

О влиянии функтора мягкой симметрической степени SP^n на мягкие почти непрерывные и мягкие почти открытые отображения

Нодирбек К. Мамадалиев и Бобурмирзо М. Тошбуваев*

Аннотация

В данной статье изучается поведение мягких почти непрерывных и мягких почти открытых отображений относительно двух естественных конструкций в мягкой топологии: конечных декартовых степеней и мягких симметрических степеней. Сначала мы показываем, что как мягкая почти непрерывность, так и мягкая почти открытость сохраняются при переходе к конечным степеням, снабжённым топологией мягкого произведения. Далее рассматриваются индуцированные отображения на n -й мягкой симметрической степени SP^n , понимаемой как фактор n -кратного мягкого произведения по естественному действию симметрической группы. В отличие от классического случая, каноническая мягкая симметрическая проекция не обязана быть мягко открытой. В случае симметрической степени мы доказываем, что мягкая почти непрерывность сохраняется индуцированным отображением на SP^n . Для мягкой почти открытости получено достаточное условие на каноническое фактор-отображение со стороны области определения, обеспечивающее мягкую почти открытость индуцированного отображения на SP^n . Таким образом, для конечных степеней сохранение указанных свойств имеет безусловный характер, тогда как в случае симметрических степеней сохранение почти открытости устанавливается при явном дополнительном предположении. Полученные результаты проясняют роль фактор-конструкций в мягком случае и дополнительно демонстрируют различие между классическими и мягкими симметрическими степенями.

Ключевые слова: мягкое множество; мягкая топология; мягкая почти непрерывность; мягкая почти открытость; произведение мягких топологий; симметрическая степень.

Предметная классификация AMS (2020): Основная: 54C08; Дополнительная: 54B10, 54A40.

1. Введение

Теория мягких множеств, введённая Молодцовым [1], предоставляет гибкую параметризованную основу для работы с неопределённостью и привела к развитию мягких аналогов многих классических математических структур. В частности, были предложены и исследованы различные подходы к мягкой топологии и мягким топологическим структурам; см., например, [3, 4, 5, 6]. Более поздние работы существенно расширили данную теорию за счёт уточнённых условий непрерывности, новых аксиом отделимости, структур кластерного типа и операторных подходов в мягкой топологии; см., например, [11, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22].

Среди ослабленных понятий типа непрерывности особый интерес представляет *мягкая почти непрерывность*, поскольку она формулируется с помощью операторов мягкой внутренности и мягкого замыкания и, следовательно, чувствительна к явлениям регуляризации в мягких топологических пространствах [7, 12, 13]. В аналогичном направлении можно рассматривать *мягко почти открытые отображения*, определяемые требованием, чтобы образы регулярно открытых мягких множеств были мягко открытыми. Такой подход естественным образом связывает почти открытость с полурегулярностью и структурой регулярно открытых множеств [8, 11, 19]. Эти понятия естественно вписываются в более широкое исследование поведения свойств типа непрерывности при переходе от классической топологии к мягкой постановке.

Целью настоящей статьи является исследование устойчивости мягко почти непрерывных и мягко почти открытых отображений относительно двух естественных конструкций в мягкой топологии: конечных декартовых степеней и мягких симметрических степеней. Случай конечных степеней является сравнительно регулярным: мы доказываем, что как мягкая почти непрерывность, так и мягкая почти открытость сохраняются при переходе к конечным степеням, снабжённым топологией мягкого произведения. Затем мы переходим к конструкции мягкой симметрической степени SP^n , рассматриваемой как фактор n -кратного мягкого произведения по естественному действию симметрической группы, и изучаем индуцированные отображения на SP^n . Классические симметрические произведения и связанные с ними топологические конструкции широко изучались в общей топологии и теории гиперпространств [9, 10, 23, 25], в то время как родственные фактор-конструкции перестановочного типа также исследовались в недавних работах [16]. Кроме того, категориальная и функториальная точки зрения задают более широкий концептуальный фон для таких конструкций [24].

Ключевой момент состоит в том, что мягкая постановка существенно отличается от классической. В классической топологии каноническая проекция на симметрическую степень является открытой, тогда как в мягкой постановке соответствующая каноническая мягкая проекция не обязана быть мягко открытой. Таким образом, открытость канонического фактор-отображения уже не является автоматическим свойством и становится действительно мягко-топологической проблемой. В частности, приведённые в данной статье примеры показывают, что в зависимости от исходной мягкой структуры и множества параметров каноническая мягкая симметрическая проекция может быть мягко открытой, а может и не обладать этим свойством. Это явление не имеет прямого аналога в классической теории симметрических степеней и подчёркивает существенное различие между классическими и мягкими симметрическими степенями.

По этой причине результаты о сохранении свойств в части статьи, посвящённой симметрическим степеням, должны формулироваться с осторожностью. Мы показываем, что мягкая почти непрерывность сохраняется индуцированным отображением на SP^n . Для мягкой почти открытости доказывается условный результат о сохранении при дополнительном предположении на каноническое фактор-отображение со стороны области определения. Точнее, это предположение гарантирует, что регулярно открытые мягкие множества в факторной мягкой симметрической степени поднимаются до регулярно открытых мягких множеств в соответствующем пространстве мягкого произведения. Мы используем это условие как достаточное в доказательстве, но не утверждаем, что оно является необходимым.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 приводятся необходимые предварительные сведения о мягких множествах, мягких топологических пространствах и отображениях почти-типа. Раздел 3 посвящён результатам о сохранении свойств для конечных степеней, снабжённых топологией мягкого произведения. В разделе 4 вводятся мягкие симметрические степени, обсуждается поведение канонического мягкого фактор-отображения, описывается функториальный аспект конструкции и исследуются соответствующие индуцированные отображения.

2. Предварительные сведения

Всюду далее X обозначает универсальное множество, а E — фиксированное множество параметров. Отображение $F: E \rightarrow \mathcal{P}(X)$ называется *мягким множеством* над X относительно E и обозначается через F_E [1, 2]. Пара (X, E) называется *мягким классом* [6]. Для $e \in E$ значение $F(e) \subseteq X$ называется *e-приближением* мягкого множества F_E [1].

Мягкое множество F_E называется *нулевым мягким множеством*, если $F(e) = \emptyset$ для всех $e \in E$, и *абсолютным мягким множеством*, если $F(e) = X$ для всех $e \in E$; они обозначаются соответственно через Φ_E и $\tilde{X}_E$ [1, 2, 3]. Для мягких множеств F_E и G_E , заданных над одним и тем же универсальным множеством X и одним и тем же множеством параметров E , их объединение и пересечение определяются покоординатно по параметрам [1, 3]:

$$(F_E \sqcup G_E)(e) = F(e) \cup G(e), \quad (F_E \sqcap G_E)(e) = F(e) \cap G(e), \quad e \in E.$$

Произвольные объединения и конечные пересечения мягких множеств определяются аналогичным образом. Дополнением мягкого множества F_E называется мягкое множество F_E^c , заданное равенством

$$F_E^c(e) = X \setminus F(e), \quad e \in E$$

[1, 3].

