Uzbekistan Journal of Mathematics and Computer Science
Volume-2, Issue-2, Page 48–56 (2026)
DOI: https://doi.org/10.56143/ujmcs.v2i2.4
Research article

Некоторые топологические свойства разности Минковского в евклидовых пространствах

Заитов Адилбек Атаханович и Нуритдинов Жалолхон Турсунбой угли*

Аннотация

В данной статье исследуются важные топологические свойства операций Минковского, а именно сохранение плотности при разности Минковского с дополнительном условии, а также, непрерывность разности Минковского на допустимом множестве.

Ключевые слова: *разность Минковского; опорные функции; компактные выпуклые множества.*

Предметная классификацие AMS (2020): *Основная: 52A30; Дополнительная: 52A20.*

1. Введение

Различные операции над подмножествами топологических векторных пространств являются важными фундаментальными исследованиями по функциональному анализу, топологии, алгебры, геометрии и других. Причиной такой степени востребованности является то, что тпологические векторные пространства возникают при совместном рассмотрении алгебраических и топологических структур на одном множестве, что позволяет изучать такие топологические понятия, как предел, непрерывность, сходимость и компактность, наряду с линейными операциями. Именно эта особенность делает топологические векторные пространства ключевым инструментом для решения задач, возникающих во многих областях математики, включая геометрию, дифференциальные уравнения, оптимальное управление, вариационное исчисление, выпуклый анализ и т. д.

Топологические векторные пространства широко исследуются во многих работах. В частности, современные источники, такие как работы В.И. Богачёв, О.Г. Смолянов [1] и Л. Наричи, Э. Беккенштейн [2], являются полезными источниками по общей теории топологических векторных пространств. В этих работах представлены определение топологического векторного пространства, требования, предъявляемые к структурам, превращающим линейное пространство в топологическое, а также важные примеры. Кроме того, рассматриваются фундаментальные понятия, такие как двойственность, топологии в сопряжённых пространствах, непрерывные отображения, теорема Хана — Банаха и бочечные пространства.

Среди алгебраических операций, определённых на множествах в топологических векторных пространствах, особое значение имеют сумма и разность Минковского, которые широко используются в выпуклом анализе, геометрической оптимизации и теории дифференциальных игр. Сумма Минковского рассматривается как основной объект во многих исследованиях, поскольку она сохраняет выпуклость, естественным образом связана с опорными функциями и обладает хорошими свойствами совместимости с топологическими характеристиками. Геометрические и аналитические свойства этой операции подробно исследованы в работах Р. Рокфеллара [3], Р. Шнайдера [4], П.Е. Двуреченского, Г.Е. Иванова [5].

Received : *25–may–2026,* ***Accepted :*** *26–september–2026*
*** Corresponding author***

В ряде недавних исследований также получены результаты, касающиеся операций Минковского. В частности, в работах [12, 13] исследуется разность Хукухары, являющаяся частным случаем разности Минковского, для компактных выпуклых множеств, а также изучаются её различные свойства. Кроме того, в работе [12] представлены результаты, касающиеся расстояния Хаусдорфа между выпуклыми множествами, которые будут использованы в последующих разделах данной статьи.

В работе [14] для компактных выпуклых множеств вводится другая обратная операция к сумме Минковского, называемая расширенной разностью множеств. Эта разность является обобщением как разности Хукухары, так и обобщённой разности Хукухары. Предлагаемая разность множеств определяется с использованием метрики Хаусдорфа. Однако, в отличие от геометрической разности Минковского, исследуемой в настоящей статье, она основана на оптимизационном подходе и гарантирует существование разности для любой пары компактных выпуклых множеств.

Разность Минковского нашла широкое применение при решении задач робототехники и автономной навигации [15], планирования движения роботов [16], оптимального управления [17] и вычислительной геометрии [18]. В настоящее время исследования в этих областях остаются весьма актуальными и продолжают привлекать значительное внимание.

