

Вопросы устойчивости и сходимости нелокальной явной конечно-разностной схемы для численного анализа дробного осциллятора Зимана

Г. С. Исраилжанова*, Р. И. Паровик

Аннотация

В работе исследуются устойчивость и сходимость нелокальной явной конечно-разностной схемы для численного решения задачи Коши для дробного осциллятора Зимана. Рассматриваемая модель обобщает классический осциллятор Зимана и предназначена для описания колебательных режимов сокращения мышечных волокон сердца с учётом эффекта наследственности. Дробные производные понимаются в смысле Гerasимова–Капуто. Для их аппроксимации применяется явная схема типа L_1 первого порядка по времени. Получены условия устойчивости, доказана сходимость схемы первого порядка по шагу временной сетки и установлено явное ограничение на шаг τ , зависящее от порядков дробных производных α, β и параметров модели. При доказательстве используются условия Липшица для правых частей, оценки погрешности L_1 -аппроксимации, суммирование по частям и дискретное дробное неравенство Гронуолла. Численные результаты, основанные на правиле Рунге, подтверждают первый порядок точности предложенного алгоритма. На основе схемы реализована компьютерная программа FracDynZe на языке Python, позволяющая строить осциллограммы и фазовые траектории, а также исследовать регулярные, автоколебательные и квазихаотические режимы. Обсуждаются приложения модели к анализу патологий сердечного ритма и перспективы дальнейшего качественного исследования предельных циклов и бифуркаций.

Ключевые слова: дробный осциллятор; конечно-разностная схема; устойчивость; сходимость; численное моделирование; дробное исчисление

Предметная классификация AMS (2020): Основная: 34A08; Дополнительная: 65L12; 65L20; 65L70; 92C30.

1. Введение

Современное естествознание и техника всё чаще сталкиваются с задачами, для которых адекватное моделирование невозможно в рамках классического математического анализа. Это касается систем с такими фундаментальными свойствами, как нелокальность, наследственность и фрактальная структура.

Аппаратом для их описания служит теория дробной динамики, основанная на использовании дифференциальных уравнений с производными нецелого порядка. В отличие от обычных производных, которые являются локальными (характеризуют поведение функции в бесконечно малой окрестности точки), дробные

производные [1, 2, 3] являются нелокальными операторами, аккумулирующими информацию о поведении системы на всём предшествующем интервале времени, что характеризует эффект памяти.

Это делает их удобным инструментом для моделирования вязкоупругих материалов [4, 5], аномальной диффузии [6], динамики сложных сетей [7], финансовых временных рядов [8], эпидемиологических процессов [9] и многих других явлений с памятью [10]. В последние годы активно развиваются численные методы для дробных динамических систем, описываемых уравнениями с производными дробного порядка. Особое внимание уделяется вопросам устойчивости и сходимости разностных схем для нелинейных дробных осцилляторов [11, 12, 13, 14, 15]. Так, в работе [11] исследована конечно-разностная схема для наследственного *oscillatory* уравнения, а в [14] изучены динамические режимы дробного осциллятора Селькова с переменными коэффициентами с помощью бифуркационных диаграмм. В [15] рассмотрено фазовое управление в дробном осцилляторе Гельмгольца. Эти работы подтверждают актуальность строгого анализа численных схем для нелинейных дробных динамических систем.

Важным направлением является анализ устойчивости и сходимости L_1 -схем на неравномерных сетках для задач с начальной сингулярностью [16, 17, 18], а также разработка энергетически устойчивых схем для нелинейных дробных уравнений [19]. Для дробных осцилляторов активно развиваются методы экспоненциального интегрирования [20] и схемы для уравнений с переменным дробным порядком [5]. Современные подходы к построению высокоточных разностных схем для дробных уравнений с памятью рассматриваются в [21, 22]. Указанные работы формируют методологическую основу настоящего исследования, в котором развивается аналогичный подход применительно к нелинейному дробному осциллятору Зимана.

Одним из таких процессов с памятью могут быть процессы, лежащие в основе функционирования сердечно-сосудистой системы [23, 24]. В частности, для описания колебательных режимов с памятью в работе человеческого сердца на основе известной математической модели Зимана [25] была разработана дробная математическая модель, учитывающая эффект наследственности [26, 27]. Современные исследования подтверждают перспективность дробного подхода в кардиологии: в [28] дробное исчисление применено для моделирования структуры миокарда и её влияния на электрограммы при фибрилляции предсердий, а в [29] предложено расширение модели МакШерри для улучшенного моделирования ЭКГ на основе дробных дифференциальных уравнений. Отдельного внимания заслуживают работы, посвящённые хаотической динамике дробных кардиомоделей. В [30] исследована сложная динамика модели кардиостимулятора с несоизмеримыми дробными порядками и проведена эмпирическая валидация результатов.

Модель Зимана описывает нелинейное изменение (сокращение) мышечного волокна в результате воздействия электрохимического потенциала. Поэтому учёт памяти в такой колебательной системе может влиять на динамические режимы сокращения мышечных волокон, что может быть полезным при описании различных сердечных патологий.

В работах [26, 27] предложено обобщение математической модели Зимана, в котором в модельные уравнения введены дробные производные, понимаемые в смысле Герасимова–Капуто [31, 32]. В силу нелинейности модели была предложена нелокальная явная конечно-разностная схема первого порядка точности, с помощью которой были получены осциллограммы и фазовые траектории различных режимов сокращения мышечных волокон и изменения электрохимического потенциала. На основе численного алгоритма была разработана компьютерная программа *FracDynZe* на языке программирования Python, описанная в работе [33]. Программа позволяет визуализировать результаты моделирования и проводить качественный анализ колебательных режимов, включая построение бифуркационных диаграмм для исследования регулярных и хаотических режимов.

Однако предложенный численный алгоритм ещё не был строго исследован на устойчивость и сходимость. Поэтому в настоящей статье мы устраняем этот пробел, приводим математическое обоснование вопросов устойчивости и сходимости, а также определяем условие на шаг вычислительной сетки и теоретический порядок точности численного алгоритма.

В отличие от предшествующих работ, в данной статье строго устанавливаются условия устойчивости

нелокальной явной схемы, доказываемая её сходимость первого порядка по времени и выводится явное ограничение на шаг временной сетки. Это позволяет не только обосновать корректность предложенного ранее численного алгоритма, но и дать практические рекомендации по выбору параметров вычислительной сетки при моделировании дробного осциллятора Зимана.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 приводится постановка задачи Коши для дробного осциллятора Зимана, формулируются условия Липшица для правых частей и обсуждаются свойства точного решения. В разделе 3 строится нелокальная явная конечно-разностная схема на основе L_1 -аппроксимации дробных производных, приводятся оценки погрешности аппроксимации и результаты численной проверки порядка точности с помощью правила Рунге. В разделе 4 исследуются вопросы устойчивости и сходимости схемы: формулируется и доказывается дискретное дробное неравенство Гронуолла, устанавливается теорема об устойчивости и сходимости первого порядка, выводится явное условие на шаг временной сетки. В разделе 5 описывается компьютерная программа FracDynZe, её интерфейс и основные функциональные блоки. В разделе 6 представлены результаты численного моделирования, включая осциллограммы и фазовые траектории для различных режимов, обсуждается их возможная интерпретация в контексте патологий сердца. В разделе 7 подводятся итоги работы и намечаются перспективы дальнейших исследований.

