Uzbekistan Journal of Mathematics and Computer Science
Volume-2, Issue-1, Page 50–59 (2026)
DOI: https://doi.org/10.56143/ujmcs.v2i1.6
Research article

Об одном оптимальном управлении нелинейной системой дробного порядка в локально выпуклом пространстве

Т. К. Юлдашев*, Б. С. Закиров, Т. Ф. Жураев, М. К. Маманов

Аннотация

В данной работе рассматривается задача оптимального управления для системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений дробного порядка в локально выпуклом пространстве. Функция Понтрягина строится на основе введения сопряжённой финальной задачи. Посредством дифференцирования этой функции по функции управления получается интегральное уравнение относительно управления. С использованием семейства полунорм, задающих топологию локально выпуклого пространства, а также условий равномерной ограниченности и липшицевости для заданных нелинейных отображений, метод последовательных приближений сочетается с принципом сжимающих отображений. Доказываются существование и единственность функции управления и соответствующей функции состояния, а также непрерывная зависимость функции состояния от начального элемента.

Ключевые слова: *уравнение дробного порядка, локально выпуклое пространство, функция Понтрягина, метод последовательных приближений, сжимающее отображение, существование, единственность, устойчивость.*

Предметная классификацие AMS (2020): *Основная: 34A08; 34A30; 34A45; Дополнительная: 34H05; 34B10.*

1. Введение. Постановка проблемы

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений остается сильнейщим и быстро развивающимся разделом методов математической физики и нелинейной механики [1]–[19]). Она применяется в разных областях современной науки и практики.

Оптимальное управление динамическими системами является одним из актуальных направлений современной математики. В классической теории оптимального управления функция состояния обычно изучается в конечномерных пространствах или в банаховых пространствах (см., например, [20]–[37]). Однако многие модели, возникающие в анализе, теории операторов, интегро-дифференциальных уравнениях, задачах с памятью и распределёнными параметрами, естественным образом формулируются в более общем классе пространств, а именно в локально выпуклых пространствах.

С другой стороны, дробное исчисление стало одним из эффективных инструментов моделирования процессов с памятью и наследственностью (см., например, [38]–[57]). Поэтому естественным является перенос задач оптимального управления дробными системами в локально выпуклые пространства.

Received : *01–февраля–2026,* ***Accepted :*** *30–мая–2026*
*** Corresponding author***

В отличие от стандартного подхода (см. [18]), где функция состояния определяется при фиксированном управлении, в настоящей работе функции управления и состояния рассматриваются одновременно как решение функциональной системы, состоящей из двух нелинейных интегральных уравнений.

Пусть E – полное локально выпуклое пространство, топология которого задаётся семейством полунорм

$$\mathcal{P} = \{p_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}.$$

Пусть $\Omega = [0, T],\ 0 < T$, и через $C(\Omega, E)$ обозначим пространство всех непрерывных функций $x : \Omega \to E$. Для каждой полунормы $p_\alpha \in \mathcal{P}$ определим индуцированную полунорму на $C(\Omega, E)$:

$$\tilde{p}_\alpha(x) = \sup_{t\in\Omega} p_\alpha(x(t)).$$

Тогда $C(\Omega, E)$ является локально выпуклым пространством относительно семейства полунорм $\{\tilde{p}_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$.

Пусть U пространство управлений. Для определённости считаем, что U является локально выпуклым пространством с семейством полунорм $\{q_\beta\}_{\beta\in\mathcal{B}}$, а через $C(\Omega, U)$ обозначим пространство непрерывных функций управления.

Рассмотрим задачу оптимального управления для следующей системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений дробного порядка

$$ {}_C D^\gamma_{0t} x(t) = g(t, x(t)) \int_0^t f\left(s, x(s), u(s)\right) ds, \quad t \in \Omega \tag{1.1}$$

с начальным условием

$$x(0) = x_0 \in E, \tag{1.2}$$

где $x(t)$ – функция состояния, $u(t)$ – функция управления, посредством ${}_C D^\gamma_{0t}$ обозначен дробный оператор Герасимова–Капуто порядка $0 < \gamma < 1$:

$$ {}_C D^\gamma_{0t} x(t) = I^{1-\gamma}_{0t} x'(t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^t \frac{x'(s)ds}{(t-s)^{1-\gamma}}, \ \ t \in \Omega,$$

а интеграл Римана–Лиувилля порядка $0 < \gamma < 1$ задаётся выражением

$$I^\gamma_{0t} x(t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^t \frac{x(s)ds}{(t-s)^{1-\gamma}}, \quad 0 < \gamma < 1.$$

$\Gamma(\gamma)$ – Гамма функция: $\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt, \quad \mathrm{Re}\, z > 0,\ g \in C(\Omega \times E, E),\ f \in C(\Omega \times E \times U, E).$

Рассмотрим следующий функционал качества

$$J[u] = [x_0 - \eta]^2 + \mu \int_0^T \varepsilon(t) u^2(t) dt, \tag{1.3}$$

где $0 < \eta,\ \mu = \mathrm{const},\ \ 0 < \varepsilon(t) \in C(\Omega)$.

