Uzbekistan Journal of Mathematics and Computer Science
Volume-2, Issue-2, Page 96–105 (2026)
DOI: https://doi.org/10.56143/ujmcs.v2i2.8
Research article

Критерии гамильтоновости нелинейных автономных систем дифференциальных уравнений

Орипов Турдикул

Аннотация

Предлагаются необходимые и достаточные условия приводимости нелинейной автономной системы дифференциальных уравнений, линейная часть которой определяется фробениусовой матрицей, к эквивалентной гамильтоновой системе. Построения основаны на переходе от линейной части системы к нормальным формам соответствующих гамильтоновых систем с последующим преобразованием полученной системы. Предлагаемая схема не требует сложных и громоздких преобразований исходной системы.

Ключевые слова: *Гамильтонова система, эквивалентность, наблюдаемость*

Предметная классификацие AMS (2020): *Primary: 34C20 ; Secondary: 37J06; 93B07.*

1. Введение и постановка задачи

В теории дифференциальных уравнений, теории динамических систем и их приложениях важную роль играют *гамильтоновы системы*, описываемые дифференциальными уравнениями вида

$$\frac{du_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial v_j}\,, \quad \frac{dv_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial u_j} \qquad (j = 1, \ldots, n)\,, \tag{1.1}$$

в которых $H(u, v, t)$ – скалярная вещественная функция переменных $u = (u_1, \ldots, u_n) \in R^n$, $v = (v_1, \ldots, v_n) \in R^n$ и $t \in R$. Функция $H(u, v, t)$ обычно предполагается дважды непрерывно дифференцируемой по u и v и непрерывной по t. Функция $H(u, v, t)$ называется *функцией Гамильтона* или *гамильтонианом* системы (1.1) (см., например, [1] - [3]).

Многие теоретические и практические задачи приводят к дифференциальным уравнениям, которые формально не являются гамильтоновыми, но которые с помощью некоторых невырожденных преобразований могут быть приведены к гамильтонову виду (1.1). В этом случае говорят, что данное дифференциальное уравнение *имеет гамильтонову структуру*. К таким дифференциальным уравнениям приводят многие задачи классической и современной механики, физики, биологии и др. (см., например, [4] - [6]). Наличие гамильтоновой структуры и, как следствие, существование у системы первых интегралов и различных типов симметрий позволяет существенно продвинуться в задаче изучения динамики системы. Вопросы о наличии гамильтоновой структуры для ряда типов дифференциальных уравнений и, соответственно, вопросы конструирования для таких уравнений эквивалентной гамильтоновой системы в различных постановках обсуждались в ряде работ (см., например, [5] - [8]). Здесь особо следует выделить исследования, в которых гамильтоновы векторные поля рассматриваются как векторные поля на симплектических многообразиях, соответствующих дифференциалу функции (см., [1, 3] и

Received : *22–april–2026,* ***Accepted :*** *16–october–2026*
**** Corresponding author***

имеющуюся там библиографию). Следует также отметить важный вклад в исследование указанных вопросов работ с использованием классических теорем Гельмгольца, позволивших, в частности, используя условия Гельмгольца, построить лагранжеву и гамильтонову формулировку для широкого класса уравнений движения динамических систем (см., например, [9]). Эффективное изучение указанных задач и, в частности, описание классов дифференциальных уравнений, имеюших гамильтонову структуру, разработка алгоритмов построения соответствующих преобразований продолжает оставаться важным и интересным направлением исследований.

В настоящей статье обсуждается вопрос о наделении гамильтоновой структурой для дифференциальных уравнений

$$z' = A_0 z + \gamma f((z, c_0)), \quad z \in R^{2n}, \tag{1.2}$$

в которой $f(y)$ – скалярная непрерывно дифференцируемая функция, A_0, γ и c_0 – это, соответственно, матрица и векторы:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & 0 & -a_{n-1} & 0 & \dots & -a_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma_2 \\ 0 \\ \gamma_4 \\ \vdots \\ 0 \\ \gamma_{2n} \end{bmatrix}, \quad c_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \tag{1.3}$$

здесь и ниже символ (z, c) обозначает скалярное произведение векторов $z, c \in R^{2n}$.