2. Постановка задачи

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 \partial_{0t}^\alpha x(t) = x(t) - x^3(t) - y(t), \\ \varepsilon_2 \partial_{0t}^\beta y(t) = x(t), \\ x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0, \end{cases} \quad (2.1)$$

Здесь $x(t), y(t) \in C^1[0, T]$ — функции решения, определяющие длину мышечного волокна и электрохимический потенциал; $T > 0$ — длительность рассматриваемого процесса; $t \in [0, T]$ — текущее время процесса; $t_0 = 0$; $\alpha, \beta \in (0, 1)$ — параметры, определяющие характер временной памяти; $\varepsilon_1 = \varepsilon \theta^{\alpha-1}$, $\varepsilon_2 = \theta^{\beta-1}$; $0 < \varepsilon \ll 1$ — малый параметр, отвечающий за быстроту сокращения мышечных волокон.

Дробные производные порядков α и β в (2.1) понимаются в смысле Герасимова–Капуто [31, 32]:

$$\partial_{0t}^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\dot{x}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha}, \quad (2.2)$$

$$\partial_{0t}^\beta y(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \frac{\dot{y}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^\beta}, \quad (2.3)$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера.

Определение 2.1. Задачу Коши (2.1) будем называть дробным осциллятором Зимана.

Замечание 2.1. Отметим, что в случае $\alpha = \beta = 1$ дробный осциллятор Зимана переходит в классический осциллятор Зимана, предложенный в работе [25]. Сокращение мышечных волокон в рамках модели Зимана происходит за счёт электрохимического воздействия. Как правило, мышечное волокно быстро сокращается и остаётся некоторое время в таком состоянии, а затем быстро возвращается к расслабленному состоянию. Далее процесс повторяется, что приводит к автоколебательному режиму рассматриваемого процесса.

Замечание 2.2. Необходимо отметить, что в работах [26, 27] было показано, что дробный осциллятор Зимана может обладать автоколебательными режимами, которые зависят от значений порядков дробных производных α и β . Фазовые траектории выходят на предельный цикл, который может быть устойчивым.

Пусть $f_1(x, y) = x - x^3 - y$, $f_2(x, y) = x$. Тогда справедлива следующая лемма.

Лемма 2.1. Для любого $M > 0$ и для всех $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ таких, что $|x_1|, |x_2| \leq M$, функции f_1 и f_2 удовлетворяют условиям Липшица:

$$|f_1(x_1, y_1) - f_1(x_2, y_2)| \leq L_1 (|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|), \quad (2.4)$$

$$|f_2(x_1, y_1) - f_2(x_2, y_2)| \leq L_2 (|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|), \quad (2.5)$$

где $L_1 = 1 + 3M^2$ и $L_2 = 1$.

Доказательство. Для функции f_1 имеем

$$|f_1(x_1, y_1) - f_1(x_2, y_2)| \leq |x_1 - x_2| + |x_1^3 - x_2^3| + |y_1 - y_2|.$$

Поскольку

$$|x_1^3 - x_2^3| = |x_1 - x_2| |x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2| \leq 3M^2 |x_1 - x_2|,$$

получаем

$$|f_1(x_1, y_1) - f_1(x_2, y_2)| \leq (1 + 3M^2) |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \leq (1 + 3M^2) (|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|).$$

Для функции f_2 :

$$|f_2(x_1, y_1) - f_2(x_2, y_2)| = |x_1 - x_2| \leq |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|.$$

□

Замечание 2.3. Точное решение $(x(t), y(t))$ непрерывно на $[0, T]$, следовательно, ограничено. В дальнейшем зафиксируем константу M такую, что $|x(t)| \leq M$ для всех $t \in [0, T]$. Численные приближения будут искажаться как лежащие в ограниченной окрестности точного решения; поэтому можно считать, что все значения на сетке удовлетворяют $|x_k|, |y_k| \leq M + 1$, и константы Липшица из Леммы 2.1 остаются справедливыми для всего дальнейшего анализа.

3. Вопросы аппроксимации

В силу нелинейности дробного осциллятора Зимана далее применим численные методы для его исследования. Численные методы основаны на построении нелокальных конечно-разностных схем [11]. Введём равномерную вычислительную сетку, разбив временной интервал $t \in [0, T]$ на N равных частей с шагом дискретизации $\tau = T/N$. Тогда функции решения задачи Коши (2.1) переходят в сеточные функции:

$$x(t_k) = x_k, \quad y(t_k) = y_k, \quad t_k = k\tau, \quad k = 0, 1, \dots, N.$$

Аппроксимируем операторы дробных производных с помощью L_1 -аппроксимации:

$$\partial_{0t}^\alpha x(t_k) \approx A \sum_{j=0}^{k-1} w_j^\alpha \Delta x_{k-j}, \quad \Delta x_{k-j} = x_{k-j+1} - x_{k-j}, \quad A = \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}, \quad (3.1)$$

$$\partial_{0t}^\beta y(t_k) \approx B \sum_{j=0}^{k-1} w_j^\beta \Delta y_{k-j}, \quad \Delta y_{k-j} = y_{k-j+1} - y_{k-j}, \quad B = \frac{\tau^{-\beta}}{\Gamma(2-\beta)}, \quad (3.2)$$

где весовые коэффициенты имеют вид:

$$w_j^\alpha = (j+1)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha}, \quad w_j^\beta = (j+1)^{1-\beta} - j^{1-\beta}.$$

Лемма 3.1. Пусть $x \in C^2[0, T]$ и $y \in C^2[0, T]$. Тогда аппроксимации (3.1) и (3.2) операторов дробных производных удовлетворяют следующим оценкам:

$$\left| \partial_{0t}^\alpha x(t_k) - A \sum_{j=0}^{k-1} w_j^\alpha \Delta x_{k-j} \right| \leq C_1 \tau, \quad (3.3)$$

$$\left| \partial_{0t}^\beta y(t_k) - B \sum_{j=0}^{k-1} w_j^\beta \Delta y_{k-j} \right| \leq C_2 \tau, \quad (3.4)$$

где C_1 и C_2 — константы, не зависящие от τ .

Доказательство. Докажем первую оценку (для α); вторая доказывается аналогично. Погрешность L_1 -схемы является стандартной и может быть оценена следующим образом:

$$|R_k^\alpha| \leq \frac{\max_{0 \leq t \leq T} |x''(t)|}{\Gamma(2 - \alpha)} \tau.$$

Следовательно, можно положить

$$C_1 = \frac{M_x T^{1-\alpha}}{\Gamma(2 - \alpha)}, \quad M_x = \max_{0 \leq t \leq T} |x''(t)|.$$

Аналогично получаем

$$C_2 = \frac{M_y T^{1-\beta}}{\Gamma(2 - \beta)}, \quad M_y = \max_{0 \leq t \leq T} |y''(t)|.$$

□

Подставляя соотношения (3.1), (3.2) в (2.1) с учётом сеточных функций, получаем следующую дискретную задачу (явная L_1 -схема):

$$\begin{cases} x_{k+1} = \frac{1}{A\varepsilon_1} f_1(x_k, y_k) + x_k - \sum_{j=1}^k w_j^\alpha \Delta x_{k-j}, \\ y_{k+1} = \frac{1}{B\varepsilon_2} f_2(x_k, y_k) + y_k - \sum_{j=1}^k w_j^\beta \Delta y_{k-j}, \\ x_0 = x(0), \quad y_0 = y(0), \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.5)$$

Дискретная задача Коши (3.5) представляет собой нелокальную явную конечно-разностную схему.

