16) находим оценку

$$|V_n(x)| \leq \frac{M}{n^3} \sum_{i=1}^4 |\Psi_{in}|, \quad x \in [0, p]. \quad (4.17)$$

Принимая во внимание (4.16) и (4.17), получим

$$|u(x, y)| \leq M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^4 |\Psi_{in}| + M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} (1 + |\Phi_n(x)|) + \frac{M}{n^5} \sum_{i=1}^4 |\Psi_{in}| < \infty, \quad (x, y) \in \overline{D},$$

Отсюда следует, что решение задачи A_1 сходится абсолютно и равномерно в $\overline{D}$. Теперь покажем равномерную сходимость $u_{xxxx}(x, y)$. Производная третьего порядка функции Грина имеет разрыв. Учитывая это, находим производную четвёртого порядка от $V_n(x)$:

$$V_n^{(4)}(x) = g_n(x) - a_1 \left(\alpha''_n(x) + \int_0^p R_{nxx}(x, \xi) \alpha_n(\xi) d\xi \right) -$$

$$- a_2 \left(\alpha_n(x) + \int_0^p R_n(x, \xi) \alpha_n(\xi) d\xi \right) - \lambda_n \left(\alpha_n(x) + \int_0^p R_n(x, \xi) \alpha_n(\xi) d\xi \right).$$

Используя следующие оценки:

$$|\alpha''_n(x)| \leq \frac{M}{n^2} \sum_{i=1}^4 |\Psi_{in}| + \frac{M}{n^3} + \frac{M}{n^4} \sum_{i=1}^4 |\Psi_{in}|, \quad |R_{nxx}(x, \xi)| \leq nM,$$

находим

$$|V_n^{(4)}(x)| \leq \frac{M}{n} \sum_{i=1}^4 |\Psi_{in}| + \varphi_{1n}(x),$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_{1n}(x) = & \frac{M}{n^2} \left(\sum_{i=1}^4 |\Psi_{in}| + 1 + |\Phi_n(x)| \right) + \frac{M}{n^3} \left(\sum_{i=1}^4 |\Psi_{in}| + 1 \right) + \\ & + \frac{M}{n^4} \left(\sum_{i=1}^4 |\Psi_{in}| + 1 + |\Phi_n(x)| \right) + \frac{M}{n^{\frac{5}{2}}} \sum_{i=1}^4 |\Psi_{in}| + \frac{M}{n^{\frac{7}{2}}} + \frac{M}{n^{\frac{9}{2}}} \sum_{i=1}^4 |\Psi_{in}| = O(n^{-2}), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Тогда имеем

$$|u_{xxxx}(x, y)| \leq M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (|\Psi_{1n}| + |\Psi_{2n}| + |\Psi_{3n}| + |\Psi_{4n}|) + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{1n}(x), \quad (x, y) \in \bar{D},$$

где второе слагаемое сходится абсолютно и равномерно в $\bar{D}$. Чтобы доказать абсолютную и равномерную сходимость первого слагаемого, мы используем неравенства Коши-Банковского и Бесселя

$$\begin{aligned} & M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (|\Psi_{1n}| + |\Psi_{2n}| + |\Psi_{3n}| + |\Psi_{4n}|) \leq \\ & \leq M \left(\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\Psi_{1n}|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\Psi_{2n}|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\Psi_{3n}|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\Psi_{4n}|^2} \right) \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} \leq \\ & \leq M (\|\psi'''_1(y)\| + \|\psi'''_2(y)\| + \|\psi'''_3(y)\| + \|\psi'''_4(y)\|) \sqrt{\frac{\pi^2}{6}} < \infty, \end{aligned}$$

здесь

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\Psi_{in}|^2 \leq \|\psi'''_i(y)\|_{L_2(0,q)}^2, \quad i = \overline{1,4}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Отсюда следует, что $u_{xxxx}(x, y)$ сходится абсолютно и равномерно в $\bar{D}$. Учитывая уравнение (2.1), заключаем, что и u_{yy} тоже сходится.

Теорема 4.1 доказана.

5. Заключение

В данной работе проведено комплексное исследование краевой задачи с несимметричными по времени условиями для одного класса неоднородных дифференциальных уравнений четвертого порядка с младшими членами. В ходе изысканий получены следующие основные результаты:

1. С помощью метода энергетических неравенств строго обоснована теорема единственности решения поставленной задачи.
2. Сконструирована соответствующая функция Грина, через которую выписано явное аналитическое представление искомого решения.
3. Доказана разрешимость задачи в терминах регулярных решений, при этом ключевым элементом обоснования равномерной сходимости рядов стало установление отличности от нуля «малого знаменателя».

Полученные результаты вносят вклад в общую теорию уравнений с кратными характеристиками и могут быть применены в задачах механики и математической физики.

Благодарность

Авторы выражают глубокую признательность редактору и анонимным рецензентам за внимательное рассмотрение рукописи, ценные замечания и конструктивные рекомендации, которые способствовали существенному улучшению качества статьи.

Финансирование

Данное исследование выполнено без привлечения внешних источников финансирования.

