Uzbekistan Journal of Mathematics and Computer Science
Volume-2, Issue-2, Page 131–142 (2026)
DOI: https://doi.org/10.56143/ujmcs.v2i2.11
Research article

ИНТЕГРИРОВАНИЕ НАГРУЖЕННОГО МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА ПЯТОГО ПОРЯДКА С РАСШИРЕНИЕМ В КЛАССЕ БЫСТРОУБЫВАЮЩИХ ФУНКЦИЙ

Хоитметов Умид Азадович* Собиров Шехзод Кучкарбой угли

Аннотация

В данной статье рассматривается задача Коши для нагруженного модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза пятого порядка с расширением в классе быстроубывающих функций. Получена эволюция данных рассеяния оператора Дирака, потенциал которого является решением нагруженного модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза пятого порядка с расширением в классе быстроубывающих функций. Приведены примеры, иллюстрирующие применение полученных результатов. Приводится пример для иллюстрации применения полученных результатов.

Ключевые слова: *Модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза; решения Йоста; данные рассеяния; интегральное уравнение Гельфанда-Левитана-Марченко.*

Предметная классификацие AMS (2020): *Основная: 37K15 ; Дополнительная: 34L25, 35P25, 47A40.*

1. Введение.

За последние несколько лет были достигнуты значительные успехи в определении решений нелинейных эволюционных уравнений. Есть много способов их решения. Например, билинейный метод Хироты [1], метод Вронского [2] и другие [3]-[4]. Метод обратных задач теории рассеяния применяется в основном для решения нелинейных эволюционных уравнений в классе быстроубывающих функций. Задача Коши для этого

$$u_t + 6u^2u_x + u_{xxx} = 0$$

модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза (мКдФ), представляющего собой нелинейное эволюционное уравнение, была впервые решена М. Вадати с использованием метода обратных задач теории рассеяния [5]. Уравнение мКдФ может применяться во многих областях, включая альфвеновские волны в бесстолкновительной плазме [6], ангармонические решетки [7], и т.д. В исследовании малоамплитудных поверхностных волн, распространяющихся по каналам с медленно меняющейся геометрией и ненулевой вихревостью, в работе [8] введено обобщённое модифицированное уравнение Кортевега–де Фриза пятого порядка для описания динамики

Received : *30–march–2026,* ***Accepted :*** *30–october–2026*
*** Corresponding author***

системы. Это уравнение имеет следующий вид:

$$u_t + 30u^4u_x + 10u_x^3 + 40uu_xu_{xx} + 10u^2u_{xxx} + u_{xxxxx} + \beta(t)u_x = 0$$

где $u(x,t)$ описывает амплитуду волны как функцию масштабированной пространственной координаты x и времени t. Коэффициент $\beta(t)$ учитывает временные изменения геометрии и физических свойств системы, отражая неоднородности среды. Существенным вкладом работы [8] является доказательство интегрируемости данного уравнения. В работах А.М. Нахушева [9] дано наиболее общее определение нагруженного уравнения и подробно классифицированы различные нагруженные уравнения, например, нагруженный дифференциальные, нагруженные интегральные, нагруженные интегро-дифференциальные, нагруженные функциональные уравнения и т.д. Среди работ, посвященных нагруженным уравнениям, следует особо отметить работы [10], [11], [12], [13], [14], [15] и др.

2. Постановка задачи.

В данной работе изучается нагруженное модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза пятого порядка, а именно рассматривается следующая уравнений

$$\begin{aligned} u_t + P\left(u(x_0,t)\right)\left(30u^4u_x + 10u_x^3 + 40uu_xu_{xx} + 10u^2u_{xxx} + u_{xxxxx}\right) + \\ + H\left(u(x_2,t)\right)\left(6u^2u_x + u_{xxx}\right) + Q\left(u(x_1,t)\right)u_x = 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

нагруженное пятого порядка модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза. Где $P\left(u(x_0,t)\right)$, $Q\left(u(x_1,t)\right)$, $H\left(u(x_2,t)\right)$ — многочлены от $u(x_0,t)$, $u(x_1,t)$ и $u(x_2,t)$ соответственно, их степени не превышают n и $x_0,\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Уравнение (2.1) рассматривается при начальном условии

$$u(x,0) = u_0(x). \tag{2.2}$$

При этом начальная функция $u_0(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ обладает следующими свойствами:

1)

$$|u_0(x)|\, e^{\varepsilon|x|} \le C(1+|x|)^{-1-\eta}, \tag{2.3}$$

где $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$ и $C > 0$ положительные константы;

2) Оператор

$$L(0) = i\begin{pmatrix} \frac{d}{dx} & -u_0(x) \\ -u_0(x) & -\frac{d}{dx} \end{pmatrix}$$

имеет ровно N простых собственных значений $\xi_1(0), \xi_2(0), ..., \xi_N(0)$ в верхней полуплоскости и не имеет спектральных особенностию.

Предположим, что функция $u(x,t)$ обладает требуемой гладкостью и достаточно быстро стремится к своим пределам при $x \to \pm\infty$, т.е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\varepsilon x}\left(\sum_{k=0}^{5}\left|\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial x^k}\right|\right)dx < \infty. \tag{2.4}$$

Основной целью работы является получение представлений для решения $u(x,t)$, задачи (2.1)-(2.4) в рамках метода обратной задачи рассеяния для оператора $L(t) = i\begin{pmatrix} \frac{d}{dx}, & -u(x,t) \\ -u(x,t) & -\frac{d}{dx} \end{pmatrix}$.