К системам вида (1.2) приводят многие задачи механики, теории управления, автоматического регулирования и др. (см., например, [5, 6]). В частности, к системам такого вида могут быть преобразованы дифференциальные уравнения

$$L\left(\frac{d}{dt}\right) y = M\left(\frac{d}{dt}\right) f(y), \tag{1.4}$$

в котором

$$L(p) = p^{2n} + a_1 p^{2n-2} + a_2 p^{2n-4} + \ldots + a_{n-1} p^2 + a_n,$$

$$M(p) = b_0 p^{2m} + b_1 p^{2m-2} + \ldots + b_{m-1} p^2 + b_m,$$

– взаимно простые многочлены ($0 \leqslant m < n$), а $f(y)$ – скалярная непрерывная функция. Уравнение (1.4) описывает (см., например, [5, 6]) динамику одноконтурной системы управления, состоящей из линейного звена с дробно-рациональной передаточной функцией $W(p) = M(p)/L(p)$ и нелинейной обратной связи с характеристикой $f(y)$. Уравнения вида (1.4) обычно называют *уравнениями Лурье*.

К системам вида (1.2) могут быть преобразованы также дифференциальные уравнения

$$z' = Bz + \gamma f((z, c_0)), \quad z \in R^{2n}, \tag{1.5}$$

в которых матрица B такова, что ее фробениусова форма (см, например, [5]) состоит из одного блока (фробениусовой клетки). Отметим в этой связи, что матрица A_0 в системе (1.2) обладает таким свойством.

В настоящей статье приводятся критери приводимости системы (1.2) к гамильтоновой форме, приводящие к эффективным алгоритмам конструирования эквивалентной гамильтоновой системы и ее гамильтониана. Рассматриваемые в настоящей статье задачи и полученные результаты примыкают к работам [10]-[14]. Новизна полученных результатов состоит, во-первых, в существенном расширении класса систем, для которых вопросы приводимости к гамильтоновой форме решаются положительно, и во-вторых, в доказательстве того факта, что полученные в указанных работах условия приводимости являются не только достаточными, но и необходимыми.

2. Вспомогательные построения

Приведем сначала необходимые для изложения основных результатов статьи вспомоготельные сведения из теории гамильтоновых систем и теории управления (см., например, [2, 5, 6]).

2.1. Гамильтоновы системы и симплектические преобразования.

Гамильтонову систему (1.1) можно представить в более компактном виде. Для этого положим

$$x = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad \nabla H(x,t) = \begin{bmatrix} H'_u \\ H'_v \end{bmatrix}.$$

Тогда система (1.1) представится в виде:

$$x' = J\nabla H(x,t), \quad x \in R^{2n}, \tag{2.1}$$

в котором

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}; \tag{2.2}$$

здесь 0 и I – нулевая и единичная $(n \times n)$ матрицы.

Рассмотрим теперь произвольную четномерную динамическую система

$$z' = F(z,t), \quad z \in R^{2n}, \tag{2.3}$$

с дважды дифференцируемой по z и непрерывной по t правой частью $F(z,t)$. Естественен вопрос об условиях, при которых эта система будет гамильтоновой. Как отмечалось выше, такие условия могут быть получены, например, на основе исследования соответствующих свойств векторных полей на симплектических многообразиях или с использованием условий Гельмгольца. В настоящей работе используется эквивалентная формулировка условий гамильтоновости, а именно, следующее утверждение.

Lemma 2.1. *Произвольная четномерная динамическая система*

$$z' = F(z,t), \quad z \in R^{2n}, \tag{2.4}$$

будет гамильтоновой есди и только если система

$$J\nabla H(z,t) = F(z,t), \quad z \in R^{2n}, \tag{2.5}$$

разрешима относительно неизвестной скалярной функции $H(z,t)$. В этом случае функция $H(z,t)$ будет гамильтонианом системы (2.4).