Определение 2.1. [4] *Мягким топологическим пространством* называется тройка (X, τ, E) , где τ является семейством мягких множеств над X , удовлетворяющим следующим условиям:

1. Φ_E и $\tilde{X}_E$ принадлежат τ ;
2. объединение любого семейства элементов из τ принадлежит τ ;
3. пересечение конечного числа элементов из τ принадлежит τ .

Элементы семейства τ называются *мягко открытыми множествами*, а мягко замкнутыми множествами называются дополнения мягко открытых множеств (см. также [5]).

Определение 2.2. [5, 6] Пусть X — универсальное множество, а E — множество параметров. Для $x \in X$ и $e \in E$ мягкое множество (x_e, E) над X называется *мягкой точкой*, если

$$x_e(e) = \{x\}, \quad x_e(e') = \emptyset \quad \text{для всех } e' \in E, \quad e' \neq e.$$

Определение 2.3. [5] Пусть (X, τ, E) — мягкое топологическое пространство. Мягкое множество (N, E) называется *мягкой окрестностью* мягкой точки x_e , если существует мягко открытое множество $(U, E) \in \tau$ такое, что

$$x_e \in (U, E) \sqsubseteq (N, E).$$

Определение 2.4. [4, 5] Пусть (X, τ, E) — мягкое топологическое пространство, и пусть (F, E) — мягкое множество над X . *Мягкой внутренностью* множества (F, E) называется мягкое множество $\text{Int}(F, E)$, определяемое равенством

$$\text{Int}(F, E) = \sqcup \{(U, E) \in \tau : (U, E) \sqsubseteq (F, E)\}.$$

Мягким замыканием множества (F, E) называется мягкое множество $\text{Cl}(F, E)$, определяемое равенством

$$\text{Cl}(F, E) = \sqcap \{(C, E) : (C, E) \text{ является мягко замкнутым и } (F, E) \sqsubseteq (C, E)\}.$$

Определение 2.5. [8] Пусть (X, τ, E) — мягкое топологическое пространство, и пусть (F, E) — мягкое множество над X .

1. Мягкое множество (F, E) называется *регулярно открытым мягким множеством*, если

$$(F, E) = \text{Int} (\text{Cl}(F, E)).$$

2. Мягкое множество (F, E) называется *регулярно замкнутым мягким множеством*, если

$$(F, E) = \text{Cl} (\text{Int}(F, E)).$$

(Сравните с классическим понятием регулярно открытых/замкнутых множеств в [9].)

Определение 2.6. [7, 8] Мягкое топологическое пространство (X, τ, E) называется *мягко полурегулярным*, если для каждого мягко открытого множества $(F, E) \in \tau$ и каждой мягкой точки $x_e \in (F, E)$ существует мягко открытое множество $(G, E) \in \tau$ такое, что

$$x_e \in (G, E) \subseteq \text{Int} (\text{Cl}(G, E)) \subseteq (F, E).$$

Эквивалентно, семейство всех регулярно открытых мягких множеств образует мягкую базу топологии τ .

Обозначим через $S(X, E)$ семейство всех мягких множеств над X относительно E .

Определение 2.7. [6] Для заданных мягких пространств (X, τ, E) и (Y, ν, K) мягким отображением называется пара $f_\varphi : (X, \tau, E) \rightarrow (Y, \nu, K)$, где $f : X \rightarrow Y$ и $\varphi : E \rightarrow K$ — отображения. Для $(F, E) \in S(X, E)$ и $(G, K) \in S(Y, K)$ положим

$$\begin{aligned} f_\varphi(F, E) &= (H, K), & H(k) &= f\left(\bigcup_{\varphi(e)=k} F(e)\right), \\ f_\varphi^{-1}(G, K) &= (H', E), & H'(e) &= f^{-1}(G(\varphi(e))). \end{aligned}$$

Мягкое отображение f_φ называется *мягко сюръективным*, если отображения f и φ являются сюръективными, что эквивалентно равенству $f_\varphi(\tilde{X}_E) = \tilde{Y}_K$. О современных результатах, связанных с мягкими отображениями типа непрерывности, см. [12, 13].

Определение 2.8. [6] Пусть (X, τ, E) и (Y, ν, K) — мягкие топологические пространства, и пусть

$$f_\varphi : (X, \tau, E) \rightarrow (Y, \nu, K)$$

— мягкое отображение. Будем говорить, что f_φ является *мягко открытым*, если для каждого мягко открытого множества $(U, E) \in \tau$ его образ

$$f_\varphi(U, E)$$

является мягко открытым множеством в (Y, ν, K) .

Таким образом, мягкую почти открытость можно рассматривать как ослабление мягкой открытости, при котором открытость требуется только для образов регулярно открытых мягких множеств.

Определение 2.9. [7] Пусть (X, τ, E) и (Y, τ', E') — мягкие топологические пространства, и пусть

$$f_\varphi : (X, \tau, E) \longrightarrow (Y, \tau', E')$$

— мягкое отображение. Отображение f_φ называется *мягко почти непрерывным*, если для каждой мягкой точки x_e и для каждого мягко открытого множества $(V, E') \in \tau'$ такого, что

$$f_\varphi(x_e) \in (V, E'),$$

существует мягко открытое множество $(U, E) \in \tau$ такое, что

$$x_e \in (U, E) \quad \text{и} \quad f_\varphi(U, E) \subseteq \text{Int} (\text{Cl}(V, E')).$$

Определение 2.10. [7] Пусть (X, τ, E) и (Y, ϑ, K) — мягкие топологические пространства, и пусть

$$f_\varphi: (X, \tau, E) \longrightarrow (Y, \vartheta, K)$$

— мягкое отображение. Будем говорить, что f_φ является *мягко почти открытым*, если для каждого регулярно открытого мягкого множества (F, E) в X образ $f_\varphi(F, E)$ является мягко открытым множеством в Y .

3. Пространство мягкого произведения

Пусть $\{(X_\alpha, E_\alpha) : \alpha \in \Delta\}$ — семейство мягких классов [4]. Для мягких множеств F_α, E_α над X_α их декартовым произведением называется мягкое множество

$$\left(\prod_{\alpha \in \Delta} F_\alpha\right)_{\prod_{\alpha \in \Delta} E_\alpha} \quad \text{над} \quad \prod_{\alpha \in \Delta} X_\alpha,$$

определяемое равенством

$$\left(\prod_{\alpha \in \Delta} F_\alpha\right)((e_\alpha)_{\alpha \in \Delta}) = \prod_{\alpha \in \Delta} F_\alpha(e_\alpha), \quad (e_\alpha)_{\alpha \in \Delta} \in \prod_{\alpha \in \Delta} E_\alpha.$$

Определение 3.1. [4] Начальная мягкая топология на X , порождённая семейством мягких проекций

$$(p_\alpha)_{q_\alpha}: (X, E) \rightarrow (X_\alpha, E_\alpha), \quad \alpha \in \Delta,$$

где

$$p_\alpha((x_\beta)_{\beta \in \Delta}) = x_\alpha, \quad q_\alpha((e_\beta)_{\beta \in \Delta}) = e_\alpha,$$

называется *топологией мягкого произведения* на X .