3. Необходимые сведения.

Рассмотрим следующее система уравнений Дирака

$$\begin{cases} \nu_{1x} + i\xi\,\nu_1 = u_0(x)\nu_2\,, \\ \nu_{2x} - i\xi\,\nu_2 = -u_0(x)\nu_1, \end{cases} \tag{3.1}$$

на всей оси $(-\infty < x < +\infty)$, с потенциалом удовлетворяющим условию (2.3). Видно, что с помощью оператора $L(0)$ и вектор-функции $\nu = (\nu_1,\, \nu_2)$ систему (3.1) можно переписать в виде

$$L\nu = \xi\nu. \tag{3.2}$$

Система уравнений (3.2) имеет решения Йоста со следующей асимптотико

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x,\xi) &\sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi\,x} \\ \bar{\varphi}(x,\xi) &\sim \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i\xi\,x} \end{aligned}\right\},\ x \to -\infty; \qquad \left.\begin{aligned} \psi(x,\xi) &\sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\xi\,x} \\ \bar{\psi}(x,\xi) &\sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi\,x} \end{aligned}\right\},\ x \to \infty. \tag{3.3}$$

(Отметим, что $\bar{\varphi}\,(\bar{\psi})$ не является комплексным сопряжением к $\varphi\,(\psi)$). При действительных ξ, пары вектор-функций $\{\varphi, \bar{\varphi}\}$ и $\left\{\psi, \bar{\psi}\right\}$ являются парами линейно независимых решений для системы уравнений (5). Поэтому имеют место следующие соотношения

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= a(\xi)\bar{\psi} + b(\xi)\psi \\ \bar{\varphi} &= -\bar{a}(\xi)\psi + \bar{b}(\xi)\bar{\psi} \end{aligned}\right\}, \qquad \left.\begin{aligned} \psi &= -a(\xi)\bar{\varphi} + \bar{b}(\xi)\varphi \\ \bar{\psi} &= \bar{a}(\xi)\varphi + b(\xi)\bar{\varphi} \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

где $a(\xi) = W\,\{\varphi, \psi\}, b(\xi) = W\,\{\bar{\varphi}, \psi\}$. Верны следующие равенства

$$|a(\xi)|^2 + |b(\xi)|^2 = 1\,, \bar{a}(\xi) = a(-\xi)\,, \bar{b}(\xi) = b(-\xi).$$

Коэффициенты $a(\xi)$ и $b(\xi)$ непрерывны для $\operatorname{Im}\xi = 0$ и удовлетворяют асимптотическим равенствам:

$$a(\xi) = 1 + O\left(|\xi|^{-1}\right),\, b(\xi) = O\left(|\xi|^{-1}\right), |\xi| \to \infty.$$

Функцию $\psi(x,\, \xi)$ можно представить следующим образом (см. [16], с. 33):

$$\psi(x,\xi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\xi\,x} + \int\limits_x^\infty K\,(x,s) e^{i\xi\,s} ds, \tag{3.5}$$

где $\mathbf{K}\,(x,s) = (K_1(x,s),\, K_2(x,s))^T$. В представлении (3.5) ядро $\mathbf{K}(x,s)$ не зависит от ξ и выполняется равенство

$$u(x) = -2K_1(x,x). \tag{3.6}$$

Функция $a(\xi)$ $(\bar{a}(\xi))$ аналитически продолжается в верхнюю (нижнюю) полуплоскость и имеет там конечное число нулей $\xi_k(\bar{\xi}_k)$, причем ξ_k $(\bar{\xi}_k)$ является собственным значением оператора $L(0)$, так что верно следующее равенство

$$\varphi(x,\xi_k) = C_k\psi(x,\xi_k),\, \bar{\varphi}(x,\xi_k) = \bar{C}_k\bar{\psi}(x,\bar{\xi}_k),\, k = 1,2,..,N.$$

Определение. Набор величин $\left\{r^+(\xi) \equiv \frac{b(\xi)}{a(\xi)}, \quad \xi_k, \ C_k, \quad k = 1, 2, ..., N\right\}$ называется данными рассеяния для оператор $L(0)$.

Компоненты ядра $\mathbf{K}(x, y)$ в представлении (3.6) для $y > x$ являются решениями системы интегральных уравнений Гельфанда-Левитана-Марченко

$$\begin{cases} K_2(x,y) + \int_x^\infty K_1(x,s)F(s+y)\,ds = 0, \\ -K_1(x,y) + F(x+y) + \int_x^\infty K_2(x,s)F(s+y)\,ds = 0. \end{cases} \tag{3.7}$$

где

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} r^+(\xi)\ e^{i\xi\, x}d\xi - i\sum_{j=1}^{N} C_j e^{i\xi_j x}.$$

Заметим, что векторные функции

$$h_n(x) = \frac{\frac{d}{d\xi}\left(\varphi - C_n\psi\right)|_{\xi=\xi_n}}{\dot{a}(\xi_n)}, \quad n = \overline{1, N},$$

являются решениями уравнений $L(0)h_n = \xi_n h_n$. Кроме того, функции $h_n(x)$ имеют следующую асимптотику

$$h_n \sim -\,C_n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\xi_n x}, x \to -\infty,\ h_n \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi_n x}, x \to \infty. \tag{3.8}$$