Система (2.5) является переопределенной: это система $2n$ уравнений с одной неизвестной функцией $H(z,t)$. Поэтому для изучения вопроса о гамильтоновости системы (2.4) может быть использован богатый арсенал теории переопределенных систем.

Линейной автономной гамильтоновой системой (ЛАГС) называют систему вида

$$\frac{dx}{dt} = JAx, \quad x \in R^{2n}, \tag{2.6}$$

в которой A – вещественная квадратная симметрическая (порядка $2n$) матрица. Гамильтониан этой системы равен

$$H(x) = \frac{1}{2}(Ax, x)$$

Ниже участвующую в системе (2.6) матрицу JA будем называть *гамильтоновой*.

Отметим следующие свойства гамильтоновой матрицы JA:

G1 если матрица JA имеет собственное значение λ, то числа $-\lambda$, $\overline{\lambda}$, $-\overline{\lambda}$ также являются собственными значениями этой матрицы, причем той же алгебраической и геометрической кратности и того же индекса;

G2 если матрица JA имеет собственное значение $\lambda = 0$, то алгебраическая кратность этого собственного значения является четным числом;

G3 характеристический многочлен матрицы JA содержат степени только четных порядков.

Уравнения Гамильтона (1.1), вообще говоря, не сохраняют свой вид при невырожденных преобразованиях. В частности, при произвольных невырожденных линейных преобразованиях линейные гамильтоновы системы (2.6), вообще говоря, теряют гамильтоновость. А именно, они сохраняют гамильтоновость только при симплектических преобразованиях. Квадратную вещественную матрицу S порядка $2n$ называют *симплектической*, если

$$S^* J S = J\,; \tag{2.7}$$

здесь S^* – транспонированная матрица, J – матрица (2.2). Симплектическая матрица, очевидно, невырождена.

Пусть S – симплектическая матрица. Тогда замена $x = Sy$ переводит ЛАГС (2.6) в ЛАГС

$$\frac{dy}{dt} = J\tilde{A}y\,, \quad y \in R^{2n}\,, \tag{2.8}$$

где $\tilde{A} = S^* A S$.

Две гамильтоновы матрицы B_1 и B_2 называют *симплектически подобными*, если существует симплектическая матрица S такая, что $B_2 = S^{-1} B_1 S$. Две ЛАГС

$$x' = JA_1x \;\; \text{и} \;\; x' = JA_2x\,, \quad x \in R^{2n}\,,$$

называют *симплектически сопряженными*, если матрицы JA_1 и JA_2 симплектически подобны.

Симплектическое подобие (и симплектическое сопряжение) является отношением эквивалентности. Поэтому все ЛАГС можно разбить на классы эквивалентных симплектически сопряженных систем. В каждом классе можно указать простейший (в естественном смысле) его представитель – так называемую *нормальную форму* этого класса.

Отметим также, что каждая гамильтонова матрица входит в один и только один класс эквивалентности симплектически подобных матриц. При этом в каждом таком классе выделяют один представитель, называемый *нормальной формой*. Вид нормальной формы определяется свойствами корневых подпространств матрицы JA. Более детально с теорией нормальных форм и, в частности, со списками нормальных форм можно познакомиться, например, в [7, 3, 15] .

Одной из специфик нормальных форм является тот факт, что данному набору собственных значений с данными кратностями могут соответствовать различные нормальные формы.

2.2. Эквивалентность динамических систем.

Рассмотрим две динамические системы типа (1.2):

$$x' = A_1x + \gamma_1 f_1((x, c_1))\,, \quad x \in R^{2n}\,, \tag{2.9}$$

$$y' = A_2y + \gamma_2 f_2((y, c_2))\,, \quad y \in R^{2n}\,, \tag{2.10}$$

в которых $f_1(u)$, $f_2(u)$ – скалярные непрерывно дифференцируемые функции, A_1 и A_2 – вещественные квадратные (порядка $2n$) матрицы, γ_1, γ_2, c_1 и c_2 – некоторые ненулевые векторы из R^{2n}.