Лемма 3.1. Если (X, τ, E) является мягко полурегулярным пространством, то для каждого $n \in \mathbb{N}$ пространство мягкого произведения (X^n, τ^n, E^n) является мягко полурегулярным.

Доказательство. Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$. Пусть $(U, E^n) \in \tau^n$ — мягко открытое множество, и пусть $((x_1, \dots, x_n)_{(e_1, \dots, e_n)}) \in (U, E^n)$ — мягкая точка. По определению топологии мягкого произведения существует базисный мягко открытый прямоугольник [4]

$$(B, E^n) = \prod_{i=1}^n (U_i, E) \quad \text{такой, что} \quad ((x_1, \dots, x_n)_{(e_1, \dots, e_n)}) \in (B, E^n) \subseteq (U, E^n),$$

где каждое $(U_i, E) \in \tau$ и $(x_i)_{e_i} \in (U_i, E)$. Так как (X, τ, E) является мягко полурегулярным пространством, то для каждого i существует регулярно открытое мягкое множество (R_i, E) такое, что

$$(x_i)_{e_i} \in (R_i, E) \subseteq (U_i, E).$$

Положим

$$(R, E^n) = \prod_{i=1}^n (R_i, E).$$

Тогда (R, E^n) является базисным мягко открытым прямоугольником, причём

$$((x_1, \dots, x_n)_{(e_1, \dots, e_n)}) \in (R, E^n) \subseteq (B, E^n) \subseteq (U, E^n).$$

Остаётся заметить, что (R, E^n) является регулярно открытым мягким множеством в (X^n, τ^n, E^n) . Действительно, используя стандартные тождества для конечных произведений, справедливые покоординатно по параметрам:

$$\text{Cl} \left(\prod_{i=1}^n (A_i, E) \right) = \prod_{i=1}^n \text{Cl}(A_i, E), \quad \text{Int} \left(\prod_{i=1}^n (A_i, E) \right) = \prod_{i=1}^n \text{Int}(A_i, E),$$

получаем

$$\text{Int} \left(\text{Cl}(R, E^n) \right) = \text{Int} \left(\prod_{i=1}^n \text{Cl}(R_i, E) \right) = \prod_{i=1}^n \text{Int} \left(\text{Cl}(R_i, E) \right) = \prod_{i=1}^n (R_i, E) = (R, E^n).$$

Следовательно, (R, E^n) является регулярно открытым мягким множеством, и семейство регулярно открытых мягких множеств образует мягкую базу топологии τ^n . Поэтому (X^n, τ^n, E^n) является мягко полурегулярным пространством. $\square$

Предложение 3.1. Пусть $f_\varphi: (X, \tau, E) \rightarrow (Y, \vartheta, K)$ — мягко почти непрерывное отображение. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ индуцированное отображение

$$(\Pi^n f)_{\Pi^n \varphi}: (X^n, \tau^n, E^n) \longrightarrow (Y^n, \vartheta^n, K^n)$$

является мягко почти непрерывным.

Доказательство. Пусть $((x_1, \dots, x_n)_{(e_1, \dots, e_n)})$ — произвольная мягкая точка пространства X^n , и пусть (V, K^n) — мягко открытое множество в (Y^n, ϑ^n, K^n) такое, что

$$(\Pi^n f)_{\Pi^n \varphi}((x_1, \dots, x_n)_{(e_1, \dots, e_n)}) \in (V, K^n).$$

Поскольку ϑ^n является топологией мягкого произведения, существует базисное мягко открытое множество

$$(B, K^n) = \prod_{i=1}^n (V_i, K)$$

такое, что

$$(\Pi^n f)_{\Pi^n \varphi}((x_1, \dots, x_n)_{(e_1, \dots, e_n)}) \in (B, K^n) \subseteq (V, K^n).$$

Для каждого $i = 1, \dots, n$, так как f_φ является мягко почти непрерывным в точке $(x_i)_{e_i}$, существует мягко открытое множество $(U_i, E) \in \tau$ такое, что

$$x_i \in (U_i, E) \quad \text{и} \quad f_\varphi(U_i, E) \subseteq \text{Int} \left(\text{Cl}(V_i, K) \right).$$

Положим $(U, E^n) = \prod_{i=1}^n (U_i, E)$. Тогда (U, E^n) является мягко открытым множеством в (X^n, τ^n, E^n) и содержит выбранную мягкую точку. Кроме того,

$$(\Pi^n f)_{\Pi^n \varphi}(U, E^n) = \prod_{i=1}^n f_\varphi(U_i, E) \subseteq \prod_{i=1}^n \text{Int} \left(\text{Cl}(V_i, K) \right).$$

Так как для конечных произведений (см., например, [9, Chapter 2, Propositions 3.3.10 and 3.3.12])

$$\text{Int} \left(\prod_{i=1}^n W_i \right) = \prod_{i=1}^n \text{Int}(W_i), \quad \text{Cl} \left(\prod_{i=1}^n V_i \right) = \prod_{i=1}^n \text{Cl}(V_i),$$

получаем

$$(\Pi^n f)_{\Pi^n \varphi}(U, E^n) \subseteq \text{Int} \left(\text{Cl} \left(\prod_{i=1}^n (V_i, K) \right) \right) = \text{Int} \left(\text{Cl}(B, K^n) \right).$$

Поскольку $(B, K^n) \subseteq (V, K^n)$, отсюда следует, что

$$(\Pi^n f)_{\Pi^n \varphi}(U, E^n) \subseteq \text{Int} \left(\text{Cl}(V, K^n) \right).$$

Следовательно, $(\Pi^n f)_{\Pi^n \varphi}$ является мягко почти непрерывным в выбранной мягкой точке. Так как точка была произвольной, отображение является мягко почти непрерывным на X^n . $\square$

Далее докажем, что конечные степени также сохраняют мягкую почти открытость.

Теорема 3.1. Пусть $f_\varphi: (X, \tau, E) \rightarrow (Y, \vartheta, K)$ — мягко почти открытое отображение. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ индуцированное отображение

$$(\Pi^n f)_{\Pi^n \varphi}: (X^n, \tau^n, E^n) \longrightarrow (Y^n, \vartheta^n, K^n), \quad (\Pi^n f)(x_1, \dots, x_n) = (f(x_1), \dots, f(x_n)),$$

$$(\Pi^n \varphi)(e_1, \dots, e_n) = (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)),$$

является мягко почти открытым, т.е. переводит регулярно открытые мягкие множества пространства X^n в мягко открытые множества пространства Y^n .