Постановка задачи. Требуется найти функцию управления $u^*(t) \in C(\Omega, U)$ и соответствующую функцию состояния $x^*(t) \in C(\Omega, E)$, минимизирующие функционал (1.3) при условии, что (x^*, u^*) удовлетворяет уравнению (1.1) и начальному условию (1.2).

2. Сведение задачи (1.1), (1.2) к интегральному уравнению

Пусть функция $x(t) \in C(\Omega, E)$ является решением задачи (1.1)–(1.2). Применим оператор $I^{\gamma}_{0\,t}$ к уравнению (1.1):

$$I^{\gamma}_{0\,t\,C}D^{\gamma}_{0t}x(t) = I^{\gamma}_{0\,t}g(t,x(t))\int\limits_0^t f\,(s,x(s),u(s))\,ds$$

и воспользуемся определением дробного оператора Герасимова–Капуто

$$I^{\gamma}_{0\,t\,C}D^{\gamma}_{0\,t}\,(x(t)) = I^{\gamma}_{0\,t}I^{1-\gamma}_{0\,t}x'(t) = I^{1}_{0\,t}x'(t) = \int\limits_0^t x'(s)ds = x(t) - x(0), \tag{2.1}$$

$$I^{\gamma}_{0t}\eta_0\,(t,x(t)) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int\limits_0^t (t-s)^{\gamma-1}\eta_0\,(s,x(s))\,ds. \tag{2.2}$$

Тогда, применяя формулы (2.1) и (2.2) к последнему дробному интегро-дифференциальному уравнению, получаем:

$$x(t) = x(0) + \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int\limits_0^t (t-s)^{\gamma-1}g(s,x(s))\int\limits_0^s f\,(\theta,x(\theta),u(\theta))\,d\theta ds.$$

С учетом условия (1.2), последнее равенство мы перепишем как оператор следующим образом

$$x(t) = K_1(t;x,u) \equiv x_0 + \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int\limits_0^t (t-s)^{\gamma-1}g(s,x(s))\int\limits_0^s f\,(\theta,x(\theta),u(\theta))\,d\theta ds. \tag{2.3}$$

Уравнение (2.3) удовлетворяет задачу (1.1)–(1.2). Дифференцируем (2.3) по t:

$$x'(t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int\limits_0^t (1-s)^{\gamma-1}g(s,x(s))\int\limits_0^s f\,(\theta,x(\theta),u(\theta))\,d\theta ds. \tag{2.4}$$

3. Интегральные уравнения для функции управления

Пусть $u*(t) \in U$ – оптимальная функция управления, где $u*(t) + \Delta u*(t) \in C(\Omega, U)$. Рассмотрим уравнение (2.3) и задачу отыскания функции управления $u*(t) \in U$ и соответствующей функции состояния $x*(t)$, обеспечивающих минимум функционала (1.3). Для получения условий оптимальности введём функцию Понтрягина:

$$H(u(t),x(t)) = \frac{\psi(t)}{\Gamma(\gamma)}\int\limits_0^t (1-s)^{\gamma-1}g(s,x(s))\times$$

$$\times\int\limits_0^s f\,(\theta,x(\theta),u(\theta))\,d\theta ds - \mu\varepsilon(t)u^2(t), \tag{3.1}$$

где функция $\psi(t) \in E'$ принадлежит сопряжённому пространству E' и определяется из следующего уравнения:

$$D^{\gamma}_{0\,t}\psi(t) = -\psi(t) \tag{3.2}$$

с финальным условием

$$\psi(T) = -2[x_0 - \eta]. \tag{3.3}$$

В результате решения дифференциального уравнения (3.2) получаем функцию

$$\psi(t) = \psi(0) - \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^t (t-s)^{\gamma-1} \psi(s) ds.$$

Для определения постоянного интегрирования $\psi(0)$ воспользуемся условием, заданным в конечной точке (3.3):

$$\psi(0) - \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^T (T-s)^{\gamma-1} \psi(s) ds = -2[x_0 - \eta].$$

Таким образом, получаем, что:

$$\psi(0) = -2x_0 + 2\eta + \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^T (T-s)^{\gamma-1} \psi(s) ds. \tag{3.4}$$

Следовательно, в силу (3.4), имеем:

$$\psi(t) = -2x_0 + 2\eta + \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^T K_0(t,s) \psi(s) ds, \tag{3.5}$$

где

$$K_0(t,s) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \begin{cases} (T-s)^{\gamma-1} - (t-s)^{\gamma-1}, & t \le s \le T, \\ -(t-s)^{\gamma-1}, & 0 < s \le t. \end{cases}$$

Уравнение (3.5) является интегральным уравнением второго рода и имеет единственное решение $\psi(t) \in E'$.