Системы (2.9) и (2.10) назовем *эквивалентными*, если найдется невырожденная матрица Q такая, что замена $x = Qy$ преобразует систему (2.9) в систему (2.10), т.е.

$$A_2 = Q^{-1}A_1Q\,, \quad \gamma_2 = Q^{-1}\gamma_1\,, \quad c_2 = Q^*c_1\,.$$

Рассмотрим еще одну вспомогательную линейную систему

$$x' = Ax\,, \quad y = (x, c)\,. \tag{2.11}$$

Определим квадратную (порядка $2n$) матрицу

$$D = D(c) = \begin{bmatrix} c \\ A^*c \\ (A^*)^2c \\ \vdots \\ (A^*)^{2n-1}c \end{bmatrix}; \tag{2.12}$$

здесь A^* – транспонированная матрица, а векторы $c\,, A^*c\,, (A^*)^2c\,, \ldots\,, (A^*)^{2n-1}c$ рассматриваются как вектор-строки. Матрица D называется *матрицей наблюдаемости* системы (2.11). Система (2.11) называется *наблюдаемой*, если $\det D \neq 0$.

Отметим, что как показано в работе [10] для того, чтобы система (2.11) была наблюдаемой при некотором векторе c необходимо и достаточно, чтобы геометрические кратности всех собственных значений матрицы A были равны единице.

3. Основные результаты

3.1. Свойства системы (1.2).

Отметим следующие свойства системы (1.2).

1. Система (1.2) является гамильтоновой при $n = 1$. При $n \geqslant 2$ система (1.2), вообще говоря, не является гамильтоновой.

2. Характеристический многочлен матрицы A_0 – это многочлен

$$L(p) = \det(A_0 - pI) = p^{2n} + a_1p^{2n-2} + a_2p^{2n-4} + \ldots + a_{n-1}p^2 + a_n\,, \tag{3.1}$$

содержащий степени только четных порядков.

Справедливость первого свойства вытекает из леммы 2.1 и того факта, что переопределенная система

$$J\nabla H(z) = A_0z + \gamma f((z, c_0))\,, \quad z \in R^{2n}\,, \tag{3.2}$$

при $n = 1$ разрешима относительно неизвестной скалярной функции $H(z)$. Этот факт устанавливается перекрестным дифференцированием уравнений этой системы.

Перекрестное дифференцирование уравнений системы (3.2) при $n \geqslant 2$ показывает, что система (1.2) будет гамильтоновой только при выполнении некоторых дополнительных условиях типа равенств. Например, одним из необходимых условий гамильтоновости четырехмерной системы (1.2) является выполнение равенства $\gamma_2 f'(y) \equiv -1$.

Ниже будем предполагать, что в системе (1.2) имеем $n \geqslant 2$, т.е. ее размерность не меньше четырех.

3.2. Конструирования эквивалентной гамильтоновой системы

Так как определенный равенством (3.1) многочлен $L(p)$ содержит степени только четных порядков, то корни уравнения $L(p) = 0$ обладают свойствами, аналогичными свойствам G1 и G2 гамильтоновых матриц. Поэтому

многочлену $L(p)$ с данным набором корней можно поставить в соответствие одну или несколько соответствующих нормальных форм с тем же набором собственных значений.

Предлагается следующая схема конструирования для системы (1.2) эквивалентной гамильтоновой системы.

На первом этапе по корням уравнения $L(p) = 0$ определяются возможные варианты нормальных форм искомой гамильтоновой системы. Выбирается одна из соответствующих гамильтоновых матриц JA. На втором этапе задается ненулевой вектор $c \in R^{2n}$ и линейная гамильтонова система

$$\frac{dx}{dt} = JAx\,, \quad y = (x(t), c)\,. \tag{3.3}$$

Как отмечалось выше для того, чтобы система (3.3) была наблюдаемой при некотором векторе c необходимо и достаточно, чтобы геометрические кратности всех собственных значений матрицы JA были равны единице. Так как матрица A_0 в исходной системе (1.2) является фробениусовой, то матрица JA обладает указанным свойством и, следовательно, существуют векторы c, при которых система (3.3) наблюдаема.