Согласно (3.8), получаем следующее равенство

$$W\left\{\varphi_n, h_n\right\} \equiv \varphi_{n1}h_{n2} - \varphi_{n2}h_{n1} = -\,C_n, n = 1, 2, ..., N.$$

Теорема 3.1 ([17]). *Чтобы это множество* $\{a(\xi),\ b(\xi),\ \xi \in \mathbb{R},\ \xi_k, \quad \mathrm{Im}\,\xi_k > 0, \ C_k, \ k = 1, 2, ..., N\}$ *состояло из данных теории рассеяния оператора Дирака L, необходимыми и достаточными являются следующие условия:*

1º. Функции $a(\xi)$ *и* $b(\xi)$ *непрерывны на действительной оси и удовлетворяют следующему соотношению*

$$a(\xi) = 1 + O\left(\frac{1}{|\xi|}\right),\ |\xi| \to +\infty, b(\xi) = O\left(\frac{1}{|\xi|}\right),\ |\xi| \to +\infty.$$

2º. Функция $a(\xi)$ *аналитически продолжается в верхнюю полуплоскость при* $\mathrm{Im}\xi > 0$ *и имеет простые нули в пределе* $\xi_k (k = \overline{1, N})$. *Также функция* $a(\xi)$ *не имеет нулей на вещественной оси, то есть* $a(\xi) \neq 0,\ \xi \in \mathbb{R}$ *и удовлетворяет асимптотическому соотношению*

$$a(\xi) = 1 + O\left(\frac{1}{|\xi|}\right), \mathrm{Im}\,\xi \geq 0, |\xi| \to +\infty.$$

3º. Для функции $a(\xi)$ *справедлива следующая формула*

$$a(\xi) = \exp\left\{-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(1 + r^+(z)}{z - \xi}dz\right\} \prod_{j=1}^{N} \frac{\xi - \xi_j}{\xi + \xi_j}, \quad \mathrm{Im}\,\xi > 0, \quad r^+(z) = \frac{b(z)}{a(z)}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

4º. Следующая система однородных интегральных уравнений $\mathbf{K}(x,y)+\int\limits_x^{+\infty}\mathbf{K}(x,s)\mathbf{F}(s+y)ds=0$ *имеет только ноль* $\mathbf{K}(x,y)\equiv 0$, $y>x$, *то есть решение. Где*

$$\mathbf{K}(x,y)=\begin{pmatrix}\bar{K}_1(x,y) & K_1(x,y)\\ \bar{K}_2(x,y) & K_2(x,y)\end{pmatrix},\ \mathbf{F}(x)=\begin{pmatrix}0 & -\overline{F}(x)\\ F(x) & 0\end{pmatrix},$$
$$\bar{K}_1(x,y)=K_2(x,y),\quad \bar{K}_2(x,y)=-K_1(x,y)$$

$$F(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}r^+(\xi)e^{i\xi x}d\xi-i\sum_{k=1}^{N}C_ke^{i\xi_k x},\qquad \bar{F}(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}r^+(-\xi)e^{-i\xi x}d\xi+i\sum_{k=1}^{N}C_ke^{-i\xi_k x}.$$

5º. Функции $f_1(x)$ *и* $f_2(x)$, *определяемые этими равенствами*

$$f_1(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}r^+(\xi)e^{i\xi x}d\xi,\ f_2(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}r^+(-\xi)e^{-i\xi x}d\xi$$

удовлетворяют следующим соотношениям

$$|f_1(x)|\le C_1\,e^{-\varepsilon|x|},|f_2(x)|\le\ C_2\,e^{-\varepsilon|x|},C_1,\ C_2=const$$

соответственно.

Теорема 3.2 ([17]). *Данные рассеяния оператора* L *однозначно определяют* L.

4. Эволюция данных рассеяния

Пусть потенциал $u(x,t)$

$$\begin{cases}y'_{1x}(x,\xi,t)+i\xi y_1(x,\xi,t)=u(x,t)y_2(x,\xi,t),\\ y'_{2x}(x,\xi,t)-i\xi y_2(x,\xi,t)=-u(x,t)y_1(x,\xi,t).\end{cases}\tag{4.1}$$

в системе уравнений (4.1) является решением уравнения

$$u_t+P\left(u(x_0,t)\right)\left(30u^4u_x+10u_x^3+40uu_xu_{xx}+10u^2u_{xxx}+u_{xxxxx}\right)+\tag{4.2}$$
$$+H\left(u(x_2,t)\right)\left(6u^2u_x+u_{xxx}\right)=G(x,t)$$