Доказательство. Используем следующую характеристику (см., например, [7, Theorem 4.4]): мягкое отображение g является мягко почти открытым тогда и только тогда, когда

$$g^{-1}(\text{Cl}(V)) \subseteq \text{Cl}(g^{-1}(V)) \quad \text{для каждого мягко открытого множества } (V, \cdot) \text{ в кодоме.} \quad (*)$$

Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$ и положим $G = (\Pi^n f)_{\Pi^n \varphi}$. Пусть $(V, K^n) \in \vartheta^n$ — произвольное мягко открытое множество в (Y^n, ϑ^n, K^n) . Так как семейство базисных мягко открытых прямоугольников образует базу для ϑ^n , проверим (*) на базисных прямоугольниках, а затем распространим включение на произвольные мягко открытые множества в топологии произведения.

$$(B, K^n) = \prod_{i=1}^n (V_i, K) \subseteq (Y^n, \vartheta^n, K^n), \quad (V_i, K) \in \vartheta.$$

Сначала заметим, что

$$G^{-1}(B, K^n) = \prod_{i=1}^n f_\varphi^{-1}(V_i, K).$$

Используя стандартное тождество для замыкания конечных произведений, справедливое по координатам по параметрам,

$$\text{Cl}\left(\prod_{i=1}^n (A_i, E)\right) = \prod_{i=1}^n \text{Cl}(A_i, E),$$

получаем

$$\text{Cl}(G^{-1}(B, K^n)) = \text{Cl}\left(\prod_{i=1}^n f_\varphi^{-1}(V_i, K)\right) = \prod_{i=1}^n \text{Cl}(f_\varphi^{-1}(V_i, K)).$$

С другой стороны,

$$\text{Cl}(B, K^n) = \text{Cl}\left(\prod_{i=1}^n (V_i, K)\right) = \prod_{i=1}^n \text{Cl}(V_i, K),$$

следовательно,

$$G^{-1}(\text{Cl}(B, K^n)) = G^{-1}\left(\prod_{i=1}^n \text{Cl}(V_i, K)\right) = \prod_{i=1}^n f_\varphi^{-1}(\text{Cl}(V_i, K)).$$

Так как f_φ является мягко почти открытым, то по (*) для каждого i имеем:

$$f_\varphi^{-1}(\text{Cl}(V_i, K)) \subseteq \text{Cl}(f_\varphi^{-1}(V_i, K)).$$

Переходя к произведениям по $i = 1, \dots, n$, получаем

$$G^{-1}(\text{Cl}(B, K^n)) = \prod_{i=1}^n f_\varphi^{-1}(\text{Cl}(V_i, K)) \subseteq \prod_{i=1}^n \text{Cl}(f_\varphi^{-1}(V_i, K)) = \text{Cl}(G^{-1}(B, K^n)).$$

Таким образом, (*) выполняется для каждого базисного мягко открытого прямоугольника, а значит, и для каждого мягко открытого множества в ϑ^n . Следовательно, G является мягко почти открытым. $\square$

4. Мягкая симметрическая степень

Теперь напомним конструкцию n -й симметрической степени мягкого топологического пространства.

Пусть (X, τ, E) — мягкое топологическое пространство. Симметрическая группа S_n действует на декартовой степени X^n перестановкой координат:

$$\sigma \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}), \quad \sigma \in S_n.$$

Это действие индуцирует отношение эквивалентности $\sim$ на X^n , определяемое следующим образом:

$$(x_1, \dots, x_n) \sim (y_1, \dots, y_n) \iff \exists \sigma \in S_n \text{ такая, что } (y_1, \dots, y_n) = \sigma \cdot (x_1, \dots, x_n).$$

Таким образом, две точки пространства X^n эквивалентны тогда и только тогда, когда одна из них получается из другой перестановкой координат.

n -й симметрической степенью пространства X называется фактор-множество

$$SP^n X := X^n / S_n,$$

элементами которого являются неупорядоченные n -ки, то есть мультимножества точек пространства X . Класс эквивалентности элемента $(x_1, \dots, x_n)$ обозначается через

$$[(x_1, \dots, x_n)].$$

На уровне параметров симметрическая группа аналогичным образом действует на E^n , и мы полагаем

$$SP^n E := E^n / S_n.$$

Пусть

$$\pi_\rho: (X^n, \tau^n, E^n) \longrightarrow (SP^n X, SP^n \tau, SP^n E)$$

— каноническая мягкая проекция, определяемая равенствами

$$\pi(x_1, \dots, x_n) = [(x_1, \dots, x_n)], \quad \rho(e_1, \dots, e_n) = [(e_1, \dots, e_n)].$$

Мягкая симметрическая топология $SP^n \tau$ на $SP^n X$ определяется как факторная мягкая топология, индуцированная топологией мягкого произведения τ^n посредством отображения π_ρ . То есть

$$(H, SP^n E) \in SP^n \tau \iff (\pi_\rho)^{-1}(H, SP^n E) \in \tau^n.$$

Тройка

$$(SP^n X, SP^n \tau, SP^n E)$$

называется n -й симметрической степенью мягкого пространства (X, τ, E) .

В классической топологии каноническая проекция

$$\pi: (X^n, \tau^n) \rightarrow (SP^n X, SP^n \tau)$$

является открытым отображением. Однако в мягкой постановке это свойство не обязательно выполняется, что приводит к существенным различиям между классическими и мягкими симметрическими степенями.

Example 4.1. Пусть $X = \{a, b\}$, $E = \{e_1, e_2\}$, и пусть

$$\tau = \{\Phi_E, \tilde{X}_E, F_E\}, \quad F(e_1) = \{a\}, \quad F(e_2) = \{b\}.$$

Рассмотрим топологию мягкого произведения τ^2 на X^2 . Мягкая база задаётся следующим семейством:

$$\mathcal{B} = \{ F_E \times F_E, F_E \times \tilde{X}_E, \tilde{X}_E \times F_E, \tilde{X}_E \times \tilde{X}_E \}.$$

Покажем, что каноническая мягкая проекция

$$\pi_\rho: (X^2, \tau^2, E^2) \longrightarrow (SP^2X, SP^2\tau, SP^2E)$$

не является мягко открытым отображением. Предположим противное, что она является мягко открытым отображением. Тогда

$$\pi_\rho(F_E \times F_E)$$

должно быть мягко открытым множеством в $(SP^2X, SP^2\tau, SP^2E)$. Следовательно, по определению факторной мягкой топологии

$$(\pi_\rho)^{-1}(\pi_\rho(F_E \times F_E))$$

должно быть мягко открытым множеством в (X^2, τ^2, E^2) .