Theorem 3.1. *Пусть система (3.3) наблюдаема, т.е. матрица наблюдаемости $D = D(c)$ невырождена. Тогда невырожденное преобразование*

$$z = D(c)x \tag{3.4}$$

приводит систему (1.2) к виду

$$\frac{dx}{dt} = JAx + D^{-1}\gamma f((x, c))\,, \quad x \in R^{2n}\,, \tag{3.5}$$

Эта теорема является развитием аналогичного утверждения, установленного в [10, 11]. В указанных работах рассматривается задача о построения эквивалентной гамильтоновой системы для уравнения Лурье (1.4). Справедливость теоремы 3.1 может быть установлена путем конструирования для системы (1.2) эквивалентного уравнения Лурье.

Системы (1.2) и (3.5) эквивалентны. Однако получаемая при замене (3.4) нелинейная система (3.5), вообще говоря, не является гамильтоновой.

Отметим, что если функция $f(y)$ является постоянной, т.е. $f'(y) \equiv 0$, то система (3.5) будет гамильтоновой. Поэтому всюду ниже будем считать, что функция $f(y)$ не является постоянной.

Напомним, что вектор c выбирался из единственного условия наблюдаемости линейной системы (3.3). Оказывается, при некоторых дополнительных условиях на вектор c нелинейная система (3.5) уже будет гамильтоновой. А именно, верно следующее основное утверждение настоящей работы.

Theorem 3.2. *Пусть линейная система (3.3) наблюдаема. Тогда нелинейная система (3.5) будет гамильтоновой если и только если при некотором вещественном α выполняется равенство*

$$\gamma = \alpha D(c)Jc\,. \tag{3.6}$$

В этом случае замена (3.4) приводит нелинейную систему (1.2) к системе (3.5), которая является гамильтоновой, при этом функция

$$H(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) + \alpha F((x, c)) \tag{3.7}$$

является ее гамильтонианом. Здесь $F(y)$ – это первообразная функции $f(y)$, т.е. $F'(y) = f(y)$.

Отметим, что в [10, 11] был получен следующий результат. А именно, в задаче о конструировании эквивалентной гамильтоновой системы для уравнения Лурье (1.4) было показано, что выполнение аналога равенства (3.6) является достаточным для гамильтоновости соответствующей системы. Справедливость достаточности утверждения теоремы 3.2 может быть установлена путем конструирования для системы (1.2) эквивалентного уравнения Лурье.

Таким образом, можно ограничится доказательством необходимости утверждения теоремы 3.2. Пусть нелинейная система (3.5) является гамильтоновой. Покажем, что тогда выполнено равенство (3.6).

Так как линейная система (3.3) также является гамильтоновой, то функцию Гамильтона $H(x)$ нелинейной системы (3.5) можно представить в виде $H(x) = H_0(x) + G(x)$, где $H_0(x)$ – функция Гамильтона линейной системы (3.3), а $G(x)$ – функция Гамильтона системы

$$\frac{dx}{dt} = D^{-1}\gamma f((x,c)), \quad x \in R^{2n}. \tag{3.8}$$

Функция $G(x)$ является решением переопределенной системы

$$J\nabla G(x) = D^{-1}\gamma f((x,c)), \quad x \in R^{2n}, \tag{3.9}$$

Для завершения доказательства теоремы остается путем перекрестного дифференцирования уравнений системы (3.9) убедиться в том, что ее разрешмость влечет выполнение равенства (3.6). Покажем это.