где $G(x,t)=-Q\left(u(x_1,t)\right)u_x$. Оператор

$$A=P\left(u(x_0,t)\right)\begin{pmatrix}16i\xi^5-8i\xi^3u^2+6i\xi u^4 & -16\xi^4u-8i\xi^3u_x+8\xi^2u^3+4\xi^2u_{xx}+12i\xi u^2u_x\\ 16\xi^4u-8i\xi^3u_x-8\xi^2u^3-4\xi^2u_{xx}+12i\xi u^2u_x & -16i\xi^5+8i\xi^3u^2-6i\xi u^4\end{pmatrix}+$$
$$+P\left(u(x_0,t)\right)\begin{pmatrix}4i\xi uu_{xx}-2i\xi u_x^2 & 2i\xi u_{xxx}-6u^5-10u^2u_{xx}-10uu_x^2-u_{xxxx}\\ 2i\xi u_{xxx}+6u^5+10u^2u_{xx}+10uu_x^2+u_{xxxx} & -4i\xi uu_{xx}+2i\xi u_x^2\end{pmatrix}+$$
$$+H\left(u(x_2,t)\right)\begin{pmatrix}-4i\xi^3+2iu^2\xi & 4u\xi^2+2iu_x\xi-2u^3-u_{xx}\\ -4u\xi^2+2iu_x\xi+2u^3+u_{xx} & 4i\xi^3-2iu^2\xi\end{pmatrix}\tag{4.3}$$

удовлетворяет соотношению Лакса

$$[L,A]\equiv LA-AL=i\begin{pmatrix}0 & P\left(u(x_0,t)\right)\left(-30u^4u_x-10u_x^3\right)\\ P\left(u(x_0,t)\right)\left(-30u^4u_x-10u_x^3\right) & 0\end{pmatrix}+$$

$$+i\begin{pmatrix} 0 & P\left(u(x_0,t)\right)\left(-40uu_xu_{xx}-10u^2u_{xxx}-u_{xxxxx}\right) \\ P\left(u(x_0,t)\right)\left(-40uu_xu_{xx}-10u^2u_{xxx}-u_{xxxxx}\right) & 0 \end{pmatrix}+$$

$$+i\begin{pmatrix} 0 & H\left(u(x_2,t)\right)\left(-6u^2u_x-u_{xxx}\right) \\ H\left(u(x_2,t)\right)\left(-6u^2u_x-u_{xxx}\right) & 0 \end{pmatrix}$$

Поэтому уравнение (4.2) можно переписать в виде

$$L_t+[L,A]=iR, \tag{4.4}$$

где $R=\begin{pmatrix} 0 & -G \\ -G & 0 \end{pmatrix}$. Дифференцируя следующее

$$L\varphi=\xi\varphi,$$

равенство относительно t, получаем

$$L_t\varphi+L\varphi_t=\xi\varphi_t$$

которое согласно (4.4) можно переписать в виде

$$(L-\xi)\left(\varphi_t-A\varphi\right)=-iR\varphi. \tag{4.5}$$

Используя метод вариации постоянных, можно записать

$$\varphi_t-A\varphi=B(x)\psi+D(x)\varphi. \tag{4.6}$$

Тогда для определения $B(x)$ и $D(x)$ получаем

$$MB_x\psi+MD_x\varphi=-R\varphi, \tag{4.7}$$

где $M=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Решая эту систему уравнений,

$$B_x=\frac{\hat{\varphi}^TR\varphi}{a},\quad D_x=-\frac{\hat{\psi}^TR\varphi}{a}. \tag{4.8}$$

Согласно (4.3), при $x\to-\infty$ имеем

$$\varphi_t-A\varphi\to P\left(u(x_0,t)\right)\begin{pmatrix} -16i\xi^5 & 0 \\ 0 & 16i\xi^5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}e^{-i\xi x}+$$

$$+H\left(u(x_2,t)\right)\begin{pmatrix} 4i\xi^3 & 0 \\ 0 & -4i\xi^3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -16i\xi^5P\left(u(x_0,t)\right)+4i\xi^3H\left(u(x_2,t)\right) \\ 0 \end{pmatrix}e^{-i\xi x},$$

поэтому, исходя из (4.6), получаем следующее равенство

$$D\left(x\right)\to-16i\xi^5P\left(u(x_0,t)\right)+4i\xi^3H\left(u(x_2,t)\right),\ B\left(x\right)\to0,\ x\to-\infty.$$

Следовательно, из (4.8) можно определить

$$D\left(x\right)=-\frac{1}{a}\int\limits_{-\infty}^{x}\hat{\psi}^TR\varphi\,dx+4i\xi^3H\left(u(x_2,t)\right)-16i\xi^5P\left(u(x_0,t)\right),B\left(x\right)=\frac{1}{a}\int\limits_{-\infty}\hat{\varphi}^TR\varphi\,dx.$$

Таким образом, равенство (4.6) имеет следующий вид

$$\varphi_t - A\varphi = \frac{1}{a}\int\limits_{-\infty}^{x} \hat{\varphi}^T R\varphi\, dx\psi + \left(-\frac{1}{a}\int\limits_{-\infty}^{x} \hat{\psi}^T R\varphi\, dx + 4i\xi^3 H\left(u_t(x_2,t)\right) - 16i\xi^5 P\left(u_t(x_0,t)\right)\right)\varphi. \tag{4.9}$$

Согласно (3.4), равенство (4.6) можно опереписать в следующем виде

$$a_t\bar{\psi} + b_t\psi - A\left(a\bar{\psi} + b\psi\right) = \frac{1}{a}\int\limits_{-\infty}^{x} \hat{\varphi}^T R\varphi dx\psi +$$

$$+\left(-\frac{1}{a}\int\limits_{-\infty}^{x} \hat{\psi}^T R\varphi\, dx + 4i\xi^3 H\left(u(x_2,t)\right) - 16i\xi^5 P\left(u(x_0,t)\right)\right)\left(a\bar{\psi} + b\psi\right).$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $x \to +\infty$ и учитывая (3.3), (4.3) получаем

$$a_t = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}^T R\varphi\, dx, \tag{4.10}$$

$$b_t = \frac{1}{a}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}^T R\varphi dx - \frac{b}{a}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}^T R\varphi\, dx + \left(-32i\xi^5 P\left(u(x_0,t)\right) + 8i\xi^3 H\left(u(x_2,t)\right)\right) b.$$