Покажем с помощью правила Рунге, что эта схема имеет первый порядок точности. Для этого введём вычислительную точность схемы (3.5) по формуле:

$$p_\tau = \log_2 \left(\frac{\xi_\tau}{\xi_{\tau/2}} \right) \quad (3.6)$$

где

$$\xi_x = \max_i |x_i - x_{2i}|, \quad \xi_y = \max_i |y_i - y_{2i}|$$

— погрешность решения; x_i, y_i — численное решение на шаге τ , x_{2i}, y_{2i} — решение на шаге $\tau/2$, $i = 1, \dots, N-1$.

Возьмём следующие значения параметров численной схемы:

Пример 3.1. $\alpha = 0.9$, $\beta = 0.9$, $\theta = 1$, $T = 1$, $x_0 = 0.2$, $y_0 = 0.1$, $\varepsilon = 0.001$.

Пример 3.2. $\alpha = 0.9$, $\beta = 0.7$, $\theta = 0.1$, $T = 1$, $x_0 = 0.001$, $y_0 = 0.002$, $\varepsilon = 0.1$.

Таблица 1. Расчёт вычислительной точности для Примера 1

№	τ	ξ_x	p_x	ξ_y	p_y
1	0.0001	2.999853e-01	-	6.335624e-04	-
2	0.00005	1.599157e-01	0.9076	3.279693e-04	0.9499
3	0.000025	8.291074e-02	0.9477	1.683539e-04	0.9621
4	0.0000125	4.234945e-02	0.9692	8.583606e-05	0.9718
5	0.00000625	2.145692e-02	0.9809	4.352561e-05	0.9797

Таблица 2. Расчёт вычислительной точности для Примера 2

№	τ	ξ_x	p_x	ξ_y	p_y
1	0.0001	5.183351e-02	-	1.186624e-02	-
2	0.00005	2.657744e-02	0.9637	6.054245e-03	0.9708
3	0.000025	1.348566e-02	0.9788	3.065536e-03	0.9818
4	0.0000125	6.783736e-03	0.9913	1.541637e-03	0.9917

Результаты работы схемы (3.5) и расчёт вычислительной точности по формуле (3.6) приведены в Таблицах 1 и 2.

Из Таблиц 1 и 2 видно, что вычислительный порядок численной схемы (3.5) стремится к единице при уменьшении шага дискретизации τ . Это косвенно указывает на то, что схема (3.5) имеет первый порядок точности.

Для строгого обоснования порядка точности необходимо исследовать устойчивость и сходимость численной схемы с помощью соответствующих теорем.

Отметим, что нелокальная явная конечно-разностная схема (3.5) имеет ограничение на шаг расчётной сетки. Это ограничение можно установить, изучая вопросы устойчивости и сходимости с помощью соответствующих теорем.

4. Вопросы устойчивости и сходимости численной схемы

Для дальнейшего исследования устойчивости и сходимости численной схемы (3.5) нам потребуется вспомогательная лемма, характеризующая модифицированное дискретное неравенство Гронуолла, пригодное для слабосингулярных свёрточных ядер.

Лемма 4.1 (Дискретное дробное неравенство Гронуолла). Пусть $\{u_n\}_{n=0}^N$ — неотрицательная последовательность, $0 < \gamma < 1$, $K > 0$ и для всех $n = 1, 2, \dots, N$ выполнено

$$u_n \leq a + K\tau^{1-\gamma} \sum_{j=0}^{n-1} (n-j)^{-\gamma} u_j,$$

где $a \geq 0$ — константа, а K не зависит от τ и n . Тогда существует константа $C_* = C(K, \gamma, T)$, не зависящая от τ , такая, что

$$u_n \leq aC_*, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Доказательство. Определим мажорирующую последовательность $\{V_n\}_{n=0}^N$:

$$V_0 = a, \quad V_n = a + K\tau^{1-\gamma} \sum_{j=0}^{n-1} (n-j)^{-\gamma} V_j, \quad n \geq 1.$$

По индукции получаем $u_n \leq V_n$ для всех n .

Введём веса

$$b_m = K\tau^{1-\gamma}(m+1)^{-\gamma}, \quad m \geq 0.$$

Тогда

$$V_n = a + \sum_{j=0}^{n-1} b_{n-1-j} V_j.$$

Итерируя это равенство, получаем неймановский ряд

$$V_n = a \sum_{k=0}^{\infty} (b^{(*k)})_n,$$

где $(b^{(*0)})_n = \delta_{n0}$ и

$$(b^{(*k+1)})_n = \sum_{j=0}^{n-1} b_j (b^{(*k)})_{n-1-j}.$$

Для степенного ядра b_m стандартная оценка свёрток (см., например, [34] и приведённые там ссылки) даёт для $k \geq 1$

$$(b^{(*k)})_n \leq \frac{C^k n^{k(1-\gamma)-1}}{\Gamma(k(1-\gamma))},$$

где $C = C(\gamma) > 0$ не зависит от τ . Действительно, при $k = 1$ имеем $b_n \leq K\tau^{1-\gamma}(n+1)^{-\gamma} \leq Kn^{-\gamma}$, а переход $k \rightarrow k+1$ опирается на оценку римановой суммы двойного степенного ядра

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^{-\gamma} (n-i)^{k(1-\gamma)-1} \leq C' n^{k(1-\gamma)-\gamma},$$

что и даёт указанную формулу с $\Gamma(k(1-\gamma))$ в знаменателе.