Для простоты ограничимся рассмотрением случая, когда рассматриваемые системы являются четырехмерными, в частности, когда система (3.9) имеет вид

$$J\nabla G(x) = D^{-1}\gamma f((x,c)), \quad x \in R^{4}. \tag{3.10}$$

Через b_1, b_2, b_3, b_4 обозначим компонеты четырехмерного вектора $D^{-1}\gamma$. Представим систему (3.10) в развернутом виде:

$$\begin{cases} G'_{x_3} = b_1 f((x,c)) \\ G'_{x_4} = b_2 f((x,c)) \\ -G'_{x_1} = b_3 f((x,c)) \\ -G'_{x_2} = b_4 f((x,c)) \end{cases},$$

где $(x,c) = x_1c_1 + x_2c_2 + x_3c_3 + x_4c_4$. Учитывая разрешимость этой системы, после перекрестного дифференцирования ее уравнений получим систему из 6 равенств (напомним, что по предположению функция $f(y)$ не является постоянной):

$$\begin{cases} b_1c_4 = b_2c_3 \\ b_1c_1 = -b_3c_3 \\ b_1c_2 = -b_4c_3 \\ b_2c_1 = -b_3c_4 \\ b_2c_2 = -b_4c_4 \\ b_3c_2 = b_4c_1 \end{cases}.$$

В действительности два равенства этой системы линейно выражаются через другие равенства. Анализ полученной системы показывает, что ее коэффициенты связаны равенствами

$$\begin{cases} b_1 = \alpha c_3 \\ b_2 = \alpha c_4 \\ b_3 = -\alpha c_1 \\ b_4 = -\alpha c_2 \end{cases},$$

где α – некоторая константа. Эти соотношения совпадают с равенством (3.6).

4. Пример: системы с двумя степенями свободы

В качестве приложения полученных результатов рассмотрим четырехмерную систему вида (1.2):

$$z' = A_0 z + \gamma f((z,c_0)), \quad z \in R^4, \tag{4.1}$$

в которой $f(y)$ – скалярная непрерывно дифференцируемая функция, A_0, γ и c_0 – это, соответственно, матрица и векторы:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -b & 0 & -a & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma_2 \\ 0 \\ \gamma_4 \end{bmatrix}, \quad c_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \tag{4.2}$$

Такие дифференциальные уравнения возникают при моделировании систем с двумя степенями свободы (см., например, [5]).

Характеристическое уравненние линейной системы $z' = A_0 z$ – это биквадратное уравнение

$$L(p) = p^4 + ap^2 + b = 0\,, \tag{4.3}$$

В зависимости от знаков коэффициентов a, b и дискриминанта $D = a^2 - 4b$ возможны следующие четыре основных случая.

S1) $a > 0\,,\ b > 0\,,\ D > 0\,.$ В этом случае корни уравнения (4.3) чисто мнимые: $\pm i\omega_1\,,\ \pm i\omega_2\,,$ где

$$\omega_1^2 = \frac{a + \sqrt{D}}{2}\,,\ \ \omega_2^2 = \frac{a - \sqrt{D}}{2}\,.$$

S2) $b > 0\,,\ D < 0\,.$ В этом случае корни уравнения (4.3) комплексные: $\pm\alpha \pm i\beta\,,$ где

$$\alpha^2 = \frac{2\sqrt{b} - a}{4}\,,\ \ \beta^2 = \frac{2\sqrt{b} + a}{4}\,.$$

S3) $a < 0\,,\ b > 0\,,\ D > 0\,.$ В этом случае корни уравнения (4.3) вещественные: $\pm\alpha_1\,,\ \pm\alpha_2\,,$ где

$$\alpha_1^2 = \frac{1}{2}(-a + \sqrt{D})\,,\ \ \alpha_2^2 = -\frac{1}{2}(a + \sqrt{D})\,.$$

S4) $b < 0\,.$ В этом случае уравнение (4.3) имеет два вещественных $\pm\alpha$ и два чисто мнимых $\pm i\omega$ корня:

$$\alpha^2 = \frac{1}{2}(-a + \sqrt{D})\,,\ \ \omega^2 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{D})\,.$$

Обсудим вопрос о конструировании для системы (4.1) эквивалентной гамильтоновой системы вида (3.5):

$$x' = JAx + \xi f(y)\,, \quad y = (x, c)\,, \quad x \in R^4\,. \tag{4.4}$$

Воспользуемся теоремами 3.1 и 3.2. При этом ограничимся обсуждением указанного вопроса для случая S1. Для случаев S2-S4 построения аналогичны.