Следовательно, при $\mathrm{Im}\xi = 0$ имеем

$$\frac{dr^+}{dt} = \left(-32i\xi^5 P\left(u(x_0,t)\right) + 8i\xi^3 H\left(u(x_2,t)\right)\right) r^+ - \frac{1}{a^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G\left(\varphi_1^2 + \varphi_2^2\right) dx. \tag{4.11}$$

Лемма 4.1. *Если вектор-функции* $\varphi(x,\xi,t) = \left(\varphi_1(x,\xi,t),\, \varphi_2(x,\xi,t)\right)^T$, $\psi(x,\xi,t) = \left(\psi_1(x,\xi,t),\, \psi_2(x,\xi,t)\right)^T$ *является решением уравнения* (4.1)*, то её компоненты удовлетворяют следующему равенству*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G\left(\varphi_1^2 + \varphi_2^2\right) dx = 2i\xi Q\left(u(x_1,t)\right) a(\xi,t) b(\xi,t),$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G\left(\varphi_1\psi_1 + \varphi_2\psi_2\right) dx = 0.$$

Доказательство. Для доказательства леммы вычислим следующий интеграл, используя равенства (3.1), (3.3) и (3.4):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G\left(\varphi_1^2 + \varphi_2^2\right) dx = -Q\left(u(x_1,t)\right)\int_{-\infty}^{\infty} u_x\left(\varphi_1^2 + \varphi_2^2\right) dx = -Q\left(u(x_1,t)\right)\int_{-\infty}^{\infty}\left(\varphi_1^2 + \varphi_2^2\right) du =$$

$$= -Q\left(u(x_1,t)\right) u\left(\varphi_1^2 + \varphi_2^2\right)\Big|_{-\infty}^{\infty} + q(t)\int_{-\infty}^{\infty} u\left(\varphi_1^2 + \varphi_2^2\right)' dx = 2q(t)\int_{-\infty}^{\infty}\left(u\varphi_1\varphi_1' + u\varphi_2\varphi_2'\right) dx =$$

$$= 2Q\left(u(x_1,t)\right)\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\left(-\varphi_2' + i\xi\varphi_2\right)\varphi_1' + \left(\varphi_1' + i\xi\varphi_1\right)\varphi_2'\Big] dx =$$

$$= 2i\xi Q\left(u(x_1,t)\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\varphi_1\varphi_2\right)' dx = 2i\xi Q\left(u(x_1,t)\right) a(\xi,t) b(\xi,t).$$

Теперь, вычислите следующее интеграль:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G\left(\varphi_1\psi_1+\varphi_2\psi_2\right)dx=-Q\left(u(x_1,t)\right)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_x\left(\varphi_1\psi_1+\varphi_2\psi_2\right)dx=-\,Q\left(u(x_1,t)\right)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\varphi_1\psi_1+\varphi_2\psi_2\right)du(x,t)=$$

$$=Q\left(u(x_1,t)\right)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,\,t)\left(\varphi'_1\psi_1+\varphi_1\psi'_1+\varphi'_2\psi_2+\varphi_1\psi'_2\right)dx=Q\left(u(x_1,t)\right)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi'_1\left(-(\psi'_2-i\xi\psi_2)\right)dx+$$

$$+Q\left(u(x_1,t)\right)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\psi'_1\left(-(\varphi'_2-i\xi\varphi_2)\right)+\varphi'_2\left(\psi'_1+i\xi\psi_1\right)+\psi'_2\left(\varphi'_1+i\xi\varphi_1\right)\right)dx=$$

$$=i\xi Q\left(u(x_1,t)\right)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left((\varphi_1\psi_2)'+(\varphi_2\psi_1)'\right)dx=i\xi Q\left(u(x_1,t)\right)\left(\varphi_1\psi_2+\varphi_2\psi_1\right)|_{-\infty}^{+\infty}=0.$$

Лемма доказана.

Теперь на основании соотношений (4.10) и лемма 4.1 справедливо следующее равенство

$$a_t=0.$$

Согласно последнему соотношению можно получить следующее соотношение

$$\frac{d\xi_k(t)}{dt}=0,\ \ k=\overline{1,\,N}. \tag{4.12}$$

Дифференцируя уравнение $\varphi_n=C_n\psi_n$ по t и учитывая соотношения (4.12), получаем следующую формулу

$$\frac{\partial\varphi_n}{\partial t}=\frac{dC_n}{dt}\psi_n+C_n\frac{\partial\psi_n}{\partial t}. \tag{4.13}$$

Аналогично случаю непрерывного спектра в случае дискретного спектра получаем следующее равенство

$$\frac{\partial\varphi_n}{\partial t}-A\varphi_n=\left(-\frac{1}{C_n}\int\limits_{-\infty}^{x}\hat{\varphi}_n^T R\varphi_n dx\right)h_n+$$

$$+\left(\frac{1}{C_n}\int\limits_{-\infty}^{x}\hat{h}_n^T R\varphi_n dx+16i\xi_n^5 P\left(u(x_0,t)\right)+4i\xi_n^3 H\left(u(x_2,t)\right)\right)\varphi_n,$$