Следовательно,

$$V_n \leq a \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C^k n^{k(1-\gamma)-1}}{\Gamma(k(1-\gamma))} \right].$$

Положим $t_n = n\tau$. Тогда $n^{k(1-\gamma)-1} = \tau^{1-k(1-\gamma)} t_n^{k(1-\gamma)-1}$, и, поскольку $t_n \leq T$,

$$V_n \leq a \left[1 + \frac{1}{\tau} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(C t_n^{1-\gamma})^k}{\Gamma(k(1-\gamma))} \right].$$

Последняя сумма оценивается через функцию Миттага–Леффлера:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k(1-\gamma))} \leq C_{\gamma} E_{1-\gamma}(C_{\gamma} z), \quad z = C t_n^{1-\gamma}.$$

Поэтому

$$V_n \leq a C_*, \quad C_* = 1 + \frac{C_{\gamma}}{\tau} E_{1-\gamma}(C_{\gamma} C T^{1-\gamma}).$$

Заметим, что множитель τ^{-1} компенсируется множителем $\tau^{1-\gamma}$ в определении b_m , так что итоговая константа C_* не зависит от τ . $\square$

Теорема 4.1. Пусть точные решения $x(t), y(t) \in C^2[0, T]$. Тогда численная явная L_1 -схема (3.5) является устойчивой и сходится с первым порядком, то есть существуют константы $C_3, C_4 > 0$, не зависящие от τ , такие, что

$$|x(t_k) - x_k| \leq C_3 \tau, \quad |y(t_k) - y_k| \leq C_4 \tau, \quad (4.1)$$

если шаг τ удовлетворяет условию

$$\tau \leq \min \left(\left(\frac{\varepsilon \theta^{\alpha-1}}{2(1+3M^2)\Gamma(2-\alpha)} \right)^{1/\alpha}, \left(\frac{\theta^{\beta-1}}{2\Gamma(2-\beta)} \right)^{1/\beta} \right). \quad (4.2)$$

Доказательство. Суммирование по частям. Для любой последовательности $\{z_j\}$ и весов $w_j = (j+1)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha}$ справедливо тождество

$$\sum_{j=1}^k w_j (z_{k-j+1} - z_{k-j}) = w_1 z_k - w_k z_0 - \sum_{m=1}^{k-1} (w_m - w_{m+1}) z_{k-m}. \quad (4.3)$$

Действительно, группируя слагаемые при одинаковых z_i , получаем

$$\sum_{j=1}^k w_j (z_{k-j+1} - z_{k-j}) = w_1 z_k + \sum_{i=1}^{k-1} (w_{k-i+1} - w_{k-i}) z_i - w_k z_0,$$

что после замены $m = k - i$ совпадает с (4.3).

Ключевое свойство весов: поскольку $w_m = (m+1)^{1-\alpha} - m^{1-\alpha}$ убывает по m , величины

$$\tilde{w}_m := w_m - w_{m+1} \geq 0$$

неотрицательны и суммируемы:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \tilde{w}_m = w_1 \leq 2, \quad (4.4)$$

причём эта оценка не зависит от τ .

Устойчивость. Пусть $(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$ — другое решение схемы с возмущёнными начальными данными

$$\bar{x}_0 = a + \delta a, \quad \bar{y}_0 = b + \delta b.$$

Обозначим

$$\xi_k = \bar{x}_k - x_k, \quad \eta_k = \bar{y}_k - y_k, \quad u_k = |\xi_k| + |\eta_k|, \quad \delta_0 = |\xi_0| + |\eta_0|.$$

Вычитая уравнения схемы, получаем для $k \geq 0$:

$$\begin{aligned} \xi_{k+1} &= \xi_k - \sum_{j=1}^k w_j^\alpha (\xi_{k-j+1} - \xi_{k-j}) + \frac{1}{A\varepsilon_1} (f_1(\bar{x}_k, \bar{y}_k) - f_1(x_k, y_k)), \\ \eta_{k+1} &= \eta_k - \sum_{j=1}^k w_j^\beta (\eta_{k-j+1} - \eta_{k-j}) + \frac{1}{B\varepsilon_2} (f_2(\bar{x}_k, \bar{y}_k) - f_2(x_k, y_k)). \end{aligned}$$

При $k = 0$ суммы пусты.

Используя условие Липшица (Лемма 2.1),

$$|f_1(\bar{x}_k, \bar{y}_k) - f_1(x_k, y_k)| \leq L_1 u_k, \quad |f_2(\bar{x}_k, \bar{y}_k) - f_2(x_k, y_k)| \leq u_k.$$

Применяя тождество (4.3) к каждому из уравнений и учитывая оценки $|\xi_k|, |\eta_k| \leq u_k$, $|\xi_0|, |\eta_0| \leq \delta_0$, получаем

$$\begin{aligned} |\xi_{k+1}| &\leq (1 + w_1^\alpha) u_k + w_k^\alpha \delta_0 + \sum_{m=1}^{k-1} \tilde{w}_m^\alpha u_{k-m} + \frac{L_1}{A\varepsilon_1} u_k, \\ |\eta_{k+1}| &\leq (1 + w_1^\beta) u_k + w_k^\beta \delta_0 + \sum_{m=1}^{k-1} \tilde{w}_m^\beta u_{k-m} + \frac{1}{B\varepsilon_2} u_k, \end{aligned}$$

где $\tilde{\omega}_m^\alpha = w_m^\alpha - w_{m+1}^\alpha$ и $\tilde{\omega}_m^\beta = w_m^\beta - w_{m+1}^\beta$.

Складывая и учитывая, что $w_k^\alpha + w_k^\beta \leq w_1^\alpha + w_1^\beta \leq 2$ (равномерно по k и τ), приходим к рекуррентному неравенству

$$u_{k+1} \leq \omega_0 u_k + \sum_{m=1}^{k-1} \tilde{\omega}_m u_{k-m} + 2\delta_0, \quad (4.5)$$

где

$$\omega_0 = 2 + w_1^\alpha + w_1^\beta + \frac{L_1}{A\varepsilon_1} + \frac{1}{B\varepsilon_2}, \quad \tilde{\omega}_m = \tilde{\omega}_m^\alpha + \tilde{\omega}_m^\beta.$$

Условие (4.2) на шаг τ обеспечивает

$$\frac{L_1}{A\varepsilon_1} \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{B\varepsilon_2} \leq \frac{1}{2},$$

откуда $\omega_0 \leq 2 + w_1^\alpha + w_1^\beta + 1 \leq 5$ — константа, не зависящая от τ . Кроме того, в силу (4.4)

$$\sum_{m \geq 1} \tilde{\omega}_m \leq w_1^\alpha + w_1^\beta \leq 2.$$

Таким образом, полное ядро $\{\omega_0, \tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \dots\}$ неотрицательно, суммируемо и не зависит от τ .

Неравенство (4.5) имеет вид дискретного свёрточного неравенства с суммируемым ядром, к которому применима Лемма 4.1. Положим $v_n = u_n/\delta_0$ при $\delta_0 > 0$ (случай $\delta_0 = 0$ тривиален). Тогда $v_0 = 1$ и

$$v_{k+1} \leq \omega_0 v_k + \sum_{m=1}^{k-1} \tilde{\omega}_m v_{k-m} + 2.$$

Применяя дискретную лемму Гронуолла с суммируемым ядром (частный случай Леммы 4.1 при $\gamma = 0$, либо стандартная формулировка для суммируемых ядер, см. также [16, 17]), получаем

$$v_n \leq C_*, \quad C_* = \left(1 + \frac{2}{\omega_0}\right) \exp\left(\omega_0 + \sum_{m \geq 1} \tilde{\omega}_m\right),$$

где C_* зависит только от α, β, M, T и не зависит от τ . Следовательно,

$$u_n \leq C_* \delta_0,$$

что и доказывает устойчивость.