Выполняя дифференцирование выражения (3.1) по функции управления, получаем интегральное уравнение относительно функции управления

$$H_u(u(t), x(t)) = -2\gamma\varepsilon(t)u(t) +$$
$$+\psi(t) \int_0^t (1-s)^{\alpha-1} g(s, x(s)) \int_0^s f_u\left(\theta, x(\theta), u(\theta)\right) d\theta ds. \tag{3.6}$$

Уравнение (3.6) запишем как операторное уравнение относительно функции управления:

$$u(t) = K_2(t; x, u) \equiv$$
$$\equiv a_0(t) \int_0^t (1-s)^{\alpha-1} g(s, x(s)) \int_0^s f_u\left(\theta, x(\theta), u(\theta)\right) d\theta ds, \tag{3.7}$$

где

$$a_0(t) = \frac{\psi(t)}{\gamma\varepsilon(t)\Gamma(\alpha)}.$$

4. Основные результаты

Рассмотрим интегральные операторы (2.3) и (3.7) как систему уравнений.

Теорема 4.1. *Предположим, что следующие условия выполнены:*
1). *Для функций* g, f, f_u *имеют место включения:*

$$g \in C(\Omega \times E, E), f \in C(\Omega \times E \times U, E), f_u \in C(\Omega \times E \times U, E)$$

и $p_\alpha(g) < \infty,\ \ p_\alpha(f) < \infty,\ \ p_\alpha(f_u) < \infty$;

2*). Для каждой полунормы* $p_\alpha \in \mathcal{P}$ *существуют константы* $0 < L_1, L_{\kappa i},\ \kappa = 2,3,\ \ i = 1,2$ *такие что здесь справедливы неравенства*

$$p_\alpha\left(g(t,x_1) - g(t,x_2)\right) \le L_1 p_\alpha\left(|\, x_1 - x_2\,|\right);$$

$$p_\alpha\left(f(t,x_1,u_1) - f(t,x_2,u_2)\right) \le L_{21} p_\alpha\left(x_1 - x_2\right) + L_{22} q_\beta\left(u_1 - u_2\right);$$

$$p_\alpha\left(f_u(t,x_1,u_1) - f_u(t,x_2,u_2)\right) \le L_{31} p_\alpha\left(x_1 - x_2\right) + L_{32} q_\beta\left(u_1 - u_2\right),$$

где q_β *– фиксированная полунорма в* U*;*

3*). Для каждой полунормы* p_α *выполнено условие Шаудера*

$$\tilde{\rho}_{\alpha,\beta}(x,u) = \tilde{\rho}_\alpha(x) + \tilde{\rho}_\beta(u) = \max\left\{\chi_{11} + \chi_{21}, \chi_{12} + \chi_{22}\right\} < 1,$$

где $\chi_{11}, \chi_{21}, \chi_{12}, \chi_{22}$ *определяются из* (4.6), (4.7), (4.9) *и* (4.10) *внизу.*

Тогда система из интегральных уравнений функции состояния (2.3) *и функции оптимизации* (3.7) *имеет единственную пару решений* $\{x^*(t) \in C(\Omega \times E),\ \ u^*(t) \in C(\Omega \times U)\}$*. Это пара решений может быть найдено из следующих итерационных процессов:*

$$\begin{cases} x^k(t) = K_1(t; x^{k-1},\, u^{k-1}),\ \ k = 1,2,3,..., \\ x^0(t) = x_0,\ \ t \in \Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

$$\begin{cases} u^k(t) = K_2(t; x^{k-1},\, u^{k-1}),\ \ k = 1,2,3,..., \\ u^0(t) = 0,\ \ t \in \Omega. \end{cases} \tag{4.2}$$

Доказательство. Зафиксируем $\alpha \in \mathcal{A}$. Тогда с учетом условий теоремы, для первой разности приближений (4.1) и (4.2) справедлива оценка

$$\tilde{p}_\alpha\left(x^{k+1}(t) - x^0(t)\right) \le \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \sup_{t\in\Omega} \int_0^t (t-s)^{\gamma-1} p_\alpha\left(g(s,x^k(s))\right) \int_0^s p_\alpha\left(f\left(\theta, x^k(\theta), u^k(\theta)\right)\right) d\theta ds \le$$

$$\le \frac{T^{\gamma+1}}{\gamma(1+\gamma)\Gamma(\gamma)} p_\alpha\left(g(s,x^k(s))\right) p_\alpha\left(f\left(t, x^k(t), u^k(t)\right)\right) = \delta_1 < \infty. \tag{4.3}$$

Аналогично имеем, что справедлива оценка

$$\tilde{q}_\beta\left(u^{k+1}(t) - u^0(t)\right) \le \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sup_{t\in\Omega} \int_0^t (1-s)^{\alpha-1} p_\alpha\left(g(s,x^k(s))\right) \int_0^s p_\alpha\left(f\left(\theta, x^k(\theta), u^k(\theta)\right)\right) d\theta ds \le$$

$$\le \frac{\delta_0}{\gamma(1+\gamma)} p_\alpha\left(g(s,x^k(s))\right) p_\alpha\left(f\left(t, x^k(t), u^k(t)\right)\right) = \delta_2 < \infty, \tag{4.4}$$