который является аналогом равенства (4.9). Согласно (4.13), последнее равенство можно переписать в следующем виде

$$\frac{dC_n}{\partial t}\psi_n+C_n\frac{\partial\psi_n}{\partial t}-C_nA\psi_n=\left(-\frac{1}{C_n}\int\limits_{-\infty}^{x}\hat{\varphi}_n^T R\varphi_n dx\right)h_n+$$

$$+\left(-\frac{1}{C_n}\int\limits_{-\infty}^{x}\hat{h}_n^T R\varphi_n dx-16i\xi_n^5 P\left(u(x_0,t)\right)+4i\xi_n^3 H\left(u(x_2,t)\right)\right)C_n\psi_n\,. \tag{4.14}$$

Согласно равенства (3.1), (3.3) вычислите следующее интеграль:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\hat{\varphi}_n^T R\varphi_n dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G\left(\varphi_{n1}^2+\varphi_{n2}^2\right)dx=-Q\left(u_t(x_1,t)\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty} u_x\left(\varphi_{n1}^2+\varphi_{n2}^2\right)dx=$$

$$= -Q\left(u(x_1,t)\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\varphi_{n1}^2+\varphi_{n2}^2\right)du = -\,Q\left(u(x_1,t)\right)u\left(\varphi_{n1}^2+\varphi_{n2}^2\right)|_{-\infty}^{\infty}+$$

$$+Q\left(u(x_1,t)\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty}u\left(\varphi_{n1}^2+\varphi_{n2}^2\right)'dx = 2i\xi_n Q\left(u(x_1,t)\right)\left(\varphi_{n1}\varphi_{n2}\right)|_{-\infty}^{\infty}=0.$$

Переходя в равенстве (4.15) к пределу при $x\to+\infty$, с учетом (3.3), (3.8), (4.3) и последнее равенство получаем следующие соотношение

$$\frac{dC_n}{dt}=\left(-32i\xi_n^5P\left(u(x_0,t)\right)+8i\xi_n^3H\left(u(x_2,t)\right)+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\hat{h}_n^TR\psi_n dx\right)C_n.$$

Таким образом, мы имеем следующие тождества

$$\frac{dC_n}{dt}=\left(-32i\xi_n^5P\left(u(x_0,t)\right)+8i\xi_n^3H\left(u(x_2,t)\right)-\int\limits_{-\infty}^{\infty}G\left(h_{n1}\psi_{n1}+h_{n2}\psi_{n2}\right)dx\right)C_n, \tag{4.15}$$

Лемма 4.2. *Если вектор-функции* $\psi_n(x,\xi_n,t)=\left(\psi_{n1}(x,\xi_n,t),\,\psi_{n2}(x,\xi_n,t)\right)^T$, $h_n(x,\xi_n,\,t)=\left(h_{n1}(x,\xi_n,\,t),\,h_{n2}(x,\xi_n,\,t)\right)^T$ *являются решениями уравнения* (4.1), *то их компоненты удовлетворяют равенствам*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}G\left(h_{n1}\psi_{n1}+h_{n2}\psi_{n2}\right)dx = 2i\xi_nQ\left(u(x_1,t)\right).$$

,

Доказательство. Сначала, используя равенстви (2.4), (3.1), (3.3), (3.8) вычислим следующий интеграл:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}G\left(h_{n1}\psi_{n1}+h_{n2}\psi_{n2}\right)dx = -Q\left(u(x_1,t)\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty}u_x\left(h_{n1}\psi_{n1}+h_{n2}\psi_{n2}\right)dx=$$

$$=-Q\left(u(x_1,t)\right)u\left(h_{n1}\psi_{n1}+h_{n2}\psi_{n2}\right)|_{-\infty}^{\infty}+Q\left(u(x_1,t)\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(uh'_{n1}\psi_{n1}+uh_{n1}\psi'_{n1}+uh'_{n2}\psi_{n2}+uh_{n2}\psi'_{n2}\right)dx=$$

$$=-Q\left(u(x_1,t)\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\left(-\psi'_{n2}+i\xi_n\psi_{n2}\right)h'_{n_1}+\left(-h'_{n2}+i\xi_nh_{n2}\right)\psi'_{n1}\right)dx-$$

$$-Q\left(u(x_1,t)\right)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(h'_{n_2}\left(\psi'_{n_1}+i\xi_n\psi_{n_1}\right)+\psi'_{n_2}\left(h'_{n_1}+i\xi_nh_{n_1}\right)\right)dx=$$

$$=i\xi_nQ\left(u(x_1,t)\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\left(h_{n_1}\psi_{n_2}\right)'+\left(h_{n_2}\psi_{n_1}\right)'\right)dx = i\xi_nQ\left(u(x_1,t)\right)\left(h_{n_1}\psi_{n_2}+h_{n_2}\psi_{n_1}\right)|_{-\infty}^{+\infty}=$$

$$=i\xi_nQ\left(u(x_1,t)\right)\left(e^{-i\xi_nx}\cdot e^{i\xi_nx}-\left(-C_ne^{i\xi_nx}\cdot\tfrac{1}{C_n}e^{-i\xi_nx}\right)\right)=2i\xi_nQ\left(u(x_1,t)\right).$$ **Лемма доказана.**

На основании леммы 4.2 и равенства (4.15) мы имеем следующее соотношение

$$\frac{dC_n}{dt}=\left(-32i\xi_n^5P\left(u(x_0,t)\right)+8i\xi_n^3H\left(u(x_2,t)\right)-2i\xi_nQ\left(u(x_1,t)\right)\right)C_n(t).$$

Таким образом, нам удалось доказать следующую теорему.