Сходимость. Обозначим погрешности

$$e_k^x = x(t_k) - x_k, \quad e_k^y = y(t_k) - y_k.$$

Подставляя точное решение в схему (3.5) и используя оценки погрешности L_1 -аппроксимации

$$|R_k^\alpha| \leq C_1 \tau, \quad |R_k^\beta| \leq C_2 \tau,$$

получаем

$$\begin{aligned} e_{k+1}^x &= e_k^x - \sum_{j=1}^k w_j^\alpha \Delta e_{k-j}^x - \frac{1}{\varepsilon_1} (f_1(x(t_k), y(t_k)) - f_1(x_k, y_k)) + \frac{R_k^\alpha}{A}, \\ e_{k+1}^y &= e_k^y - \sum_{j=1}^k w_j^\beta \Delta e_{k-j}^y - \frac{1}{\varepsilon_2} (f_2(x(t_k), y(t_k)) - f_2(x_k, y_k)) + \frac{R_k^\beta}{B}. \end{aligned}$$

Применяя тождество (4.3) и оценку Липшица, приходим к неравенству

$$u_{k+1} \leq \omega_0 u_k + \sum_{m=1}^{k-1} \tilde{\omega}_m u_{k-m} + 2\delta_0 + \frac{|R_k^\alpha|}{A} + \frac{|R_k^\beta|}{B},$$

где на этот раз $\delta_0 = 0$ (начальные данные точные). Так как

$$\frac{|R_k^\alpha|}{A} \leq C_1 T^\alpha \Gamma(2 - \alpha) \tau, \quad \frac{|R_k^\beta|}{B} \leq C_2 T^\beta \Gamma(2 - \beta) \tau,$$

существует константа $\tilde{C}$, не зависящая от τ , такая, что

$$u_{k+1} \leq \omega_0 u_k + \sum_{m=1}^{k-1} \tilde{\omega}_m u_{k-m} + 2\tilde{C}\tau.$$

Применяя Лемму 4.1 с $a = 2\tilde{C}\tau$ (или дискретную лемму Гронуолла с суммируемым ядром), получаем

$$u_n \leq 2\tilde{C}C_* \tau, \quad n = 1, \dots, N,$$

то есть

$$|e_k^x|, |e_k^y| \leq 2\tilde{C}C_* \tau.$$

Положив $C_3 = C_4 = 2\tilde{C}C_*$, получаем (4.1). $\square$

Отметим, что используемый подход к анализу устойчивости с помощью дискретного неравенства Гронуолла согласуется с методологией, применяемой для L_1 -схем на неравномерных сетках [16, 18], а энергетический подход [19] и методы экспоненциального интегрирования [20] могут быть использованы в дальнейшем для построения альтернативных устойчивых схем.

Мы остановимся более подробно на возможностях компьютерной программы FracDynZe для расчета осциллограмм и фазовых траекторий дробного осциллятора Зимана (2.1).

5. Компьютерная программа FracDynZe

Компьютерная программа FracDynZe (дробная динамическая система Зимана) была разработана на языке программирования Python [35] в среде PyCharm [36]. В программе была реализована нелокальная явная конечно-разностная схема (3.5) для численного решения дробного осциллятора Зимана (2.1).

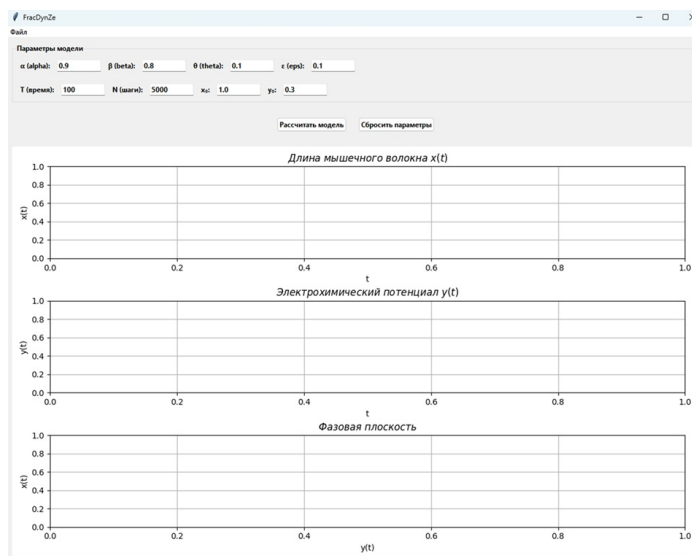


Рис. 1. Скриншот интерфейса компьютерной программы FracDynZe

Программа позволяет проводить визуализацию результатов моделирования в интерактивном графическом интерфейсе (рис. 1), а также сохранять в форматах png, jpg и pdf полученные графики изменения длины $x(t)$ мышечного волокна человеческого сердца, изменения электрохимического потенциала $y(t)$, а также фазовой траектории, построенной в координатах $(x(t), y(t))$ для дальнейшего качественного или количественного анализа колебательных режимов. Подробное описание программы и её возможностей приведено в работе [33].

Исходя из главного окна интерфейса (рис. 1) дадим описание основных блоков (рис. 2) компьютерной программы FracDynZe:

1. Инициализация GUI.

Создание главного окна с размерами 1200×900 ; настройка шрифтов для matplotlib; создание элементов интерфейса: меню «Файл» с опциями сохранения и выхода, панели параметров модели $(\alpha, \beta, \theta, \varepsilon, T, N, x_0, y_0)$, кнопок управления (расчет, сброс), области для трех графиков.

2. Расчет модели (calculate_and_plot).

Получение и валидация параметров; расчет временного шага τ и коэффициентов; вычисление весовых коэффициентов для дробных производных; численное решение системы дифференциальных уравнений; построение графиков в реальном времени.

3. Вспомогательные функции.

reset_parameters() — сброс к значениям по умолчанию; save_plot() — сохранение графиков в файл; update_progress() — обновление индикатора выполнения.

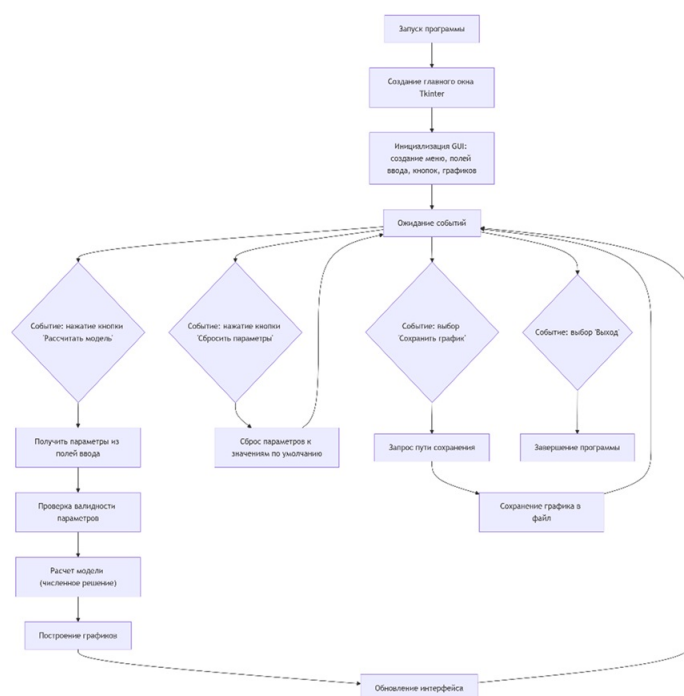


Рис. 2. Блок-схема компьютерной программы FracDynZe

6. Результаты численного моделирования

Приведем некоторые примеры работы компьютерной программы FracDynZe.