Список литературы

- [1] Турбин М.В.: *Исследование начально-краевой задачи для модели движения жидкости Гершел-Балкли*. Вест. Воронеж. Гос. Ун-та. Сер. Физ. Мат., 2013, № 2, с.246-257.
- [2] Уизем Дж.: *Линейные и нелинейные волны*. М.: Мир, 1977.
- [3] Шабров С.А.: *Об оценках функций влияния одной математической модели четвертого порядка*. Вест. Воронеж. Гос. Ун-та. Сер. Физ. Мат., 2015, № 2, с.168-179.
- [4] Benney D.J., Luke J.C.: *Interactions of permanent waves of finite amplitude*. J. Math. Phys., 1964, 43, pp.309-313.
- [5] Tursunov D.A., Orozov M.O.: *Asymptotic solution of the dirichlet problem for a ring, when the corresponding unperturbed equation has a regular special circle*. (2019) Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta, Matematika i Mekhanika, 2019 (63), pp. 37 - 46. DOI: 10.17223/19988621/63/4
- [6] Джураев Т.Д., Сопуев А.: *К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка*. Ташкент: Фан, 2000, 144 с.
- [7] Аманов Д., Мурзамбетова М. Б.: *Краевая задача для уравнения четвертого порядка с младшим членом*. Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки, 2013, выпуск 1, с.3-10.
- [8] Сабитов К. Б., Фадеева О. В.: *Начально-граничная задача для уравнения вынужденных колебаний консольной балки*. Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2021, 25, 1, с.51-66.
- [9] Иргашев Б. Ю.: *Краевая задача для одного вырождающегося уравнения высокого порядка с младшими членами*. Бюллетень Института математики 2019, №6, с.23-30.
- [10] Urinov A.K., Azizov M.S.: *Boundary Value Problems for a Fourth Order partial Equation with an Unknown Right-hand Part*. Lobachevskii Journal of Mathematics, 2021, Vol. 42, № 3, pp.632-640.
- [11] Аманов Д., Бекиев А.Б., Отарова Ж.А.: *Об одной краевой задаче для уравнения четвертого порядка*. УзМЖ. 2015, № 4, с.11-18.х
- [12] Сабитов К. Б.: *Обратные задачи для уравнения колебаний балки по определению правой части и начальных условий*. Дифференциальные уравнения, 2020, том 56, №6, с.761-774.
- [13] Апаков Ю.П., Мамажонов С.М.: *Краевая задача для неоднородного уравнения четвертого порядка с постоянными коэффициентами*. Челябинский физико-математический журнал. 2023, Т. 8, выпуск 2, с.157-172.
- [14] Мамажонов С.М.: *Третья краевая задача для неоднородного уравнения четвертого порядка с постоянными коэффициентами*. Бюллетень Института математики. 2022, Vol. 5, № 6, с.100-109.
- [15] Апаков Ю.П., Мамажонов С.М., Нуритдинова З. Н.: *О решении краевой задачи для неоднородного уравнения четвертого порядка с постоянными коэффициентами с помощью функции Грина*. Научный вестник Наманганского государственного университета. 2024, № 4, -с.72-77.
- [16] Умаров Р.А.: *Краевые задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками с младшими членами*. Дисс. док. фил. по физ.-мат. наук. - Фергана: Ферганский государственный университет, 2025. 98 с.
- [17] Apakov Yu. P., Ibrokhimov Kh. K.: *Bitsadze-Samarskii Type Problem For The Viscous-Transonic Equation*. Journal of Mathematical Sciences. Published: 13 February 2026. <https://doi.org/10.1007/s10958-026-08224-6>.
- [18] Apakov Yu.P., Hamitov A.A.: *On Constructing a Solution to a Boundary Value Problem for a Third-Order Inhomogeneous Equation Using the Green's Function in Three-Dimensional Space*. Lobachevskii Journal of Mathematics, 2025, Vol. 46, No 11, pp. 5504-5513. DOI: 10.1134/S1995080225611786
- [19] Апаков Ю.П., Меликузиева Д.М.: *Решение краевой задачи для неоднородного уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками построением функции Грина*. "ДАН РУз", 3-9 ст. №3, 2026 г
- [20] Мамажонов С.М.: *Решение второй краевой задачи для неоднородного уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками*. Научный вестник Наманганского государственного университета. 2020, № 11, -с.8-15.

Solution of a boundary value problem with time-asymmetric conditions for a nonhomogeneous fourth-order equation with constant coefficients

Apakov Yu.P.,* Nuritdinova Z.N

Abstract

This paper investigates the well-posedness of a boundary value problem in a rectangular domain for a fourth-order inhomogeneous equation with lower-order terms and constant coefficients. Based on the method of energy inequalities (energy integrals), the uniqueness of the solution to the problem under consideration is rigorously established. An explicit representation of the desired solution is derived by constructing the corresponding Green's function. Furthermore, in examining the uniform convergence of the series, it is proved that the "small denominator" arising in the denominator is strictly non-zero, thereby guaranteeing the existence of a regular solution.

Keywords

Fourth-order differential equation; Green's functions; Lower-order terms; Multiple characteristics; Uniqueness and existence of a solution; Formulation of a boundary value problem.

Affiliations

Apakov Yusupjon Pulatovich

Address: Namangan State Technical University, Dept. of Higher Mathematics, 160103, Namangan, Uzbekistan and Institute of Mathematics named after V.I.Romanovsky Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan.

e-mail: yusupjonapakov@gmail.com

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-9611-1466>

Nuritdinova Zuxraxon Nosirjon qizi

Address: Namangan State Technical University, Dept. of Higher Mathematics, 160103, Namangan, Uzbekistan.

e-mail: zuhraahmadzonova60@gmail.com