где

$$\delta_0 = \begin{cases} 1 + (1+\gamma t)(1-t)^\gamma, & t < 1, \\ 1 - (1+\gamma t)(1-t)^\gamma, & t > 1. \end{cases}$$

Теперь для двух пар $\left(x^{k+1}(t), u^{k+1}(t)\right)$ и $\left(x^k(t), u^k(t)\right)$ из (4.1), (4.2), используя условий Липшица, получаем

$$\tilde{p}_\alpha\left(x^{k+1}(t) - x^k(t)\right) \le \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \sup_{t\in\Omega} \int_0^t (t-s)^{\gamma-1} p_\alpha\left(g(s,x^k(s))\right) \times$$

$$\times \int_0^s \left[L_{21} p_\alpha\left(x^k(\theta) - x^{k-1}(\theta)\right) + L_{22} q_\beta\left(u^k(\theta) - u^{k-1}(\theta)\right)\right] d\theta ds +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\sup_{t\in\Omega}\int_0^t (t-s)^{\gamma-1}L_1 p_\alpha\left(x^k(s)-x^{k-1}(s)\right)\int_0^s p_\alpha\left(f(\theta,x^{k-1}(\theta),u^{k-1}(\theta))\right)d\theta ds\leq$$

$$\leq\frac{T^{\gamma+1}}{\gamma(1+\gamma)\Gamma(\gamma)}p_\alpha\left(g(t,x^k(t))\right)\left[L_{21}p_\alpha\left(x^k(t)-x^{k-1}(t)\right)+L_{22}q_\beta\left(u^k(t)-u^{k-1}(t)\right)\right]+$$

$$+\frac{T^{\gamma+1}}{\gamma(1+\gamma)\Gamma(\gamma)}p_\alpha\left(f(t,x^{k-1}(t),u^{k-1}(t))\right)L_1 p_\alpha\left(x^k(t)-x^{k-1}(t)\right)\leq$$

$$\leq\chi_{11}\tilde{p}_\alpha\left(x^k(t)-x^{k-1}(t)\right)+\chi_{12}\tilde{q}_\beta\left(u^k(t)-u^{k-1}(t)\right),\tag{4.5}$$

где

$$\chi_{11}=\frac{T^{\gamma+1}}{\gamma(1+\gamma)\Gamma(\gamma)}\left[L_{21}p_\alpha\left(g(t,x^k(t))\right)+L_1 p_\alpha\left(f(t,x^{k-1}(t),u^{k-1}(t))\right)\right],\tag{4.6}$$

$$\chi_{12}=\frac{L_{22}T^{\gamma+1}}{\gamma(1+\gamma)\Gamma(\gamma)}p_\alpha\left(g(t,x^k(t))\right).\tag{4.7}$$

Аналогично получаем оценку

$$\tilde{q}_\beta\left(u^{k+1}(t)-u^k(t)\right)\leq\tilde{a}_0\sup_{t\in\Omega}\int_0^t(1-s)^{\gamma-1}p_\alpha\left(g(s,x^k(s))\right)\times$$

$$\times\int_0^s\left[L_{31}p_\alpha\left(x^k(\theta)-x^{k-1}(\theta)\right)+L_{32}q_\beta\left(u^k(\theta)-u^{k-1}(\theta)\right)\right]d\theta ds+$$

$$+\tilde{a}_0\sup_{t\in\Omega}\int_0^t(1-s)^{\gamma-1}L_1 p_\alpha\left(x^k(s)-x^{k-1}(s)\right)\int_0^s p_\alpha\left(f(\theta,x^{k-1}(\theta),u^{k-1}(\theta))\right)d\theta ds\leq$$

$$\leq\frac{\tilde{a}_0T^{\gamma+1}}{\gamma(1+\gamma)}p_\alpha\left(g(t,x^k(t))\right)\left[L_{31}p_\alpha\left(x^k(t)-x^{k-1}(t)\right)+L_{32}q_\beta\left(u^k(t)-u^{k-1}(t)\right)\right]+$$

$$+\frac{\tilde{a}_0T^{\gamma+1}}{\gamma(1+\gamma)}p_\alpha\left(f(t,x^{k-1}(t),u^{k-1}(t))\right)L_1 p_\alpha\left(x^k(t)-x^{k-1}(t)\right)\leq$$

$$\leq\chi_{21}\tilde{p}_\alpha\left(x^k(t)-x^{k-1}(t)\right)+\chi_{22}\tilde{q}_\beta\left(u^k(t)-u^{k-1}(t)\right),\tag{4.8}$$