2. Предварительные сведения и определения

Определение 2.1. [6] Пусть заданы непустые множества X, Y в $\mathbb{R}^n$. Геометрическая сумма и разность Минковского множеств X и Y определяются соответственно как следующие множества:

$$X + Y = \{x + y : x \in X, y \in Y\}, \qquad X \dot{-} Y = \{z \in \mathbb{R}^n : z + Y \subset X\}. \tag{2.1}$$

Определение 2.2. [6] Произведение множества X на скаляр λ определяется как следующее множество:

$$\lambda X = \{\lambda x : x \in X\}. \tag{2.2}$$

Согласно приведённому выше определению, для произвольного вектора $a \in \mathbb{R}^n$ и непустого множества $X \subset \mathbb{R}^n$ под суммой Минковского понимается

$$a + X = \{a + x : x \in X\}. \tag{2.3}$$

Непосредственно из определения следует, что разность Минковского $X \dot{-} Y$ является пересечением геометрических мест параллельных переносов множества X на векторы $d \in -Y$ [6], то есть

$$X \dot{-} Y = \bigcap_{d \in -Y} (X + d). \tag{2.4}$$

Свойства операций Минковского, геометрические методы их вычисления и различные приложения изучаются в [7], [8], [9]. В частности, в [7] предложены методы нахождения разности Минковского для всех случаев множеств, состоящих из областей, ограниченных треугольником на плоскости. В [8] метод нахождения разности Минковского обобщён на произвольные множества в пространстве.

3. Основные результаты

Методы и примеры, представленные в исследованиях по данной теме, показывают, что операции Минковского проще и эффективнее выполнять в пространствах меньшей размерности (например, в $\mathbb{R}^2$). Однако решение практических задач часто требует работы с множествами, заданными в пространствах большей размерности. В таких условиях удобно декомпозировать декартово произведение заданного множества на подмножества меньшей размерности и работать с ними. Следующее утверждение может быть доказано непосредственной проверкой.

Предложение 3.1. *Для непустых множеств A, B, C и D в $\mathbb{R}^n$ выполняется следующее равенство:*

$$(A \times B) + (C \times D) = (A + C) \times (B + D). \tag{3.1}$$

Здесь $A \times B$ обозначает декартово произведение множеств.

Равенство (3.1) можно также записать для разности Минковского. Следующее утверждение доказывает это равенство.

Предложение 3.2. *Для непустых множеств A, B, C и D в $\mathbb{R}^n$, если разности Минковского $A \dot{-} B$ и $C \dot{-} D$ непусты, то выполняется следующее равенство:*

$$(A \times C) \dot{-} (B \times D) = (A \dot{-} B) \times (C \dot{-} D). \tag{3.2}$$

Доказательство. Предположим, что $(x, y) \in (A \times C) \dot{-} (B \times D)$. Тогда по определению разности Минковского имеем $(x, y) + (B \times D) \subset (A \times C)$. Согласно предложению 3.1, для любых элементов $b \in B$ и $d \in D$ имеем $(x + b, y + d) \in (A \times C)$. Отсюда следует, что $x + b \in A$ и $y + d \in C$. Поскольку эти соотношения выполняются для всех $b \in B$ и $d \in D$, следует, что $x \in A \dot{-} B$ и $y \in C \dot{-} D$. Следовательно, $(x, y) \in (A \dot{-} B) \times (C \dot{-} D)$.

Теперь возьмём произвольный элемент $(x, y) \in (A \dot{-} B) \times (C \dot{-} D)$. По определению декартова произведения $x \in A \dot{-} B$ и $y \in C \dot{-} D$. По определению разности Минковского для любых $b \in B$ и $d \in D$ имеем $x + b \in A$ и $y + d \in C$. Из этих соотношений получаем $(x + b, y + d) \in (A \times C)$. По определению декартова произведения и предложению 3.1 имеем:

$$(x, y) + (b, d) \in (A \times C),$$

$$(x, y) + (B \times D) \subset (A \times C).$$

Второе включение влечёт $(x, y) \in (A \times C) \dot{-} (B \times D)$. Это завершает доказательство предложения 3.2. □

Понятие плотности в топологических пространствах является одним из важных понятий. Поскольку параллельный перенос множества на вектор является гомеоморфизмом, если множество A плотно в $X \subset \mathbb{R}^n$, то для любого вектора $a \in \mathbb{R}^n$ множество $a + A$ плотно в $a + X$. Учитывая, что $A \dot{-} a = A + (-a)$, следует, что если A плотно в X, то для любого вектора a множество $A \dot{-} a$ плотно в $X \dot{-} a$.