Теорема 4.1. *Если функции $u(x,t)$, являются решением задачи (2.1)-(2.4), то данные рассеяния оператора $L(t)$ с потенциалом $u\,(x,t)$ меняются по t следующим образом:*

$$\frac{d\xi_n}{dt} = 0, \quad n = 1, 2, ..., N,$$

$$\frac{dr^+(\xi,t)}{dt} = \left(-32i\xi^5 P\left(u(x_0,t)\right) + 8i\xi^3 H\left(u(x_2,t)\right) - 2i\xi Q\left(u(x_1,t)\right)\right) r^+(\xi,t),\ \operatorname{Im}\xi = 0,$$

$$\frac{dC_n}{dt} = \left(-32i\xi_n^5 P\left(u(x_0,t)\right) + 8i\xi_n^3 H\left(u(x_2,t)\right) - 2i\xi_n Q\left(u(x_1,t)\right)\right) C_n(t).$$

Полученные равенства полностью определяют эволюцию данных рассеяния, что позволяет применить метод обратной задачи рассеяния для решения задачи Коши (2.1)-(2.4).

- Пусть задана функция $u_0(x)$, удовлетворяющая условию (2.2). Тогда решение задачи (2.1)-(2.4) находится по следующему алгоритму.

- Решаем прямую задачу рассеяния с начальной функцией $u_0(x)$ и получаем данные рассеяния

$$\left\{r^+\left(\xi,0\right),\ \xi \in R;\ \xi_k(0), \operatorname{Im}\xi_k > 0;\quad C_k(0), \quad k = \overline{1,N}\right\}$$

  для оператора $L(0)$.

- Используя результаты 4.1 теоремы, находим данные рассеяния при $t > 0$:

$$\left\{r^+\left(\xi,t\right),\ \xi \in R;\ \xi_k(t), \operatorname{Im}\xi_k(t) > 0;\quad C_k(t), \quad k = \overline{1,N}\right\}.$$

- Методом, основанным на интегральном уравнении Гельфанда-Левитана-Марченко, решается обратная задача рассеяния, т.е. находим единственную (согласно теоремы 3.1 и 3.2) $u(x,t)$ по данным рассеяния при $t > 0$, полученным на предыдущем шаге.

Пример. Рассмотрим следующую задачу

$$u_t + \alpha(t)u(1,t)\left(30u^4u_x + 10u_x^3 + 40uu_xu_{xx} + 10u^2u_{xxx} + u_{xxxxx}\right) +$$

$$+\beta(t)u(0,t)\left(6u^2u_x + u_{xxx}\right) + \gamma(t)u(2,t)u_x = 0,$$

$$u(x,0) = -\frac{2}{\operatorname{ch}\ 2x}.$$

Где

$$\alpha(t) = \frac{e^4 + (t+1)^4}{-384e^2(t+1)^3}, \beta(t) = \frac{6t^4 + 21t^3 + 34t^2 + 26t + 8}{96(t+1)^2}, \gamma(t) = \frac{e^8 + (t+1)^2}{-2e^4(t+1)}.$$

Как и в примере, данные рассеяния оператора L(0) имеет вид:

$$\{r^+(0) = 0,\ \xi_1(0) = i,\ C_1(0) = 2i\}.$$

Согласно теореме 4.1, имеем

$$\xi_1(t) = \xi_1(0) = i,\ \ r^+(t) = 0,\ \chi_0^1 = 2ie^{\mu(t)}.$$

Где

$$\mu(t) = \int_0^t \left(32\alpha(\tau)u(1,\tau) + 8\beta(\tau)u(0,\tau) + 2\gamma(\tau)u(2,\tau)\right) d\tau. \tag{4.16}$$

Следовательно, $F(x,t) = 2e^{-x+\mu(t)}$. Решая систему интегральных уравнений (3.7) можно получить

$$K_1(x,y,t) = \frac{2e^{-x-y+\mu(t)}}{1+e^{-4x+2\mu(t)}} \ .$$

Используя последнее равенство и формулу (3.6), получаем следующее

$$u(x,t) = -\frac{2}{\text{ch}\,(2x-\mu(t))}.$$

Если использовать последнее равенство и соотношение (4.16), то получаем следующую задачу:

$$\mu'(t) = \frac{-128\alpha(t)e^{\mu(t)+2}}{e^4+e^{2\mu(t)}} - \frac{32\beta(t)e^{\mu(t)}}{e^{2\mu(t)}+1} - \frac{8\gamma(t)e^{\mu(t)+4}}{e^8+e^{2\mu(t)}},$$

$$\mu(0) = 0.$$

Находим решение этой задачи $\mu(t) = \ln(t+1)$. В результате решение рассматриваемой задачи выражается следующим образом

$$u\,(x,t) = -\frac{2}{\text{ch}\,(2x-\ln(t+1))}.$$

Список литературы

[1] Hirota, R. *Exact Solution of the modified Korteweg–de Vries Equation for Multiple Collisions of Solitons*, Journal of the Physical Society of Japan, **33**, 1456–1458, (1972). https://doi.org/10.1143/JPSJ.33.1456.