где $\tilde{a}_0=p_\alpha(a_0(t))$,

$$\chi_{21}=\frac{\tilde{a}_0T^{\gamma+1}}{\gamma(1+\gamma)}\left[L_{31}p_\alpha\left(g(t,x^k(t))\right)+L_1 p_\alpha\left(f(t,x^{k-1}(t),u^{k-1}(t))\right)\right],\tag{4.9}$$

$$\chi_{22}=\frac{\tilde{a}_0L_{32}T^{\gamma+1}}{\gamma(1+\gamma)}p_\alpha\left(g(t,x^k(t))\right).\tag{4.10}$$

Складывая (4.5) и (4.8) почленно, получаем, что

$$\tilde{p}_\alpha\left(x^{k+1}(t)-x^k(t),u^{k+1}(t)-u^k(t)\right)=\tilde{p}_\alpha\left(x^{k+1}(t)-x^k(t)\right)+\tilde{q}_\beta\left(u^{k+1}(t)-u^k(t)\right)\leq$$

$$\leq\tilde{\rho}_\alpha\tilde{p}_\alpha\left(x^k(t)-x^{k-1}(t)\right)+\tilde{\rho}_\beta\tilde{q}_\beta\left(u^k(t)-u^{k-1}(t)\right)\leq$$

$$\leq\tilde{\rho}_{\alpha,\beta}\tilde{p}_\alpha\left(x^k(t)-x^{k-1}(t),u^k(t)-u^{k-1}(t)\right),\tag{4.11}$$

где

$$\tilde{\rho}_\alpha=\chi_{11}+\chi_{21},\quad\tilde{\rho}_\beta=\chi_{12}+\chi_{22},\quad\tilde{\rho}_{\alpha,\beta}=\max\left\{\chi_{11}+\chi_{21},\chi_{12}+\chi_{22}\right\}.$$

Поскольку $\tilde{\rho}_{\alpha,\beta} < 1$, из оценки (4.11) следует, что операторы, заданные правыми частями уравнений (2.3) и (3.7), являются сжимающими относительно каждой полунормы $\tilde{\rho}_\alpha$. Так как пространство $C(\Omega \times E) \times C(\Omega \times U)$ полно, из оценок (4.3), (4.4) и (4.11) вытекает существование и единственность функции управления $u^*(t) \in C(\Omega \times U)$ и соответствующей функции состояния $x^*(t) \in C(\Omega \times E)$. Обозначим решение интегрального уравнения (3.7) через $u^*(t) = h(t)$. Тогда нетрудно установить разрешимость дифференциального уравнения (2.4). Теорема 4.1 доказана. □

Теорема 4.2. *Пусть выполняются условия теоремы 4.1. Тогда функция состояния $x^*(t) \in E$ непрерывно зависит от начального данного x_0.*

Доказательство. Теперь покажем непрерывную зависимость решения задачи (1.1)–(1.2) от правой части начального условия (1.2). Пусть $x_0, x_0' \in E$ разные два числа и функции $x_1(t)$, $x_2(t) \in C(\Omega \times E)$ являются соответствующими решениями задачи (1.1)-(1.2). Тогда, аналогично оценкам (4.3) и (4.5) из уравнения (2.3) получаем, что

$$p_\alpha\left(x_1(t) - x_2(t)\right) \le p_\alpha\left(x_0 - x_0'\right) + \chi_{11} p_\alpha\left(x_1(t) - x_2(t)\right). \tag{4.12}$$

Поскольку $\chi_{11} \le \rho < 1$, то, из неравенства (4.12) следует, что

$$p_\alpha\left(x_1(t) - x_2(t)\right) \le \frac{p_\alpha\left(x_0 - x_0'\right)}{1 - \chi_{11}}.$$

Правая часть стремится к нулю при $x_0 \to x_0'$, что и доказывает непрерывную зависимость решения от начального элемента. Теорема 4.2 доказана. □

Заключение

В работе задача оптимального управления для нелинейной системы интегро-дифференциальных уравнений дробного порядка была рассмотрена в локально выпуклом пространстве. Это позволяет охватывать существенно более широкий класс моделей, в том числе бесконечномерные и функциональные системы. Основные результаты состоят в следующем:

1). Исходная дробная задача сведена к эквивалентному интегральному уравнению;

2). Условие оптимальности получено с помощью функции Понтрягина и сопряжённой финальной задачи;

3). Доказаны существование и единственность решения системы для функции состояния и функции управления;

4). Установлена непрерывная зависимость решения от начального элемента.

Полученные результаты могут служить основой для дальнейшего изучения задач оптимального управления в пространствах Фреше, в задачах с нелокальными условиями, а также в системах с более общей памятью и операторными ограничениями.

Финансирование

Работа не поддержана каким-либо грантом

Наличие данных и материалов

Не применимо.

Not applicable.

Конкурирующие интересы

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.
Авторы заявляют об отсутствии у них конфликта интересов.