Однако непосредственное вычисление показывает, что

$$(\pi_\rho)^{-1}(\pi_\rho(F_E \times F_E))(e_1, e_1) = \{(a, a)\},$$

$$(\pi_\rho)^{-1}(\pi_\rho(F_E \times F_E))(e_1, e_2) = (\pi_\rho)^{-1}(\pi_\rho(F_E \times F_E))(e_2, e_1) = \{(a, b), (b, a)\},$$

$$(\pi_\rho)^{-1}(\pi_\rho(F_E \times F_E))(e_2, e_2) = \{(b, b)\}.$$

Это мягкое множество не принадлежит τ^2 , поскольку оно не является объединением элементов семейства $\mathcal{B}$. Полученное противоречие доказывает, что π_ρ не является мягко открытым отображением.

Example 4.2. Пусть $X = \{a, b\}$, $E = \{e_1, e_2\}$, и пусть

$$\tau = \{\Phi_E, \tilde{X}_E, G_E\}, \quad G(e_1) = G(e_2) = \{a\}.$$

Рассмотрим каноническую мягкую проекцию

$$\pi_\rho: (X^2, \tau^2, E^2) \longrightarrow (SP^2X, SP^2\tau, SP^2E).$$

Утверждаем, что π_ρ является мягко открытым отображением. Действительно, достаточно проверить это на базисных мягко открытых множествах

$$G_E \times G_E, \quad G_E \times \tilde{X}_E, \quad \tilde{X}_E \times G_E, \quad \tilde{X}_E \times \tilde{X}_E.$$

Их насыщения относительно π_ρ имеют вид

$$(\pi_\rho)^{-1}(\pi_\rho(G_E \times G_E)) = G_E \times G_E,$$

$$(\pi_\rho)^{-1}(\pi_\rho(G_E \times \tilde{X}_E)) = (\pi_\rho)^{-1}(\pi_\rho(\tilde{X}_E \times G_E)) = (G_E \times \tilde{X}_E) \sqcup (\tilde{X}_E \times G_E),$$

$$(\pi_\rho)^{-1}(\pi_\rho(\tilde{X}_E \times \tilde{X}_E)) = \tilde{X}_E \times \tilde{X}_E.$$

Все эти мягкие множества являются мягко открытыми в (X^2, τ^2, E^2) . Следовательно, по определению факторной мягкой топологии π_ρ является мягко открытым отображением.

Приведённые выше примеры показывают, что поведение канонической симметрической проекции в мягкой постановке существенно отличается от её поведения в классической топологии. В классическом случае каноническая проекция на симметрическую степень всегда является открытым отображением, тогда как в мягкой постановке соответствующая каноническая мягкая проекция может не быть мягко открытой. С другой стороны, приведённый выше положительный пример показывает, что мягкая открытость всё же может выполняться для некоторых мягких топологических структур. Таким образом, в отличие от классической ситуации, открытость канонической мягкой симметрической проекции не является автоматическим свойством; напротив, она существенно зависит от исходной мягкой структуры и множества параметров.

Определение 4.1. Пусть $f_\varphi: (X, \tau, E) \rightarrow (Y, \vartheta, K)$ — мягкое отображение. Для $n \in \mathbb{N}$ определим

$$SP^n f([x_1, \dots, x_n]) := [f(x_1), \dots, f(x_n)],$$

и

$$SP^n \varphi([e_1, \dots, e_n]) := [\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)].$$

Тогда $(SP^n f)_{SP^n \varphi}$ называется индуцированным мягким отображением на n -й мягкой симметрической степени.

Мы работаем в категории **SoftTop**, объектами которой являются мягкие топологические пространства (X, τ, E) , а морфизмами — мягко непрерывные отображения

$$f_\varphi: (X, \tau, E) \rightarrow (Y, \vartheta, K).$$

В рамках этой категории далее зафиксируем функториальный характер конструкции мягкой симметрической степени.

Предложение 4.1. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ соответствие

$$(X, \tau, E) \mapsto (SP^n X, SP^n \tau, SP^n E), \quad f_\varphi \mapsto (SP^n f)_{SP^n \varphi},$$

задаёт эндифунктор на категории **SoftTop**. В частности:

1. $(SP^n f)_{SP^n \varphi}$ корректно определено;
2. $SP^n(\text{id}_X) = \text{id}_{SP^n X}$, $SP^n(\text{id}_E) = \text{id}_{SP^n E}$;
3. для композиционно согласованных мягко непрерывных отображений

$$f_\varphi: (X, \tau, E) \rightarrow (Y, \vartheta, K), \quad g_\psi: (Y, \vartheta, K) \rightarrow (Z, \eta, L),$$

имеют место равенства

$$SP^n(g \circ f) = SP^n(g) \circ SP^n(f), \quad SP^n(\psi \circ \varphi) = SP^n\psi \circ SP^n\varphi.$$

Теорема 4.1. Пусть $f_\varphi: (X, \tau, E) \rightarrow (Y, \vartheta, K)$ — мягко почти непрерывное отображение. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ индуцированное отображение

$$(SP^n f)_{SP^n \varphi}: (SP^n X, SP^n \tau, SP^n E) \longrightarrow (SP^n Y, SP^n \vartheta, SP^n K)$$

является мягко почти непрерывным.

Доказательство. Пусть

$$(\pi_X)_{\rho_X}: (X^n, \tau^n, E^n) \rightarrow (SP^n X, SP^n \tau, SP^n E), \quad (\pi_Y)_{\rho_Y}: (Y^n, \vartheta^n, K^n) \rightarrow (SP^n Y, SP^n \vartheta, SP^n K)$$

— канонические мягкие фактор-отображения. Зафиксируем мягкую точку

$$([x_1, \dots, x_n])_{[e_1, \dots, e_n]} \in SP^n X$$

и пусть $(V, SP^n K) \in SP^n \vartheta$ — мягко открытое множество такое, что

$$(SP^n f)_{SP^n \varphi}([x_1, \dots, x_n]_{[e_1, \dots, e_n]}) \in (V, SP^n K).$$

Положим

$$(W, K^n) := (\pi_Y)_{\rho_Y}^{-1}(V, SP^n K).$$

Тогда (W, K^n) является мягко открытым насыщенным множеством в (Y^n, ϑ^n, K^n) , и

$$(\Pi^n f)_{\Pi^n \varphi}((x_1, \dots, x_n)_{(e_1, \dots, e_n)}) \in (W, K^n).$$

По предложению 3.1 отображение

$$(\Pi^n f)_{\Pi^n \varphi}: (X^n, \tau^n, E^n) \rightarrow (Y^n, \vartheta^n, K^n)$$

является мягко почти непрерывным. Следовательно, существует мягко открытое множество $(U, E^n) \in \tau^n$ такое, что

$$(x_1, \dots, x_n)_{(e_1, \dots, e_n)} \in (U, E^n)$$

и

$$(\Pi^n f)_{\Pi^n \varphi}(U, E^n) \subseteq \text{Int}(\text{Cl}(W, K^n)).$$

Теперь определим

$$(\tilde{U}, E^n) := \bigcup_{\sigma \in S_n} \sigma(U, E^n), \quad (H, SP^n E) := (\pi_X)_{\rho_X}(\tilde{U}, E^n).$$