На первом этапе определим матрицу JA в искомой системе (4.4). Определенному равенством (4.3) многочлену $L(p)$ в рассматриваемом случае S1 могут соответствоть (см., например, [15]) две различные нормальные формы JA, а именно, матрицы

$$JA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \omega_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma\omega_2 \\ -\omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma\omega_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{здесь} \quad \sigma = 1 \ \text{ или } \ \sigma = -1\,. \tag{4.5}$$

На втором этапе следует задать ненулевой вектор $c \in R^4$ так, чтобы линейная гамильтонова система

$$\frac{dx}{dt} = JAx\,, \quad y = (x(t), c)\,. \tag{4.6}$$

была наблюдаемой, т.е. ее матрица наблюдаемости $D = D(c)$ была невыродена. В качестве вектора c будем для простоты рассматривать вектор вида $c = (c_1\,, c_2\,, 0\,, 0)$ так, что $c_1c_2 \neq 0$. В этом случае матрица наблюдаемости (2.12) имеет вид:

$$D(c) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_1 c_1 & \sigma\omega_2 c_2 \\ -\omega_1^2 c_1 & -\sigma\omega_2^2 c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_1^3 c_1 & -\sigma\omega_2^3 c_2 \end{bmatrix}. \tag{4.7}$$

Тогда

$$\det D(c) = \begin{cases} -c_1^2 c_2^2 \omega_1\omega_2(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2\,, & \text{если } \sigma = 1\,, \\ c_1^2 c_2^2 \omega_1\omega_2(\omega_1^4 - \omega_2^4)\,, & \text{если } \sigma = -1\,. \end{cases}$$

и, следовательно, $\det D(c) \neq 0$ при $c_1c_2 \neq 0$ и $\omega_1 \neq \omega_2$. Таким образом, при $c_1c_2 \neq 0$ матрица $D(c)$ обратима и, следовательно, система (4.6) наблюдаема.

Остается обеспечить выполнение условий теоремы 3.2, т.е. среди векторов $c = (c_1\,, c_2\,, 0\,, 0)$, для которых $c_1c_2 \neq 0$, выбрать вектор c так, чтобы выполнялось равенство (3.6). Это равенство в рассматриваемом примере сводится к системе из двух уравнений

$$\begin{cases} \alpha(\omega_1 c_1^2 + \sigma\omega_2 c_2^2) = -\gamma_2\,, \\ \alpha(\omega_1^3 c_1^2 + \sigma\omega_2^3 c_2^2) = \gamma_4\,, \end{cases}$$

относительно неизвестных αc_1^2 и αc_2^2. Отсюда получим

$$\alpha c_1^2 = \frac{\omega_2^2\gamma_2 + \gamma_4}{\omega_1(\omega_1^2 - \omega_2^2)}\,, \quad \alpha c_2^2 = -\frac{\omega_1^2\gamma_2 + \gamma_4}{\sigma\omega_2(\omega_1^2 - \omega_2^2)}\,.$$

Будем считать, что компоненты вектора γ из (4.2) и числа ω_1 и ω_2 таковы, что $(\omega_1^2\gamma_2 + \gamma_4)(\omega_2^2\gamma_2 + \gamma_4) \neq 0$. Тогда $\alpha \neq 0$ и

$$\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 = -\sigma\frac{\omega_2}{\omega_1}\kappa\,; \quad \text{здесь } \kappa = \frac{\omega_2^2\gamma_2 + \gamma_4}{\omega_1^2\gamma_2 + \gamma_4} \neq 0\,. \tag{4.8}$$

Следовательно, уравнение (3.6) разрешимо только при $\sigma = 1$ (если $\kappa < 0$) иди только при $\sigma = -1$ (если $\kappa > 0$). Тогда вид нормальной формы (4.5) определяется однозначно: в ней следует положить $\sigma = 1$ или $\sigma = -1$ соответственно.