Свойство плотности не всегда сохраняется при операции разности Минковского. Следующий пример показывает, что когда A плотно в X, а B плотно в Y, разность $A \dot{-} B$ не обязательно плотна в $X \dot{-} Y$.

Пример 3.1. В $\mathbb{R}$ множество $A = (-1, 2) \setminus \{0\}$ плотно в $X = (-1, 2)$, а множество $B = (0, 1)$ плотно в $Y = (0, 1]$. Однако множество $A \dot{-} B = \{-1\} \cup [0, 1]$ не является плотным в $X \dot{-} Y = [-1, 1)$.

Таким образом, для сохранения свойства плотности требуются дополнительные условия. Предположим, что для множеств A, B, X, Y разности Минковского $A \dot{-} B$ и $X \dot{-} Y$ непусты.

Теорема 3.1. *Если множество A плотно в X, множество B плотно в Y и $\operatorname{int}((X \setminus A) + (-B)) = \emptyset$, то множество $A \dot{-} B$ плотно в $X \dot{-} Y$.*

Для доказательства этой теоремы воспользуемся следующей вспомогательной леммой.

Лемма 3.1. *Для произвольных непустых множеств $A, B, C \subset \mathbb{R}^n$ выполняется следующее соотношение:*

$$(A \dot{-} B) \setminus (C \dot{-} B) \subset (A \setminus C) + (-B) \tag{3.3}$$

Доказательство леммы 3.1. Возьмём произвольный элемент x из множества $(A \dot{-} B) \setminus (C \dot{-} B)$. Поскольку $x \in (A \dot{-} B) \setminus (C \dot{-} B)$, имеем $x \in A \dot{-} B$ и $x \notin C \dot{-} B$. По определению разности Минковского можно записать

$$x + B \subset A \tag{3.4}$$

и

$$x + B \not\subset C. \tag{3.5}$$

Из соотношения (3.5) существует некоторый $b_0 \in B$ такой, что $x + b_0 \notin C$. Однако соотношение (3.4) влечёт, что $x + b_0 \in A$. Следовательно,

$$x + b_0 \in A \setminus C. \tag{3.6}$$

Из соотношения (3.6) следует, что $x \in (A \setminus C) + (-B)$. Лемма 3.1 доказана. □

Доказательство теоремы 3.1. Согласно условиям теоремы, множество B плотно в множестве Y. Следовательно, $B \subset Y$. По свойству разности Минковского получаем

$$X \dot{-} B \supset X \dot{-} Y.$$

Следовательно,

$$(X \dot{-} Y) \setminus (A \dot{-} B) \subset (X \dot{-} B) \setminus (A \dot{-} B). \tag{3.7}$$

По лемме 3.1,

$$(X \dot{-} B) \setminus (A \dot{-} B) \subset (X \setminus A) + (-B).$$

По условиям теоремы, $\operatorname{int}\big((X \setminus A) + (-B)\big) = \varnothing$. Следовательно, множество $(X \dot{-} Y) \setminus (A \dot{-} B)$ также имеет пустую внутренность. Отсюда множество $A \dot{-} B$ плотно в множестве $X \dot{-} Y$. Это завершает доказательство теоремы 3.1. □

В пространстве $\mathbb{R}^n$ расстояние между двумя компактными выпуклыми подмножествами X и Y определяется как наименьшее значение среди всех величин r, удовлетворяющих условиям [11]

$$X \subset Y + B_r, \qquad Y \subset X + B_r,$$

где $B_r = B_r(0) = \{u \in \mathbb{R}^n : \ |u| < r\}$. Положим $\overline{B}_r(0) = \{u \in \mathbb{R}^n : \ |u| \leq r\}$

Определённое таким образом расстояние между X и Y обозначается через $h(X, Y)$. Тем самым семейство всех непустых компактных выпуклых подмножеств $\mathbb{R}^n$, обозначаемое через $cc(\mathbb{R}^n)$, образует метрическое пространство.