Тогда $(\tilde{U}, E^n)$ является мягко открытым и насыщенным множеством, поэтому $(H, SP^n E)$ является мягко открытым в $(SP^n X, SP^n \tau, SP^n E)$, причём

$$([x_1, \dots, x_n])_{[e_1, \dots, e_n]} \in (H, SP^n E).$$

Поскольку (W, K^n) является насыщенным, оно инвариантно относительно действия S_n . Так как каждая перестановка $\sigma \in S_n$ действует как мягкий гомеоморфизм на (Y^n, ϑ^n, K^n) , то оба множества

$$\text{Cl}(W, K^n) \quad \text{и} \quad \text{Int}(\text{Cl}(W, K^n))$$

также являются насыщенными. Кроме того, отображение $(\Pi^n f)_{\Pi^n \varphi}$ является S_n -эквивариантным. Поэтому

$$(\Pi^n f)_{\Pi^n \varphi}(\tilde{U}, E^n) \subseteq \text{Int}(\text{Cl}(W, K^n)).$$

Используя коммутативное соотношение

$$(SP^n f)_{SP^n \varphi} \circ (\pi_X)_{\rho_X} = (\pi_Y)_{\rho_Y} \circ (\Pi^n f)_{\Pi^n \varphi},$$

получаем

$$(SP^n f)_{SP^n \varphi}(H, SP^n E) = (\pi_Y)_{\rho_Y}((\Pi^n f)_{\Pi^n \varphi}(\tilde{U}, E^n)) \subseteq (\pi_Y)_{\rho_Y}(\text{Int}(\text{Cl}(W, K^n))).$$

Положим

$$(O, SP^n K) := (\pi_Y)_{\rho_Y}(\text{Int}(\text{Cl}(W, K^n))).$$

Так как $\text{Int}(\text{Cl}(W, K^n))$ является насыщенным и мягко открытым множеством, то $(O, SP^n K)$ является мягко открытым в $(SP^n Y, SP^n \vartheta, SP^n K)$ по определению факторной мягкой топологии. Кроме того, в силу мягкой непрерывности $(\pi_Y)_{\rho_Y}$ имеем

$$(O, SP^n K) \subseteq (\pi_Y)_{\rho_Y}(\text{Cl}(W, K^n)) \subseteq \text{Cl}((\pi_Y)_{\rho_Y}(W, K^n)) = \text{Cl}(V, SP^n K).$$

Таким образом, $(O, SP^n K)$ является мягко открытым подмножеством множества $\text{Cl}(V, SP^n K)$, а значит,

$$(O, SP^n K) \subseteq \text{Int}(\text{Cl}(V, SP^n K)).$$

Следовательно,

$$(SP^n f)_{SP^n \varphi}(H, SP^n E) \subseteq \text{Int}(\text{Cl}(V, SP^n K)).$$

Тем самым $(SP^n f)_{SP^n \varphi}$ является мягко почти непрерывным в выбранной мягкой точке. Поскольку мягкая точка была произвольной, индуцированное отображение является мягко почти непрерывным на $SP^n X$. $\square$

Example 4.3. Пусть

$$X = \{x_1, x_2, x_3\}, \quad E = \{e_1, e_2\},$$

$$Y = \{y_1, y_2, y_3\}, \quad K = \{k_1, k_2\},$$

и рассмотрим мягкие топологии

$$\tau = \{\Phi_E, (F_1, E), (F_2, E), (F_3, E), \tilde{X}_E\}$$

на X и

$$\vartheta = \{\Phi_K, (G_1, K), (G_2, K), \tilde{Y}_K\}$$

на Y , где

$$F_1(e_1) = \{x_1, x_2\}, \quad F_1(e_2) = \{x_1, x_3\},$$

$$F_2(e_1) = \{x_2, x_3\}, \quad F_2(e_2) = \{x_1, x_2\},$$

$$F_3(e_1) = \{x_2\}, \quad F_3(e_2) = \{x_1\},$$

и

$$G_1(k_1) = \{y_1\}, \quad G_1(k_2) = \{y_3\},$$

$$G_2(k_1) = \{y_1, y_2\}, \quad G_2(k_2) = \{y_3\}.$$

Определим мягкое отображение

$$f_\varphi: (X, \tau, E) \rightarrow (Y, \vartheta, K)$$

следующим образом:

$$f(x_1) = y_1, \quad f(x_2) = y_2, \quad f(x_3) = y_3,$$

и

$$\varphi(e_1) = k_1, \quad \varphi(e_2) = k_2.$$

Как показано в предыдущем примере, f_φ является мягко почти непрерывным, но не является мягко непрерывным.

Теперь рассмотрим индуцированное мягкое отображение на второй мягкой симметрической степени:

$$(SP^2 f)_{SP^2 \varphi}: (SP^2 X, SP^2 \tau, SP^2 E) \rightarrow (SP^2 Y, SP^2 \vartheta, SP^2 K),$$

где

$$SP^2 f([(x_i, x_j)]) = [(f(x_i), f(x_j))], \quad SP^2 \varphi([(e_r, e_s)]) = [(\varphi(e_r), \varphi(e_s))].$$

В частности,

$$[(x_1, x_2)] \mapsto [(y_1, y_2)], \quad [(x_1, x_3)] \mapsto [(y_1, y_3)], \quad [(x_2, x_3)] \mapsto [(y_2, y_3)],$$

и

$$[(e_1, e_1)] \mapsto [(k_1, k_1)], \quad [(e_1, e_2)] \mapsto [(k_1, k_2)], \quad [(e_2, e_2)] \mapsto [(k_2, k_2)].$$

Следовательно, по теореме 4.1 индуцированное отображение

$$(SP^2 f)_{SP^2 \varphi}$$

является мягко почти непрерывным. Таким образом, данный пример показывает, что мягкая почти непрерывность сохраняется при конструкции мягкой симметрической степени для нетривиального отображения, которое не является мягко непрерывным.

Предложение 4.2. Пусть

$$f_\varphi: (X, \tau, E) \rightarrow (Y, \vartheta, K)$$

— мягко непрерывное и мягко открытое отображение. Тогда для каждого мягкого множества (A, K) над Y имеют место равенства

$$f_\varphi^{-1}(\text{Int}(A, K)) = \text{Int}(f_\varphi^{-1}(A, K)),$$

и

$$f_\varphi^{-1}(\text{Cl}(A, K)) = \text{Cl}(f_\varphi^{-1}(A, K)).$$

В частности, если (A, K) является регулярно открытым мягким множеством в (Y, ϑ, K) , то

$$f_\varphi^{-1}(A, K)$$

является регулярно открытым мягким множеством в (X, τ, E) .