Пример 6.1. Значения параметров дробного осциллятора Зимана (2.1): $\alpha = 0.8$, $\beta = 0.6$, $\varepsilon = 0.1$, $\theta = 0.1$, $T = 100$, $N = 20000$, $x_0 = 0.2$, $y_0 = 0.1$.

Результаты моделирования приведены на рис. 3.

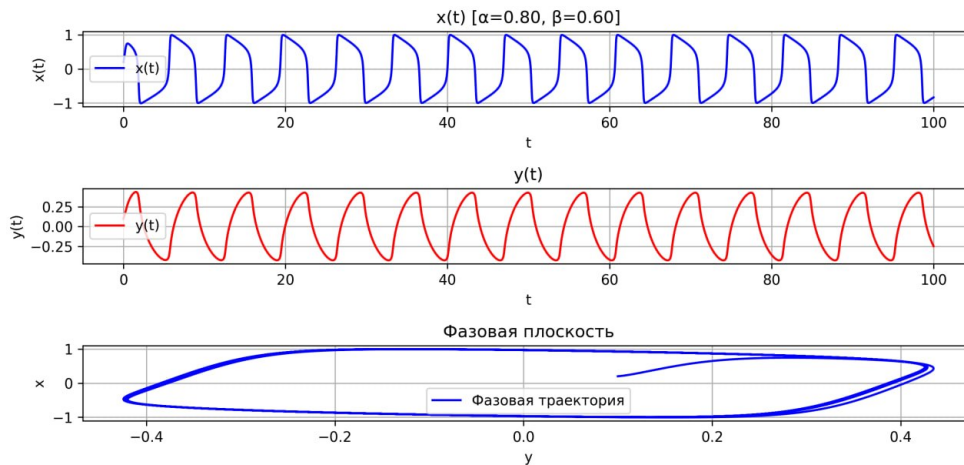


Рис. 3. Осциллограммы и фазовая траектория

На рис. 3 мы видим, что мышечные сокращения $x(t)$ происходят с постоянной амплитудой, также с постоянной амплитудой происходят и колебания электрохимического потенциала $y(t)$. Фазовая траектория со временем становится замкнутой, что говорит о наличии предельного цикла. В работе [26] было показано, что предельный цикл может быть устойчивым.

Пример 6.2. Возьмем начальные условия внутри предельного цикла на рис. 3: $x_0 = 0.5$, $y_0 = 0$. Значения остальных параметров возьмем из примера 6.1. В этом случае работа программы FracDynZe приведена на рис. 4.

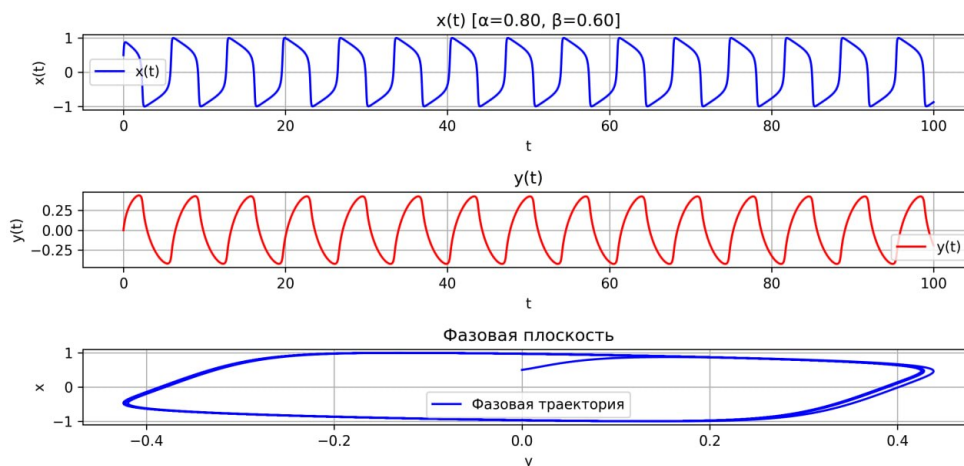


Рис. 4. Осциллограммы и фазовая траектория при $x_0 = 0.5$, $y_0 = 0$

Мы видим на рис. 4, что поведение осциллограмм не поменялось, и, как следствие, предельный цикл также остается без изменения. Однако необходимо отметить, что этот факт нуждается в строгом обосновании. Известно,

что классический осциллятор Зимана относится к классу осцилляторов лъенаровского типа [37], для которых справедлива теорема Пуанкаре–Бендиксона о существовании единственного устойчивого предельного цикла. Для дробных осцилляторов вопрос строгого обоснования существования устойчивого предельного цикла является открытым и заслуживает отдельного исследования.

Дробная динамическая система Зимана может обладать и квази хаотическими режимами.

Пример 6.3. Рассмотрим для примера результаты, полученные на рис. 3. Уменьшим количество точек расчетной сетки до $N = 5000$ и возьмем $\alpha = 0.98, \varepsilon = 0.02$. Значения остальных параметров возьмем из примера 6.1. Для этого случая результаты работы компьютерной программы FracDynZe приведены на рис. 5.

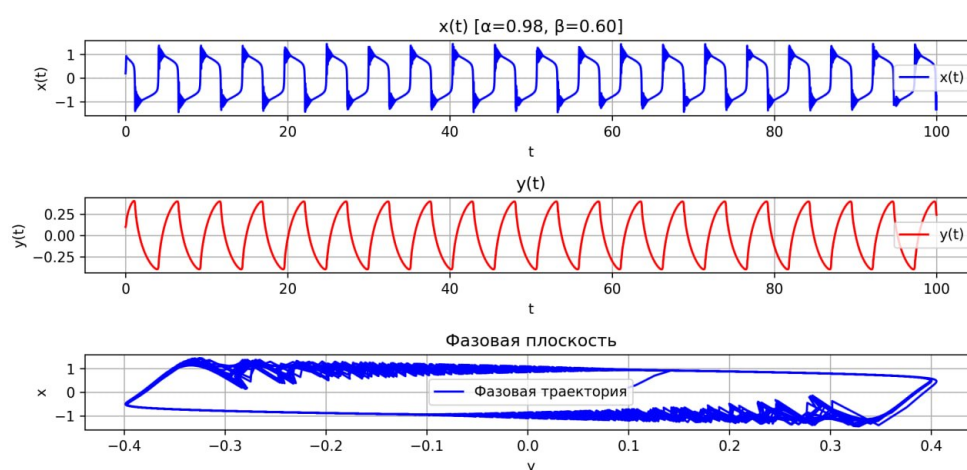


Рис. 5. Осциллограммы и фазовая траектория при $N = 5000$

Мы видим на рис. 5, что осциллограммы имеют сложную форму, но сохраняют периодичность колебаний. В то же время фазовая траектория имеет замкнутую траекторию, форма которой похожа на хаотическую. Для более достоверного результата необходимо провести качественное исследование регулярных и хаотических режимов, например по аналогии с работой [13], которая посвящена построению бифуркационных диаграмм и карт динамических режимов [12]. Аналогичные эффекты бифуркаций и хаотического поведения наблюдаются в других дробных динамических системах [38], что подтверждает универсальность механизмов усложнения динамики при переходе к дробным операторам.