Лемма 3.2. *Разность Минковского $A \dot{-} B$ компактных выпуклых множеств $A, B \subset \mathbb{R}^n$ также является компактным выпуклым множеством.*

Доказательство. Согласно [11], поскольку A выпукло, следует, что $A \dot{-} B$ также выпукло. По [6] разность Минковского можно представить в виде

$$A \dot{-} B = \bigcap_{b \in -B} (A + b).$$

Поскольку сумма Минковского непрерывна, множество $A + b$ компактно для каждого $b \in -B$. По [1] всякое замкнутое подмножество компактного множества компактно. Следовательно, для любого вектора $b_0 \in -B$

$$\bigcap_{b \in -B} (A + b) \subset A + b_0.$$

Из того, что $A + b_0$ компактно, а произвольное пересечение замкнутых множеств замкнуто, следует, что разность $A \dot{-} B$ компактна. □

Определение 3.1. Опорной функцией выпуклого множества $X \subset \mathbb{R}^n$ называется функция, определяемая для вектора $p \in \mathbb{R}^n$ как

$$s_X(p) = \sup_{x \in X} \langle x, p \rangle.$$

Здесь $\langle x, p \rangle$ обозначает скалярное произведение векторов x и p.

Лемма 3.3. *Для компактных множеств $X, Y \in \mathbb{R}^n$ и числовой последовательности $\{\theta_n\}$, удовлетворяющей условиям $r > \theta_1 > \theta_2 > \cdots > \theta_n > \cdots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \theta_n = 0$, справедливо равенство*

$$\bigcup_n \left(\left(X + \bar{B}_{r-\theta_n}(0) \right) \dot{-} Y \right) = \left(X + \bigcup_n \bar{B}_{r-\theta_n}(0) \right) \dot{-} Y.$$

Доказательство. Из определения разности Минковского непосредственно следует, что справедливо соотношение

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\left(X + \bar{B}_{r-\theta_n}(0) \right) \dot{-} Y \right) \subset \left(X + \bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{B}_{r-\theta_n}(0) \right) \dot{-} Y.$$

Теперь докажем обратное соотношение. Возьмём произвольную точку

$$z \in \left(X + \bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{B}_{r-\theta_n}(0) \right) \dot{-} Y.$$

Из монотонности последовательности $\{\theta_n\}$ и её стремления к нулю следует равенство

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{B}_{r-\theta_n}(0) = B_r(0).$$

Поэтому

$$z + Y \subset X + B_r(0).$$

Из этого соотношения для каждого $y \in Y$ следует

$$\operatorname{dist}(z + y, X) < r.$$

Рассмотрим следующую функцию:

$$f : Y \to \mathbb{R}, \qquad f(y) = \operatorname{dist}(z + y, X).$$

Поскольку Y компактно, по теореме Вейерштрасса f достигает своего максимального значения. То есть существует такое $y_0 \in Y$, что

$$\max_{y\in Y} \{\operatorname{dist}(z + y, X)\} = \operatorname{dist}(z + y_0, X) = \rho.$$

Следовательно, справедливо соотношение $z + Y \subset X + \bar{B}_\rho(0)$. Так как для каждого $y \in Y$ расстояние меньше r, то $\rho < r$. Поскольку $\theta_n \to 0$, по определению предела для $\varepsilon = r - \rho > 0$ существует такое n_0, что

$$\theta_{n_0} < r - \rho.$$

Следовательно,

$$\rho < r - \theta_{n_0}.$$

В результате

$$z + Y \subset X + \bar{B}_\rho(0) \subset X + \bar{B}_{r-\theta_{n_0}}(0).$$

Таким образом,

$$z \in (X + \bar{B}_{r-\theta_{n_0}}(0)) \dot{-} Y$$

и справедливо

$$z \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\left(X + \bar{B}_{r-\theta_n}(0) \right) \dot{-} Y \right).$$

Лемма 3.3 доказана. □

Лемма 3.4. *Пусть X, $Y \subset \mathbb{R}^n$ — непустые компактные выпуклые множества, C замкнутое выпуклое множество, такие что $X = Y + C$. Тогда выполняется следующее равенство:*

$$(X + B_r(0))\dot{-}Y = (X\dot{-}Y) + B_r(0).$$

Доказательство. Чтобы установить включение $(X + B_r(0))\dot{-}Y \subset (X\dot{-}Y) + B_r(0)$, сначала докажем, что

$$(X + \overline{B}_r(0))\dot{-}Y \subset (X\dot{-}Y) + \overline{B}_r(0).$$

Здесь через $\overline{B}_r(0)$ обозначено замыкание открытого шара $B_r(0)$ в $\mathbb{R}^n$.