Доказательство. Так как $\text{Int}(A, K)$ является мягко открытым множеством в (Y, ϑ, K) и f_φ является мягко непрерывным отображением, то

$$f_\varphi^{-1}(\text{Int}(A, K))$$

является мягко открытым множеством в (X, τ, E) и

$$f_\varphi^{-1}(\text{Int}(A, K)) \subseteq f_\varphi^{-1}(A, K).$$

Следовательно,

$$f_\varphi^{-1}(\text{Int}(A, K)) \subseteq \text{Int}(f_\varphi^{-1}(A, K)).$$

Обратно, пусть $x_e \in \text{Int}(f_\varphi^{-1}(A, K))$. Тогда существует мягко открытое множество $(U, E) \in \tau$ такое, что

$$x_e \in (U, E) \subseteq f_\varphi^{-1}(A, K).$$

Поскольку f_φ является мягко открытым отображением, $f_\varphi(U, E)$ является мягко открытым множеством в (Y, ϑ, K) , и

$$f_\varphi(U, E) \subseteq (A, K).$$

Отсюда получаем

$$f_\varphi(x_e) \in \text{Int}(A, K),$$

следовательно,

$$x_e \in f_\varphi^{-1}(\text{Int}(A, K)).$$

Таким образом,

$$f_\varphi^{-1}(\text{Int}(A, K)) = \text{Int}(f_\varphi^{-1}(A, K)).$$

Теперь, используя равенство

$$\text{Cl}(A, K) = (\text{Int}(A^c, K))^c$$

и тот факт, что прообразы коммутируют с дополнениями, получаем

$$\begin{aligned} f_\varphi^{-1}(\text{Cl}(A, K)) &= f_\varphi^{-1}((\text{Int}(A^c, K))^c) = \left(f_\varphi^{-1}(\text{Int}(A^c, K))\right)^c \\ &= \left(\text{Int}(f_\varphi^{-1}(A^c, K))\right)^c = \text{Cl}(f_\varphi^{-1}(A, K)). \end{aligned}$$

Наконец, если (A, K) является регулярно открытым мягким множеством, то

$$(A, K) = \text{Int}(\text{Cl}(A, K)).$$

Применяя f_φ^{-1} и используя две доказанные выше формулы, получаем

$$f_\varphi^{-1}(A, K) = f_\varphi^{-1}(\text{Int}(\text{Cl}(A, K))) = \text{Int}\left(\text{Cl}\left(f_\varphi^{-1}(A, K)\right)\right).$$

Следовательно, $f_\varphi^{-1}(A, K)$ является регулярно открытым мягким множеством в (X, τ, E) . $\square$

Перед доказательством результата о сохранении мягкой почти открытости на мягких симметрических степенях отметим, что приведённое ниже рассуждение использует дополнительное предположение о каноническом фактор-отображении со стороны области определения. Это предположение даёт удобное достаточное условие, обеспечивающее подъём регулярно открытых мягких множеств в факторном пространстве до регулярно открытых мягких множеств в соответствующем пространстве мягкого произведения. В настоящее время мы не утверждаем, что данное предположение является необходимым.

Теорема 4.2. Пусть $f_\varphi: (X, \tau, E) \rightarrow (Y, \vartheta, K)$ является мягко почти открытым отображением. Предположим, что каноническое мягкое фактор-отображение

$$(\pi_X)_{\rho_X}: (X^n, \tau^n, E^n) \rightarrow (SP^n X, SP^n \tau, SP^n E)$$

является мягко открытым. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ индуцированное отображение

$$(SP^n f)_{SP^n \varphi}: (SP^n X, SP^n \tau, SP^n E) \longrightarrow (SP^n Y, SP^n \vartheta, SP^n K)$$

является мягко почти открытым.

Доказательство. Пусть $(F, SP^n E)$ — регулярно открытое мягкое множество в $(SP^n X, SP^n \tau, SP^n E)$, и положим

$$(\tilde{F}, E^n) := (\pi_X)_{\rho_X}^{-1}(F, SP^n E).$$

Так как $(\pi_X)_{\rho_X}$ является мягко непрерывным и мягко открытым отображением, предложение 4.2 показывает, что $(\tilde{F}, E^n)$ является регулярно открытым мягким множеством в (X^n, τ^n, E^n) . Кроме того, $(\tilde{F}, E^n)$ является насыщенным множеством и

$$(\pi_X)_{\rho_X}(\tilde{F}, E^n) = (F, SP^n E).$$

По теореме 3.1 отображение $(\Pi^n f)_{\Pi^n \varphi}$ является мягко почти открытым. Следовательно,

$$(\Pi^n f)_{\Pi^n \varphi}(\tilde{F}, E^n)$$

является мягко открытым множеством в (Y^n, ϑ^n, K^n) .

Утверждаем, что это мягкое множество является насыщенным относительно канонического фактор-отображения

$$(\pi_Y)_{\rho_Y}: (Y^n, \vartheta^n, K^n) \rightarrow (SP^n Y, SP^n \vartheta, SP^n K).$$

Действительно, пусть

$$y \in (\Pi^n f)_{\Pi^n \varphi}(\tilde{F}, E^n).$$

Тогда $y = (\Pi^n f)_{\Pi^n \varphi}(x)$ для некоторого $x \in (\tilde{F}, E^n)$. Поскольку $(\tilde{F}, E^n)$ является насыщенным и $(\Pi^n f)_{\Pi^n \varphi}$ является S_n -эквивариантным, для каждого $\sigma \in S_n$ имеем

$$\sigma \cdot y = \sigma \cdot (\Pi^n f)_{\Pi^n \varphi}(x) = (\Pi^n f)_{\Pi^n \varphi}(\sigma \cdot x) \in (\Pi^n f)_{\Pi^n \varphi}(\tilde{F}, E^n).$$

Тем самым $(\Pi^n f)_{\Pi^n \varphi}(\tilde{F}, E^n)$ является насыщенным.

Следовательно, по определению факторной мягкой топологии

$$(\pi_Y)_{\rho_Y}((\Pi^n f)_{\Pi^n \varphi}(\tilde{F}, E^n))$$

является мягко открытым множеством в $(SP^n Y, SP^n \vartheta, SP^n K)$, поскольку его прообраз относительно $(\pi_Y)_{\rho_Y}$ в точности равен

$$(\Pi^n f)_{\Pi^n \varphi}(\tilde{F}, E^n),$$

которое является мягко открытым.

Наконец, используя коммутативное соотношение

$$(SP^n f)_{SP^n \varphi} \circ (\pi_X)_{\rho_X} = (\pi_Y)_{\rho_Y} \circ (\Pi^n f)_{\Pi^n \varphi},$$

получаем

$$(SP^n f)_{SP^n \varphi}(F, SP^n E) = (\pi_Y)_{\rho_Y}((\Pi^n f)_{\Pi^n \varphi}(\tilde{F}, E^n)),$$

причём правая часть является мягко открытым множеством в $(SP^n Y, SP^n \vartheta, SP^n K)$. Следовательно, $(SP^n f)_{SP^n \varphi}$ является мягко почти открытым. $\square$

Благодарность

Авторы выражают благодарность редактору и анонимным рецензентам за ценные замечания и конструктивные предложения, которые существенно способствовали улучшению данной рукописи.