Таким образом, по теоремам 3.1 и 3.2 замена (3.4) (в которой $D(c)$ – матрица (4.7), а компоненты вектора $c = (c_1\,, c_2\,, 0\,, 0)$ удовлетворяют условию (4.8)), приводит систему (4.1) к эквивалентной гамильтоновой системе вида (4.4), в которой JA – матрица (4.5), а вектор ξ определяется равенством $\xi = (D(c))^{-1}\gamma$.

Список литературы

[1] Арнольд, В. И., Козлов, В.В., Нейштадт, А. И.: Математические аспекты классической и небесной механики. М.: УРСС (2002).

[2] Meyer, K., Hall, G., Offin, D. Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem // vol. 60 of Applied Mathematical Sciences. Springer, New York (2009). DOI 10.1007/978-0-387-09724-4 .

[3] Журавлев, В. Ф., Петров, Ф. Г., Шундерюк, М. М. Избранные задачи гамильтоновой механики. М.: ЛЕНАНД (2015).

[4] Маркеев, А. П. Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс. М.-Ижевск.: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Ин-т компьютерных исслед. (2009).

[5] Поляк, Б. Т., Хлебников, М. В., Рапопорт, Л. Б. Математическая теория автоматического управления. М.: ЛЕНАНД (2019).

[6] Заде, Л., Дезоер, Ч. Теория линейных систем. Метод пространства состояний. М.: Наука (1970).

[7] Брюно, А. Д.: *Нормальные формы систем Гамильтона с периодическим возмущением.* Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша, 2019. № 56. 27 с. DOI: https://doi.org/10.20948/prepr-2019-57 .

[8] Красносельский, А. М., Рачинский, Д. И.: *О гамильтоновости систем Лурье.* Автоматика и телемеханика, **8**, 25-29 (2000). http://www.mathnet.ru/rus/agreement .

[9] Ланцош, К. Вариационные принципы механики. М.: Мир (1965).

[10] Юмагулов, М. Г., Ибрагимова, Л. С.: *Эквивалентные дифференциальные уравнения в задачах теории управления и теории гамильтоновых систем.* Дифференциальные уравнения, **60**, (1), 24-40 (2024). https://doi.org/10.31857/S0374064124010038
[11] Yumagulov, M. G., Ibragimova, L. S.: *Equivalent Hamiltonian Systems for Differential Equations with Even Order Derivatives.* Lobachevskii J. Math. **45** (6), 2792-2801 (2024). https://doi.org/10.1134/S1995080224603230
[12] Yumagulov, M. G., Ibragimova, L. S., Oripov, T. S.: *Hamiltonian structures of periodic differential equations with even-order derivatives.* Lobachevskii J. Math. **46** (7), 3224-3232 (2025). https://doi.org/10.1134/S1995080225608677 .
[13] Юмагулов, М. Г., Ибрагимова, Л. С.: *Уравнение Лурье и эквивалентные гамильтоновы системы.* Автоматика и телемеханика **1**, 27-43 (2025). DOI: 10.31857/S0005231025010027 .
[14] Юмагулов, М. Г., Орипов, Т. С.: *Переопределенные системы в задачах гамильтоновой механики.* Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук **1**, 17-27 (2025).
[15] Ван, Д., Ли, Ч., Чоу, Ш. Н. Нормальные формы и бифуркации векторных полей на плоскости М.: МЦНМО (2005).

Affiliations

T. S. Oripov
Address: Denau Institute of Entrepreneurship and Pedagogy, Denau, Uzbekistan.
e-mail: oripovt@internet.ru