Предположим, что $z \in (X + \overline{B}_r(0))\dot{-}Y$. Тогда по определению разности Минковского

$$z + Y \subset X + \overline{B}_r(0). \tag{3.8}$$

Используя опорные функции, соотношение (3.8) можно записать в виде

$$\langle p, z\rangle + s_Y(p) \le s_X(p) + s_{\overline{B}_r(0)}(p). \tag{3.9}$$

Поскольку $X = Y + C$, то имеем $s_X(p) = s_Y(p) + s_C(p)$. Следовательно,

$$\langle p, z\rangle \le s_C(p) + s_{\overline{B}_r(0)}(p).$$

Тогда $z \in C + \overline{B}_r(0)$. Из [19] имеем $C = X\dot{-}Y$, и $z \in (X\dot{-}Y) + \overline{B}_r(0)$.

Таким образом,

$$(X + \overline{B}_r(0))\dot{-}Y \subset (X\dot{-}Y) + \overline{B}_r(0).$$

Теперь рассмотрим последовательность чисел θ_n, удовлетворяющую условиям

$$r > \theta_1 > \theta_2 > \cdots > \theta_n > \cdots, \qquad \lim_{n\to\infty} \theta_n = 0.$$

Очевидно,

$$\overline{B}_{r-\theta_1}(0) \subset \overline{B}_{r-\theta_2}(0) \subset \cdots \subset \overline{B}_{r-\theta_n}(0) \subset \cdots,$$

и

$$\bigcup_n \overline{B}_{r-\theta_n}(0) = B_r(0).$$

Для каждого натурального числа n

$$(X + \overline{B}_{r-\theta_n}(0))\dot{-}Y \subset (X\dot{-}Y) + \overline{B}_{r-\theta_n}(0).$$

Более того, в силу леммы 3.3, имеем

$$\bigcup_n \left(\left(X + \bar{B}_{r-\theta_n}(0)\right)\dot{-}Y\right) = \left(X + \bigcup_n \bar{B}_{r-\theta_n}(0)\right)\dot{-}Y = \left(X + B_r(0)\right)\dot{-}Y, \tag{3.10}$$

и

$$\bigcup_n \left((X\dot{-}Y) + \overline{B}_{r-\theta_n}(0)\right) = (X\dot{-}Y) + \bigcup_n \overline{B}_{r-\theta_n}(0) = (X\dot{-}Y) + B_r(0). \tag{3.11}$$

Следовательно,

$$(X + B_r(0))\dot{-}Y \subset (X\dot{-}Y) + B_r(0).$$

Обратное включение следует из свойства, сформулированного в предложении 1.1.1 работы [11]. Лемма 3.4 доказана. □

Замечание 3.1. Первое равенство в (3.10) не выполняется в общем случае. Однако, в данной ситуации оно справедливо, поскольку шары $\overline{B}_{r-\theta_n}(0)$ вложены друг в друга.

Пример 3.2. Пусть $X = [0,1]$ и $Y = [0,2]$ — выпуклые компактные множества на вещественной прямой $\mathbb{R}$, и пусть $A_n = \left\{\left[2 - \frac{1}{n}, \frac{5}{2} - \frac{1}{n}\right],\ n \in \mathbb{N}\right\}$ — семейство замкнутых интервалов. Множества, принадлежащие этому семейству, не являются вложенными. Для этих множеств выполняется соотношение $\bigcup_n \big((X + A_n)\dot{-}Y\big) \neq (X + \bigcup_n A_n)\dot{-}Y$.

Действительно, вычислим левую часть этого соотношения. Для каждого $n \in \mathbb{N}$

$$X + A_n = \left[2 - \frac{1}{n}, \frac{7}{2} - \frac{1}{n}\right].$$

Следовательно, для каждого $n \in \mathbb{N}$ разность Минковского $(X + A_n)\dot{-}Y$ пуста. Поэтому

$$\bigcup_n \big((X + A_n)\dot{-}Y\big) = \varnothing.$$

Теперь рассмотрим правую часть. Поскольку $\bigcup_n A_n = \left[1, \frac{5}{2}\right)$, получаем

$$X + \bigcup_n A_n = [0,1] + \left[1, \frac{5}{2}\right) = \left[1, \frac{7}{2}\right).$$

Следовательно,

$$\left(X + \bigcup_n A_n\right)\dot{-}Y = \left[1, \frac{7}{2}\right)\dot{-}[0,2] = \left[1, \frac{3}{2}\right].$$

Таким образом, равенство (3.10) в общем случае не выполняется.