Финансирование

Данная работа не получила финансовой поддержки.

Наличие данных и материалов

В ходе данного исследования наборы данных не создавались и не анализировались.

Конкурирующие интересы

Авторы заявляют об отсутствии конкурирующих интересов.

Вклад автора

Все авторы внесли равный вклад в выполнение данной работы. Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Список литературы

- [1] Molodtsov, D.: *Soft set theory—first results*. Comput. Math. Appl. **37** (4–5), 19–31 (1999).
- [2] Maji, P. K., Biswas, R., Roy, A. R.: *Soft set theory*. Comput. Math. Appl. **45** (4–5), 555–562 (2003).
- [3] Ali, M. I., Feng, F., Liu, X., Min, W. K., Shabir, M.: *On some new operations in soft set theory*. Comput. Math. Appl. **57** (9), 1547–1553 (2009).
- [4] Aygünoglu, A., Aygün, H.: *Some notes on soft topological spaces*. Neural Comput. Appl. **21** (1), 113–119 (2012).
- [5] Çağman, N., Karataş, S., Enginoğlu, S.: *Soft topology*. Comput. Math. Appl. **62**, 351–358 (2011).
- [6] Kharal, A., Ahmad, B.: *Mappings on soft classes*. New Math. Nat. Comput. **7** (3), 471–481 (2011).
- [7] Thakur, S. S., Rajput, A. S.: *Soft almost continuous mappings*. Int. J. Adv. Math. **2017** (1), 23–29 (2017).
- [8] Yüksel, S., Tozlu, N., Güzel Ergül, Z.: *Soft regular generalized closed sets in soft topological spaces*. Int. J. Math. Anal. **5** (8), 359–367 (2014).
- [9] Engelking, R.: *General Topology*. Heldermann Verlag, Berlin (1989).
- [10] Wagner, C. H.: *Symmetric, cyclic and permutation products of manifolds*. PWN, Warszawa (1980).
- [11] Al-shami, T. M., Ameen, Z. A., Azzam, A. A., El-Shafei, M. E.: *Soft separation axioms via soft topological operators*. AIMS Mathematics **7** (8), 15107–15119 (2022).
- [12] Al Ghour, S.: *Soft Complete Continuity and Soft Strong Continuity in Soft Topological Spaces*. Axioms **12** (1), 78 (2023).
- [13] Al Ghour, S.: *Soft C-continuity and soft almost C-continuity between soft topological spaces*. Heliyon **9** (6), e16363 (2023).
- [14] Ameen, Z. A., Alqahtani, M. H.: *Some Classes of Soft Functions Defined by Soft Open Sets Modulo Soft Sets of the First Category*. Mathematics **11** (20), 4368 (2023).
- [15] Ameen, Z. A., Al Ghour, S.: *Cluster soft sets and cluster soft topologies*. Computational and Applied Mathematics **42**, 337 (2023).

- [16] Georgiou, D. N., Mamadaliev, N. K., Zhuraev, R. M.: *A note on functional tightness and minitightness of space of the G -permutation degree*. Comment. Math. Univ. Carol. **64** (1), 97–108 (2023).
- [17] Al-shami, T. M., Mhemdi, A.: *On soft parametric somewhat-open sets and applications via soft topologies*. Heliyon **9** (11), e21472 (2023).
- [18] Abuzaid, D., Al Ghour, S.: *Soft strong θ -continuity and soft almost strong θ -continuity*. AIMS Mathematics **9** (6), 16687–16703 (2024).
- [19] Abuzaid, D., Al Ghour, S.: *Three new soft separation axioms in soft topological spaces*. AIMS Mathematics **9** (2), 4632–4648 (2024).
- [20] Abu Saleem, M.: *On soft covering spaces in soft topological spaces*. AIMS Mathematics **9** (7), 18134–18142 (2024).
- [21] Alharbi, R., Abbas, S. E., El-Sanowsy, E., Khiamy, H. M., Ibedou, I.: *Soft closure spaces via soft ideals*. AIMS Mathematics **9** (3), 6379–6410 (2024).
- [22] Al-Ghour, S., Abuzaid, D., Naghi, M.: *Soft Weakly Quasi-Continuous Functions Between Soft Topological Spaces*. Mathematics **12** (20), 3280 (2024).
- [23] Good, C., Macías, S.: *Symmetric products of generalized metric spaces*. Topology Appl. **206**, 93–114 (2016).
- [24] Shen, L., Tholen, W.: *Topological categories, quantaloids and Isbell adjunctions*. Topology Appl. **200**, 212–236 (2016).
- [25] Tuyen, L. Q., Tuyen, O. V.: *Generalized metric properties at a subset on the Vietoris hyperspace $F(X)$* . Filomat **38** (12), 4291–4301 (2024).

On the impact of the soft symmetric power functor SP^n on soft almost continuous and soft almost open mappings

Nodirbek K. Mamadaliev and Boburmirzo M. Toshbuvayev

Abstract

In this paper, we study the behavior of soft almost continuous and soft almost open mappings under two natural constructions in soft topology: finite Cartesian powers and soft symmetric powers. We first show that both soft almost continuity and soft almost openness are preserved under finite powers equipped with the soft product topology. We then consider the induced mappings on the n -th soft symmetric power SP^n , viewed as the quotient of the n -fold soft product under the natural action of the symmetric group. Unlike the classical case, the canonical soft symmetric projection need not be soft open. In the symmetric-power setting, we prove that soft almost continuity is preserved by the induced mapping on SP^n . For soft almost openness, we obtain a sufficient condition on the domain-side canonical quotient map ensuring that the induced mapping on SP^n remains soft almost open. Thus, preservation is unconditional for finite powers, while in the symmetric-power setting the almost-open case is established under an explicit additional hypothesis. These results clarify the role of quotient constructions in the soft setting and further illustrate the difference between classical and soft symmetric powers.

Keywords

soft set; soft topology; soft almost continuity; soft almost openness; product soft topology; symmetric power.

Affiliations

Nodirbek K. Mamadaliev

Address: Kimyo International University in Tashkent, Shota Rustaveli Street 156, 100121, Tashkent, Uzbekistan.

e-mail: n.mamadaliyev@kiut.uz

e-mail: nodirbekm.topol25@gmail.com

ORCID ID: 0000-0001-9689-3234

Boburmirzo M. Toshbuvayev

Address: Fergana State University, 150100, Fergana, Uzbekistan.

e-mail: toshbuvayevboburmirzo@gmail.com

ORCID ID: 0009-0002-6424-1359