Вклад автора

Все авторы внесли равный вклад в написание данной статьи. Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.
Все авторы внесли равный вклад в написание этой статьи. Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Список литературы

[1] Agarwal, Ravi P.: Boundary value problems for higher order differential equations. World Scientific, Singapore, Philadelphia. (1986), 307 p.
[2] Agarwal, Ravi P., Gupta, R. C.: Essentials of ordinary differential equations. McGraw-Hill Book Co., Singapore, New York. (1991), 467 p.
[3] Agarwal, Ravi P.: Focal boundary value problems for differential and difference equations. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. (1998), 289 p.
[4] Agarwal, Ravi P., Grace, S. R., O'Regan, D.: Oscillation theory for second order Linear differential equations. Kluwer Academic Publishers, The Netherlands. (2002), 672.
[5] Asanova, A. T.: *On a nonlocal boundary-value problem for systems of impulsive hyperbolic equations*. Ukrainian Mathematical Journal. **65** (3), 349–365 (2013). https://doi.org/10.1007/s11253-013-0782-x.
[6] Assanova, A. T.: *Solvability of a nonlocal problem for a hyperbolic equation with integral conditions*. Electronic Journal of Differential Equations. **2017** (170), 1–12 (2017).
[7] Assanova, A. T.: *An integral-boundary value problem for a partial differential equation of second order*. Turkish Journal of Mathematics. **43** (4), 1967–1978 (2019). https://doi.org/10.3906/mat-1903-111.
[8] Assanova, A. T., Bakirova, E. A., Kadirbayeva, Z. M., Uteshova, R. E.: *A computational method for solving a problem with parameter for linear systems of integro-differential equations*. Computational and Applied Mathematics. **39** (3), Art.no. 248 (2020). https://doi.org/10.1007/s40314-020-01298-1.
[9] Assanova, A. T.: *On the solvability of nonlocal problem for the system of Sobolev-type differential equations with integral condition*. Georgian Mathematical Journal. **28** (1), 49–57 (2021). https://doi.org/10.1515/gmj-2019-2011.
[10] Assanova, A. T.: *A generalized integral problem for a system of hyperbolic equations and its applications*. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics. **52** (6), 1513–1532 (2023). https://doi.org/10.15672/hujms.1094454.
[11] Assanova, A. T., Mynbayeva, S. T.: *New general solution to a quasilinear Fredholm integro-differential equation and its application*. Lobachevskii Journal of Mathematics **44** (10), 4231–4239 (2023). https://doi.org/10.1134/S1995080223100062.
[12] Dzhumabaev, D. S.: *On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integrodifferential equations*. J. of Comp. and Applied Math. **294**, 342–357 (2016).
[13] Dzhumabaev, D. S.: *Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation*. USSR Comput. Math. Math. Phys. **29** (1), 34–46 (1989).
[14] Dzhumabaev, D. S., Dzhumabaev, A. D., Assanova, A. T.: *Properties of a partial Fredholm integro-differential equations with nonlocal condition and algorithms*. Mediterranean Journal of Mathematics **21** (6), Art. No. 169 (2024). https://doi.org/10.1007/s00009-024-02712-2.
[15] Tleulessova, A. B.: *On the correct solvability of a two-point boundary value problem with impulsive action*. Almaty Mat. Zhurn. **4** (3), 87–95 (2005).
[16] Tleulessova, A. B.: *On the unique solvability of a two-point boundary value problem with impulsive action*. Almaty, Mat. Zhurn. **4** (4), 93–102 (2004).
[17] Temesheva, S. M., Dzhumabaev, D. S., Kabdrakhova, S. S.: *On one algorithm to find a solution to a linear two-point boundary value problem*. Lobachevskii Journal of Mathematics. **42** (3), 606–612 (2021). https://doi.org/10.1134/S1995080221030173
[18] Mamanov, M. K., Khasanov, G. A., Madatova, Z. A.: *Optimal control problem for an impulsive systems of functional-differential equations with a nonlinear function under the sign of a first-order differential*. Journal of Osh University "Differential Equations". **1** (1), 67–77 (2026).
[19] Юлдашев, Т. К., Тлеубергенова, М. А., Танкеева, А. К., Молыбайкызы, А.: *Двухточечная краевая задача для системы функционально-дифференциальных уравнений с максимумами*. Uzbekistan Journal of Mathematics and Computer Science. **1** (2), 49–57 (2025). https://doi.org/10.56143/ujmcs.v1i2.7
[20] Abdullayev, V. M.: *Numerical solution to optimal control problems with multipoint and integral conditions*. Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics. **44** (2), 171–186 (2018).
[21] Abdyldaeva, E. F., Kerimbekov, A., Yuldashev, T. K., Kamali, M.: *On the convergence of the approximate solution to the optimization problem for oscillatory processes*. Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. **119** (3), 22–33 (2025). https://doi.org/10.31489/2025M3/22-33
[22] Albeverio, S., Alimov, Sh. A.: *On a time-optimal control problem associated with the heat exchange process*. Applied Mathematics and Optimization. **57** (1), 58–68 (2008).
[23] Alimov, Sh. A., Ibragimov, G. I.: *Time optimal control problem with integral constraint for the heat transfer process*. Eurasian Math. J. **15** (1), 8–22 (2024). https://doi.org/10.32523/2077-9879-2024-15-1-08-22
[24] Ashirbaev, B. Y., Yuldashev, T. K.: *Derivation of a controllability criteria for a linear singularly perturbed discrete system with small step*. Lobachevskii Journal of Math. **45** (3), 938–948 (2024).