Рассмотрим семейство

$$\mathcal{D} = \{(X,Y) \in cc(\mathbb{R}^n) \times cc(\mathbb{R}^n) : \exists C \in cc(\mathbb{R}^n),\ X = C + Y\},$$

которого будем называть допустимым множеством.

Теперь сформулируем основное достижение работы. Обычно непрерывность операции поддерживает сохранение многих топологических свойств пространств. Это демонстрирует важность данного результата.

Теорема 3.2. *Отображение*

$$\Phi\colon\ \mathcal{D} \to cc(\mathbb{R}^n), \qquad \Phi(X,\,Y) = X\dot{-}Y,$$

непрерывно относительно метрики Хаусдорфа.

Доказательство. Для произвольной пары $(X,\,Y) \in \mathcal{D}$ рассмотрим произвольную открытую окрестность разности Минковского $X\dot{-}Y \in cc(\mathbb{R}^n)$:

$$U = B_h(X\dot{-}Y, \varepsilon) = \{Z : h(Z, X\dot{-}Y) < \varepsilon\}.$$

Для окрестности пары $(X,Y) \in \mathcal{D}$:

$$V = (B_h(X,\,\varepsilon/2) \times B_h(Y,\,\varepsilon/2)) \cap \mathcal{D}.$$

Для произвольной пары $(X',\,Y') \in V$ имеем

$$h(X',\,X) < \varepsilon/2, \qquad h(Y',\,Y) < \varepsilon/2.$$

Эти соотношения можно записать в виде

$$X' \subset X + B_{\varepsilon/2}(0), \qquad X \subset X' + B_{\varepsilon/2}(0), \tag{3.12}$$

и

$$Y' \subset Y + B_{\varepsilon/2}(0), \qquad Y \subset Y' + B_{\varepsilon/2}(0). \tag{3.13}$$

Предположим, что $z \in X' \dot{-} Y'$. Тогда по определению разности Минковского $z + Y' \subset X'$. Используя соотношение (3.12), получаем

$$z + Y' \subset X + B_{\varepsilon/2}(0). \tag{3.14}$$

Прибавляя $B_{\varepsilon/2}(0)$ к обеим частям (3.14) и используя соотношение (3.13), получаем

$$z + Y \subset X + B_{\varepsilon}(0). \tag{3.15}$$

Поскольку множества X и Y компактны и выпуклы, по лемме 3.3 соотношение (3.15) можно записать в виде

$$z \in (X \dot{-} Y) + B_{\varepsilon}(0). \tag{3.16}$$

Тогда

$$X' \dot{-} Y' \subset (X \dot{-} Y) + B_{\varepsilon}(0). \tag{3.17}$$

Аналогично можно вывести, что

$$X \dot{-} Y \subset (X' \dot{-} Y') + B_{\varepsilon}(0). \tag{3.18}$$

Соотношения (3.17) и (3.18) влекут

$$h(X' \dot{-} Y', X \dot{-} Y) < \varepsilon.$$

Доказательство теоремы 3.2 завершено. □

Благодарность

Авторы благодарят рецензентов за ценные замечания, которые помогли улучшить качество данной рукописи.