[2] Satsuma J. *A Wronskian representation of N-soliton solutions of nonlinear evolution equations*, Journal of the Physical Society of Japan, 1979, **46**(1), 359–360, (1979). https://doi.org/10.1143/JPSJ.46.359

[3] Nimmo J. J. C., Freeman N. C. *The use of Backlund transformations in obtaining N-soliton solutions in Wronskian form*, Journal of Physics A: Mathematical and General, **17**(7), 1415–1424, (1984). https://doi.org/10.1088/0305-4470/17/7/009.

[4] Gesztesy F., Schweiger W. *Rational KP and mKP-solutions in Wronskian form*, Reports on Mathematical Physics, **30** (2), 205–222, 1991.

[5] Wadati M. *The exact solution of the modified Korteweg–de Vries equation*, Journal of the Physical Society of Japan, **32**, (6), 1681-1681, (1972). https://doi.org/10.1143/JPSJ.32.1681

[6] Khater A.H, El-Kalaawy O.H, Callebaut D.K. *Backlund Transformations and Exact Solutions for Alfven Solitons in a Relativistic Electron–Positron Plasma*. Physica Scripta, **58**(6), 545-548, (1998). https://doi.org/10.1088/0031-8949/58/6/001

[7] Ono H. *Soliton fission in anharmonic lattices with reflectionless inhomogeneity*, Journal of the Physical Society of Japan, **61**(12), 4336–4343, (1992). https://doi.org/10.1143/JPSJ.61.4336.

[8] A.M. Wazwaz, *Two new integrable modifid KdV equations, of third-and fifth-order, with variable coeffients: Multiple real and multiple complex soliton solutions*, Waves in Random and Complex Media, **31**, 867–878, (2021). https://doi.org/10.1080/17455030.2019.1631504

[9] Нахушев А. М. *Уравнения математической биологии*. М.: Высшая школа, (1995).

[10] Нахушев А. М. *Нагруженные уравнения и их приложения*, Дифференциальные уравнения. **19**(1), 86–94, (1983).

[11] Khasanov A.B., Hoitmetov U.A., Sobirov Sh.Q. *Integration of the mKdV Equation with nonstationary coefficients and additional terms in the case of moving eigenvalues*. Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta. **61**, 137-155, (2023). https://doi.org/10.35634/2226-3594-2023-61-08

[12] Sobirov Sh.K., Hoitmetov U.A. *Integration of the Modified Korteweg-de Vries Equation with Time-Dependent Coefficients and a Self-Consistent Source*. Siberian Mathematical Journal, **65**(4), 971-986, (2024). https://doi.org/10.1134/S0037446624040220

[13] Собиров Ш. *Интегрирование системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с дополнительным членом в классе быстро убывающих функций*. Бюллетень Института математики. **6**(5), 143-156, (2023).

[14] Hoitmetov U. *On the Cauchy Problem for the mKdV–Sine-Gordon Equation with an Additional Term*. Acta Applicandae Mathematicae. **184** (7),(2023). https://doi.org/10.1007/s10440-023-00561-x

[15] Хоитметов У.А, Атажанова Р.Б. *О решении задачи Коши для нагруженного уравнения мКдФ пятого порядка в классе быстроубывающих функций*. КарДУ хабарлари. **3**(2), 34-41, (2025).

[16] Ablowitz M.J. and Segur H., *Solitons and the Inverse Scattering Transform*, Philadelphia, SIAM. (1987).

[17] Dodd R, Eilbeck J, Gibbon J, Morris H, *Solitons and Nonlinear Wave Equations*, Mir, Moscow, (1988).

INTEGRATION OF THE LOADED, EXTENDED MODIFIED FIFTH-ORDER KORTEWEG–DE VRIES EQUATION IN THE CLASS OF RAPIDLY DECREASING FUNCTIONS

Hoitmetov Umid Azadovich, Sobirov Shekhzod Kuchkarboy ugli

Abstract

In this arcticle, the Cauchy problem for the loaded modified fifth-order Korteweg–de Vries equation with an extendent in the class of rapidly decreasing functions is considered. The evolution of scattering data for the Dirac operator, whose potential is a solution to the loaded modified Korteweg-de Vries equation of the fifth order with an extendent in the class of rapidly decreasing functions is obtained. Example is given to illustrate the application of the obtained results.

Keywords

Modified Korteweg-de Vries equation; Jost solution; scattering data; Gelfand-Levitan-Marchenko integral equation.

Affiliations

Hoitmetov Umid Azadovich, Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor.
Address: Urgench State University named after Abu Rayhan Biruni 14, Kh.Alimdjan str, Urgench city, 220100, Uzbekistan
e-mail: x_umid@mail.ru
ORCID ID: https://orcid.org/0000-0002-5974-6603

Sobirov Shekhzod Kuchkarboy ugli, Doctor of Philosophy.
Address: Urgench State University named after Abu Rayhan Biruni 14, Kh.Alimdjan str, Urgench city, 220100, Uzbekistan
e-mail: shexzod1994@mail.ru
ORCID ID: https://orcid.org/0000-0003-0405-3591