[25] Azamov, A. A., Ibragimov, G. I., Mamayusupov, K., Ruzibaev, M. B.: *On the stability and null controllability of an infinite system of linear differential equations*. J. Dynamical and Control Systems. (2021). https://doi.org/10.1007/s10883-021-09587-6

[26] Azamov, A. A., Ruziboev, M. B.: *The time-optimal problem for evolutionary partial differential equations*. J. Applied Mathematics and Mechanics. **77** (2), 220–224 (2013).

[27] Deineka, V. S.: *Optimal control of the dynamic state of a thin compound plate*. Cybernetics and Systems Analysis. **42** (4), 151–157 (2006).

[28] Deumlich, R., Elster, K. H.: *Duality theorems and optimality, conditions for nonconvex optimization problems*. Mathematische Operationsforschung und Statistik. Series Optimization. **11** (2), 181–219 (1980).

[29] Керимбеков, А. К., Наметкулова, Р. Ж., Кадыримбетова, А. К.: *Условия оптимальности в задаче теплового регулирования с интегро-дифференциальным уравнением*. Вестник Иркутского государственного университета. Математика. **15**, 50–61 (2016).

[30] Керимбеков, А. К., Абдылдаева, Е. Ф.: *О разрешимости задачи слежения в нелинейной векторной оптимизации колебательных процессов*. Труды Института математики и механики. **30** (2), 103–115 (2024).

[31] Mahmudov, E. N.: *Infimal convolution and duality in convex optimal control problems with second order evolution differential inclusions*. Evolution Equations and Control Theory. **10** (1), 37–59 (2021).

[32] Ramazanova, A. T., Abdullozhonova, A. N., Yuldashev, T. K.: *Optimal mobile control in inverse problem for Barenblatt–Zheltov–Kochina type fractional order equation*. Lobachevskii Journal of Mathematics. **46** (1), 488–501 (2025). https://doi.org/10.1134/S1995080224608087

[33] Yuldashev, T. K., Ashirbaev, B. Y.: *Optimal feedback control problem for a singularly perturbed discrete system*. Lobachevskii Journal of Mathematics. **44** (2), 661–668 (2023).

[34] Yuldashev, T. K., Kadirkulov, B. J., Ramazanova, A. T., Shermamatov, Zh. Zh.: *Nonlinear optimal control problem in a two-point boundary regime for a pseudoparabolic equation with Samarskii–Ionkin type conditions*. Nanosystems: Physics, Chemics, Mathematics. **16** (5), 563–576 (2025). https://doi.org/10.17586/2220-8054-2025-16-5-563-576

[35] Yuldashev, T. K., Ramazanova, A. T., Shermamatov, Zh. Zh.: *Optimal control problem for a linear pseudoparabolic equation with final condition, degeneration and Gerasimov–Caputo operator*. Azerbaijan Journal of Mathematics. **15** (1), 257–283 (2025). https://doi.org/10.59849/2218-6816.2025.1.259

[36] Yuldashev, T. K., Qodirov, N. N., Eshov M. P., Abdurakhmanova, G. K.: *Optimal control problems for the Whitham type nonlinear differential equations with impulse effects*. Proceedings of the IUTAM Symposium on Optimal Guidance and Control for Autonomous Systems 2023, IUTAM Bookseries. **40** (2024), 205–217 (Springer Nature, Switzerland, 2024) https://doi.org/10.1007/978-3-031-39303-7

[37] Mamanov, M. K., Khasanov, G. A., Madatova, Z. A.: *Optimal control problem for an impulsive systems of functional-differential equations with a nonlinear function under the sign of a first-order differential*. J. Osh University "Differential Equations". **1** (1), 67–77 (2026).

[38] Abdullaev, O. Kh., Salmanov, O. Sh., Yuldashev, T. K.: *Direct and inverse problems for a parabolic-hyperbolic equation involving Riemann–Liouville derivatives*. Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. – Mathematics. **43** (1), 21–33 (2023).

[39] Diethelm, K., Freed, A. D.: *On the solution of nonlinear fractional order differential equations used in the modeling of viscoplasticity*. Scientifice Computing in Chemical Engineering II-Computational Fluid Dynamics, Reaction Engineering and Molecular Properties (F. Keil, W. Mackens, H. Voss, and J. Werther, Eds), Springer–Verlag, Heidelberg, 1999. 217–224.

[40] Diethelm, K., Ford, N. J.: *Analysis of fractional differential equations*. J. Math. Anal. Appl. **265**, 229–248 (2002).

[41] Delbosco, D., Rodino, L.: *Existence and uniqueness for a nonlinear fractional differential equation*. J. Math. Anal. Appl. **204**, 609–625 (1996).