Список литературы

[1] Bogachev, V.I., Smolyanov, O.G.: *Topological vector spaces and their applications*. Springer, Cham (2017).
[2] Narici, L., Beckenstein, E.: *Topological vector spaces*. 2nd ed. CRC Press, Boca Raton (2024).
[3] Rockafeller, T.: *Convex analysis*. Princeton University Press, New Jersey (1997).
[4] Schneider, R.: *Convex bodies: the Brunn–Minkowski theory*. Cambridge University Press, Cambridge (2014).
[5] Dvurechensky, P.E., Ivanov, G.E.: *Algorithms for computing Minkowski operators and their application in differential games*. Comput. Math. Math. Phys. **54** (2), 235–264 (2014). https://doi.org/10.1134/S0965542514020055
[6] Ivanov, G.E.: *Weakly convex sets and their properties*. Math. Notes **79** (1–2), 55–78 (2006). https://doi.org/10.1007/s11006-006-0005-y
[7] Nuritdinov, J.T.: *On the Minkowski difference of triangles*. Bull. Inst. Math. **4** (6), 50–57 (2021).
[8] Mamatov, M.S., Nuritdinov, J.T., Turakulov, K.S., Mamazhonov, S.M.: *Geometric properties of the Minkowski operator*. Bull. Karaganda Univ. Math. Ser. **11** (4), 127–137 (2024).
[9] Nuritdinov, J., Kakharov, S., Tashxodjayev, A.: *Application of Minkowski operator in artificial intelligence tasks*. AIP Conf. Proc. **3244** (1), 030016 (2024).
[10] Courteaux, M., Ramlot, B., Lambert, P., Van Wallendael, G.: *Lightweight implicit approximation of the Minkowski sum of an N-dimensional ellipsoid and hyperrectangle*. Mathematics **13** (8), 1326 (2025). https://doi.org/10.3390/math13081326
[11] Polovinkin, E.S., Balashov, M.V.: *Elements of convex and strongly convex analysis*. Fizmatlit, Moscow (2007).
[12] Stefanini, L., Bede, B.: *A new gH-difference for multi-dimensional convex sets and convex fuzzy sets*. Axioms **8** (2), 48 (2019). https://doi.org/10.3390/axioms8020048
[13] Putra, W., Muslikh, M.: *A review of Pompeiu–Hausdorff metric differentiability and its relation to generalized Hukuhara differentiability*. CAUCHY: J. Mat. Murni Appl. **11** (1), 696–711 (2026). https://doi.org/10.18860/cauchy.v11i1.37820
[14] Beresteanu, A., Moosavi Ramezanzadeh, B.: *Extended set difference: Inverse operation of Minkowski summation*. arXiv preprint arXiv:2412.19779 (2024). https://doi.org/10.48550/arXiv.2412.19779
[15] Chen, Y.H., Liu, S., Xiao, W., Belta, C., Otte, M.: *Control barrier functions via Minkowski operations for safe navigation among polytopic sets*. In: Proc. 64th IEEE Conf. on Decision and Control (CDC), pp. 4481–4488. IEEE (2025). https://doi.org/10.1109/CDC63700.2025.11166193
[16] Liu, S., Huang, Z., Belta, C.A.: *Iterative convex optimization with control barrier functions for obstacle avoidance among polytopes*. arXiv preprint arXiv:2603.05916 (2026). https://doi.org/10.48550/arXiv.2603.05916

[17] Zhai, Y., Yu, G., Tang, T., Han, W.: *Optimal conditions in uncertain set-valued optimization problems via second-order subdifferential involving Minkowski difference with application to zero-sum matrix games*. J. Comput. Appl. Math. **464**, 116530 (2025). https://doi.org/10.1016/j.cam.2025.116530
[18] Grzybowski, J., Stroinski, T., Urbanski, R.: *Maximal Demyanov difference*. Optimization (2025). https://doi.org/10.1080/02331934.2025.2561047
[19] Понтрягин Л. С.: *Линейные дифференциальные игры преследования*. Математический сборник. 112(154), №3(7), 307–330 (1980).

Some Topological Properties of Minkowski Difference in Euclidean Spaces

Adilbek Zaitov and Jalolxon Nuritdinov

Abstract

This article investigates some important topological properties of Minkowski operations, namely, the preservation of density under the Minkowski difference with an additional condition, as well as the continuity of the Minkowski difference on an admissible set.

Keywords

Minkowski difference; support functions; compact convex sets.

Affiliations

Zaitov Adilbek Atakhanovich
Address: Tashkent University of Architecture and Civil Engineering, Department of mathematics and natural sciences, 100194, Tashkent-Uzbekistan.
V.V.Romanovskiy Institute of Mathematics, 100174, Tashkent-Uzbekistan
e-mail: a.zaitov@taqu.uz
ORCID ID: https://orcid.org/0000-0002-2248-0442

Nuritdinov Jalolxon Tursunboy ugli
Address: Kokand State University, Department of Mathematics, 150700, Kokand-Uzbekistan.
e-mail: nuritdinovjt@gmail.com
ORCID ID: https://orcid.org/0000-0001-8288-832X