Из приведенных выше результатов моделирования можно предположить, что эффекты наследственности могут играть ключевую роль в разработке новой методики патологий человеческого сердца. Например, рис. 5 может указывать на аритмию сердца, а другие режимы колебаний, отличные от нормальных, могут указывать на тахикардию [30]. Поэтому важно с практической точки зрения исследовать экспериментальные данные различных патологий сердца и сопоставлять их с данными, полученными в рамках моделей.

7. Заключение

В настоящей работе проведено комплексное исследование устойчивости и сходимости нелокальной явной конечно-разностной схемы, предназначенной для численного решения задачи Коши для дробного осциллятора Зимана. Рассматриваемая модель основана на использовании дробных производных в смысле Герасимова–Капуто [31, 32], что позволяет учитывать эффекты памяти и нелокальности, характерные для широкого класса прикладных задач [3, 8].

В рамках работы получены строгие теоретические результаты, касающиеся свойств предложенного численного алгоритма. В частности, доказано, что построенная схема является условно устойчивой при выполнении определённых ограничений на шаг временной сетки. Кроме того, установлена сходимость схемы с первым порядком точности по времени и получены априорные оценки погрешности численного решения. Полученное условие на шаг сетки носит явный характер и может быть непосредственно использовано при практической реализации алгоритма [11].

Для подтверждения теоретических выводов были проведены численные эксперименты с использованием разработанной компьютерной программы FracDynZe, реализованной на языке программирования Python [35]. Результаты вычислительных экспериментов, основанные на применении правила Рунге, демонстрируют, что вычислительный порядок точности схемы действительно стремится к единице при уменьшении шага дискретизации. Полученные осциллограммы и фазовые траектории позволяют анализировать динамическое поведение системы и выявлять различные режимы функционирования, включая автоколебательные режимы.

Проведённое численное моделирование показало, что дробный осциллятор Зимана, являющийся обобщением классической модели [25], способен воспроизводить как регулярные, так и более сложные режимы динамики. В частности, наблюдается формирование предельных циклов, а также режимов, обладающих признаками сложного (в том числе квазихаотического) поведения, что согласуется с результатами других исследований дробных динамических систем [12, 13, 14, 15, 38].

Практическая значимость работы заключается в возможности использования предложенной численной схемы и разработанного программного комплекса для анализа колебательных процессов в системах с памятью. Полученные результаты могут быть применены при моделировании физиологических процессов, включая анализ патологий сердечного ритма, таких как аритмия и тахикардия [28, 29, 30], а также при исследовании других нелинейных динамических систем [23, 24, 5].

Дальнейшее развитие исследований может быть направлено на более глубокий качественный анализ дробного осциллятора Зимана, включая исследование структуры фазового пространства, изучение точек покоя и их устойчивости, а также строгий анализ существования и единственности предельных циклов по аналогии с классическими результатами теории нелинейных колебаний [37]. Кроме того, представляет интерес исследование бифуркационных сценариев и построение карт динамических режимов в зависимости от параметров модели [12]. Перспективным направлением является также построение энергетически устойчивых схем [19] и схем на неравномерных сетках [16, 18] для повышения эффективности численного анализа.

Перспективным направлением является также расширение разработанной модели за счёт учёта дополнительных физических факторов и привлечение экспериментальных данных для валидации результатов моделирования. Это позволит повысить адекватность модели и расширить область её практического применения.

Финансирование. Работа выполнена в рамках Соглашения между Институтом математики им. В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан и Федеральным государственным бюджетным научным учреждением «Институт космофизических исследований и распространения радиоволн Дальневосточного отделения Российской академии наук» о сотрудничестве в области математических исследований (№ 117 от 28 апреля 2022 г.).

Список литературы

- [1] Oldham K.B., Spanier J. *The Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*. Academic Press, London, 1974.
- [2] Нахушев А.М. *Дробное исчисление и его приложения*. Физматлит, Москва, 2003.
- [3] Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Elsevier, Amsterdam, 2006.
- [4] Работнов Ю.Н. *Элементы наследственной механики твёрдых тел*. Наука, Москва, 1977.
- [5] Akbar T., Arifeen S. U., Ali I., Idris S. A., Islam S. Computational study of variable order time-fractional differential equations arising in modeling of transport processes and viscoelastic oscillator. *Ain Shams Engineering Journal*, 2025. Vol. 16, No. 9. 103532. DOI: 10.1016/j.asej.2025.103532.