[42] Gaul, L., Klein, P., Kempfle, S.: *Damping description involving fractional operators*. Mech. Systems Signal Processing 5, 81–88 (1991).

[43] Glockle, W. G., Nonnenmacher, T. F.: *A fractional calculus approach of selfsimilar protein dynamics*. Biophys. J. **68**, 46–53 (1995).

[44] Hilfer, R.: *Applications of fractional calculus in physics*. World Scientific, Singapore, 2000.

[45] Kaufmann, E. R., Mboumi, E.: *Positive solutions of a boundary value problem for a nonlinear fractional differential equation*. Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. **2007** (3), 1–11 (2007).

[46] Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., Trujillo, J. J.: *Theory and applications of fractional differential equations*. North-Holland Mathematics Studies. **204**. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006.

[47] Lakshmikantham, V., Vatsala, A. S.: *Theory of fractional differential inequalities and applications*. Commun. Appl. Anal. **11** (3-4), 395–402 (2007).

[48] Mainardi, F.: *Some basic problems in continuum and statistical mechanics*. Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics. (A. Carpinteri and F. Mainardi, Eds), 291–348, Springer-Verlag, Wien, 1997.

[49] Ochilova, N. K., Yuldashev, T. K.: *On a nonlocal boundary value problem for a degenerate parabolic-hyperbolic equation with fractional derivative*. Lobachevskii J. Math. **43** (1), 229–236 (2022). https://doi.org/10.1134/S1995080222040175

[50] Podlubny, I.: *Fractional differential equations*. Mathematics in sciences and engineering. **198**, Academic Press, San Diego, 1999.

[51] Псху, А. В.: *Дифференциальное уравнение в частных производных дробного порядка*. Москва, Наука, 2000.

[52] Samko, S. G., Kilbas, A. A., Marichev, O. I.: *Fractional integrals and derivatives. Theory and applications*. Gordon and Breach, Yverdon, 1993.

[53] Yuldashev, T. K.: *Determining of coefficients and the classical solvability of a nonlocal boundary-value problem for the Benney—Luke integro-differential equation with degenerate kernel*. J. Math. Sci. **254** (6), 793–807 (2021).

[54] Yuldashev, T. K., Abdullaev, O. Kh.: *Inverse problems for the loaded parabolic-hyperbolic equation involves Riemann–Liouville operator*, Lobachevskii J. Math. **44** (3), 1080–1090 (2023). https://doi.org/10.1134/S1995080223030034.

[55] Yuldashev, T. K., Kadirkulov, B. J.: *On a boundary value problem for a mixed type fractional differential equations with parameters*. Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan. **47** (1), 112–123 (2021).

[56] Yuldashev, T. K., Kadirkulov, B. J., Bandaliyev, R. A.: *On a mixed problem for Hilfer type fractional differential equation with degeneration*. Lobachevskii J. Math. **43** (1), 263–274 (2022).

[57] Yuldashev, T. K., Kadirkulov, B. J., Mamedov, Kh. R.: *An inverse problem for Hilfer type differential equation of higher order*. Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series. **105** (1), 136–149 (2022).

On one optimal control of a nonlinear system of fractional order in a locally convex space

T. K. Yuldashev* , B. S. Zakirov, T. F. Zhuraev, M. K. Mamanov

Abstract

This paper considers an optimal control problem for a system of nonlinear fractional-order integro-differential equations in a locally convex space. The Pontryagin function is constructed by introducing an adjoint final problem. Differentiating this function with respect to the control function yields an integral equation for the control. Using a family of seminorms defining the topology of the locally convex space, as well as uniform boundedness and Lipschitz conditions for given nonlinear mappings, the method of successive approximations is combined with the principle of contractive mappings. The existence and uniqueness of the control function and the corresponding state function are proven, as well as the continuous dependence of the state function on the initial element.

Affiliations

Yuldashev Tursun Kamaldinovich
Address: Tashkent State Transport University, Dept. of Higher Mathematics, Tashkent, Uzbekistan
V. I. Romanovskii Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan
Samarkand State University, Dept. of Math. Analysis, Samarkand, Uzbekistan
Osh State University, Dept. of Applied Mathematics and Informatics, Osh, Kyrgyzstan
e-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com
ORCID ID: https://orcid.org/0000-0002-9346-5362

Zakirov Botir Sabitovich
Address: Tashkent State Transport University, Dept. of Higher Mathematics, 100169, Tashkent, Uzbekistan
e-mail: botirzakirov@list.ru
ORCID ID: https://orcid.org/0000-0001-8381-8518

Zhuraev Tursunboy Fayzievich
Address: National Pedagogical University of Uzbekistan named after Nizami, Debt. of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan
e-mail: tursunzhuraev@mail.ru
ORCID ID: https://orcid.org/0009-0005-5379-3862

Mamanov Mukhametali Kamilzhanovich
Address: Osh State University, Dept. of Applied Mathematics and Informatics, Osh, Kyrgyzstan
e-mail: mamanovmuhametali@gmail.com
ORCID ID: https://orcid.org/0009-0006-3204-7585