- [6] Metzler R., Klafter J. The random walk's guide to anomalous diffusion. *Physics Reports*, 2000, Vol. 339, No. 1. P. 1–77. DOI: 10.1016/S0370-1573(00)00070-3.
- [7] Lopes A.M., Machado J.A.T. A review of fractional order entropies *Entropy*, 2017, vol. 22, no. 12. 1374. DOI: 10.3390/e22121374.
- [8] Mainardi F. *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity*. World Scientific Publishing Company, 2022.
- [9] Angstmann C.N., Henry B.I., McGann A.V. A fractional-order infectivity SIR model. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2016. Vol. 452. P. 86–93. DOI: 10.1016/j.physa.2016.02.029.
- [10] Fichera G. *Analytical Problems of Heredity Phenomena*. Springer, Berlin, 2011. P. 109–169.
- [11] Parovik R.I. On a Finite-Difference Scheme for a Hereditary Oscillatory Equation. *Journal of Mathematical Sciences*, 2021. Vol. 253, No. 4. P. 547–557. DOI: 10.1007/s10958-021-05252-2.
- [12] Parovik R.I. Studies of the fractional Selkov dynamical system for describing the self-oscillatory regime of microseisms. *Mathematics*, 2022. Vol. 10, No. 22. 4208. DOI: 10.3390/math10224208.
- [13] Parovik R.I. Study of bifurcation diagrams of Selkov's fractional dynamic system. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*, 2024. Vol. 49, No. 4. P. 24–35. DOI: 10.26117/2079-6641-2024-49-4-24-35.
- [14] Parovik R.I. Study of dynamic modes of fractional Selkov oscillator with variable coefficients using bifurcation diagrams. *Computational Mathematics and Modeling*, 2025. Vol. 36, No. 2. P. 319–336. DOI: 10.1007/s10598-025-09649-5.
- [15] Seoane J. M., Cocco M. Phase control of escapes in the fractional Helmholtz oscillator. *IFAC-PapersOnLine*, 2025. Vol. 59, No. 19. P. 204–209. DOI: 10.1016/j.ifacol.2025.11.035.
- [16] Zheng Z. Y., Wang Y. M. H^1 -norm Analysis of an Integral-Averaged L1 Method on Nonuniform Time Meshes for a Time-Fractional Diffusion Problem. *Journal of Scientific Computing*, 2025. Vol. 103, No. 3. 83. DOI: 10.1007/s10915-025-02906-0.
- [17] Jiang Y., Chen H., Huang C. Stability and Local Convergence of an ADI Scheme for a Multi-Term Time-Fractional Reaction-Subdiffusion Equation. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 2025. Vol. 41, No. 5. e70028.
- [18] Chen S., Ding H. High-order numerical method for Caputo–Hadamard fractional reaction-diffusion equations using nonuniform temporal mesh. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2025. DOI: 10.1016/j.matcom.2025.09.022.
- [19] Gao R., Li D., Li Y., Yin Y. An energy-stable variable-step L1 scheme for time-fractional Navier–Stokes equations. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2024. Vol. 467, 134264. DOI: 10.1016/j.physd.2024.134264.
- [20] Zhang Y., Liu F., et al. Generalized exponential time differencing for fractional oscillation models. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2024.
- [21] Zhang X. A fast second-order block-centered finite difference method for the fractional Cattaneo equation. *AIMS Mathematics*, 2025, Vol. 10, No. 6. P. 14196–14221. DOI: 10.3934/math.2025640.
- [22] Tan T., Liu H., Bu W. L1-FEM discretizations for two-dimensional multiterm fractional delay diffusion equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2024. Vol. 139. 108285. DOI: 10.1016/j.cnsns.2024.108285.
- [23] Traver J.E., Nuevo-Gallardo C., Tejado I., Fernández-Portales J., Ortega-Morán J.F., Pagador J.B., Vinagre B.M. Cardiovascular Circulatory System and Left Carotid Model: A Fractional Approach to Disease Modeling. *Fractal and Fractional*, 2022. Vol. 6, No. 2. 64. DOI: 10.3390/fractalfract6020064.
- [24] Alimov Kh.T., Parovik R.I. Simulation of artificial ECGs of a healthy person using the fractional McSherry model. *AIP Conference Proceedings*, 2024. Vol. 3244, No. 1. 020005. DOI: 10.1063/5.0241420.
- [25] Zeeman E.C. Differential equations for the heartbeat and nerve impulse. *Dynamical Systems*, 1973.
- [26] Israyiljanova G.S., Karimov Sh.T., Parovik R.I. Zeman's mathematical fractional model for describing cardiac contractions. *AIP Conference Proceedings*, 2025. Vol. 3356, No. 1. 020010. DOI: 10.1063/5.0296360.
- [27] Israyiljanova G.S., Karimov Sh.T., Parovik R.I. Mathematical Fractional Zeeman Model for Describing Cardiac Contractions. *Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences*, 2024. Vol. 48, No. 3. P. 83–94. DOI: 10.26117/2079-6641-2024-48-3-83-94.
- [28] Ugarte J.P., Tobón C. Fractional-order modeling of myocardium structure effects on atrial fibrillation electrograms. *Mathematical Biosciences*, 2024. Vol. 378. 109331. DOI: 10.1016/j.mbs.2024.109331.
- [29] Takha A., Talbi M.L., Ravier P. Fractional calculus integration for improved ECG modeling: A McSharry model expansion. *Medical Engineering & Physics*, 2024. Vol. 132, No. 1. 104237. DOI: 10.1016/j.medengphy.2024.104237.
- [30] Nabil H., Tayeb H. Chaos and complexity in a cardiac pacemaker model with incommensurate fractional-order dynamics: Empirical validation and cardiovascular implications. *Chinese Physics B*, 2026. Vol. 35, No. 7. 078702. DOI: 10.1088/1674-1056/ae0b3c.
- [31] Novozhenova O.G. Life And Science of Alexey Gerasimov, One of the Pioneers of Fractional Calculus in Soviet Union. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2017. Vol. 20, No. 3. P. 790–809. DOI: 10.1515/fca-2017-0040.
- [32] Caputo M., Fabrizio M. On the notion of fractional derivative and applications to the hysteresis phenomena. *Meccanica*, 2017. Vol. 52, No. 13. P. 3043–3052. DOI: 10.1007/s11012-017-0652-y.
- [33] Паровик Р.И., Исраилжанова Г.С. FracDynZe – компьютерная программа исследования динамики работы сердца в рамках дробного осциллятора Зимана. *Проблемы вычислительной и прикладной математики*, 2026. №. 2 (72). С. 5–15. DOI: 10.71310/psam.2_72.2026.01.
- [34] Wend J., McKee S. Weakly singular discrete Gronwall inequalities. *ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1986. Vol. 66, No. 11. P. 535–544. DOI: 10.1002/zamm.19860661115.
- [35] Shaw Z.A. *Learn Python the Hard Way*. Addison-Wesley, 2024.
- [36] Van Horn B.M. II, Nguyen Q. *Hands-On Application Development with PyCharm: Build Applications like a Pro with the Ultimate Python Development Tool*. Packt Publishing Ltd., Birmingham, UK, 2023.
- [37] Liénard A. Étude des oscillations entretenues. *Revue générale de l'électricité*, 1928.
- [38] Wang X., Nageen M., Abbas M., Yousaf M. Z., Alharthi M. R., El-Zahar E. R. Bifurcations, chaotic behaviour, sensitivity analysis, and diverse soliton structures for fractional nonlinear Kraenkel-Manna-Merle system adopting two techniques. *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, 2025. Vol. 31, No. 1. 2546531. DOI: 10.1080/13873954.2025.2546531.

Stability and Convergence Issues of a Nonlocal Explicit Finite-Difference Scheme for the Numerical Analysis of the Fractional Zeeman Oscillator

G. S. Israyiljanova and R. I. Parovik

Abstract

In this paper, the stability and convergence of a nonlocal explicit finite-difference scheme for the numerical solution of the Cauchy problem for the fractional Zeeman oscillator are investigated. The model generalizes the classical Zeeman oscillator and is intended to describe oscillatory regimes of muscle fiber contraction with memory effects. The Gerasimov–Caputo fractional derivatives are approximated by an explicit L_1 -type scheme of first order in time. Stability conditions are obtained, first-order convergence in time is proved, and an explicit restriction on the time step, depending on the fractional orders and model parameters, is established. The proof uses Lipschitz conditions for the right-hand sides, error estimates for the L_1 approximation, summation by parts, and a discrete fractional Gronwall inequality. Numerical results based on the Runge rule confirm the first-order accuracy of the proposed algorithm. On the basis of the scheme, the `FracDynZe` computer program is implemented in Python, which allows one to construct oscillograms and phase trajectories and to study regular, self-oscillatory, and quasi-chaotic regimes. Applications of the model to the analysis of heart rhythm pathologies and prospects for further study of limit cycles and bifurcations are discussed.

Keywords

fractional oscillator; finite-difference scheme; stability; convergence; numerical simulation; fractional calculus

Affiliations

G. S. Israyiljanova

Address: Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan; Academic Lyceum No. 2 at Fergana State Technical University, Fergana, Uzbekistan.

e-mail: gulbaxor19802020@gmail.com

ORCID ID: <https://orcid.org/0009-0007-9356-3476>

R. I. Parovik

Address: V.I. Romanovsky Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan; Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, FEB RAS, Paratunka, Russia.

e-mail: parovik@ikir.ru

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-1576-1860>