



Решение краевых задач для уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками построением функции Грина в полуограниченной области

Апаков Юсупжон Пулатович * Меликузиева Дилшода Мухторжон кизи

Аннотация

В данной работе рассматриваются краевые задачи, поставленная в полубесконечной области, для неоднородного дифференциального уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками. Единственность решений поставленных задач доказываются методом энергетических интегралов. Существование решений построена методом разделения переменных. При решении задачи строится функция Грина. Решение получено в виде бесконечного ряда, при этом решение и все частные производные, входящие в уравнение, исследуются на абсолютную и равномерную сходимость.

Ключевые слова: Уравнения в частных производных; уравнение четвертого порядка; кратные характеристики; краевая задача; единственность; существование; функция Грина; ряды; полубесконечная область; абсолютная и равномерная сходимость.

Предметная классификация AMS (2020): Основная: 35C10 ; Дополнительная: 35J15.

1. Введение

Изучение многих задач газовой динамики, теории упругости, теории пластин и оболочек приводит к рассмотрению дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка. С этой точки зрения дифференциальные уравнения четвертого порядка также представляют большой интерес ([1-4]).

Монография Т. Д. Джураева и А. Сопуева [5] посвящена классификации дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка.

В работе Д. Аманова, М. Б. Мурзамбетовой [6] рассмотрена краевая задача для неоднородного уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками, содержащего вторую производную по времени, в ограниченной области.

Объектом исследования в [7] является краевая задача для уравнения четвертого порядка вида

$$u_{xxxx} - u_{tt} = f(x, t).$$

Ряд фундаментальных результатов, связанных с качественными свойствами решений уравнений колебания балки, был получен и систематизирован в статьях К. Б. Сабитова [8–10].

Краевые задачи для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками, содержащих вторую производную по времени, а также вопросы вычисления собственных функций для уравнений составного типа подробно исследованы в публикациях Т. Д. Джураева, Ю. П. Апакова, С. Нурлана и др. [11–14]

В статье [15] изучена краевая задача для неоднородного дифференциального уравнения четвертого порядка, содержащего третью производную по времени, а в [16, 17] в прямоугольной области рассмотрены задачи для однородного дифференциального уравнения четвертого порядка, содержащего третью производную по времени.

В последние годы возрастает интерес к уравнениям четвертого порядка, содержащим производную третьего порядка по времени. Такие модели служат фундаментом именно в нанотехнологиях, в частности, при сверхточном расчете частот колебаний микро- и наносенсоров. Например, С. Конг (Kong.S.) и его соавторы в своих фундаментальных трудах провели статический и динамический анализ микробалок на основе градиентной теории упругости (strain gradient elasticity theory) [18].

В отличие от вышеупомянутых исследований, в данной работе рассматривается краевая задача, поставленная для уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками в полубесконечной области, путем построения функции Грина и её применения для получения решения

2. Постановка задач

В областях $D^+ = \{(x, y) : 0 < x < p, \quad 0 < y < +\infty\}$ и $D^- = \{(x, y) : 0 < x < p, \quad -\infty < y < 0\}$ рассмотрим уравнение

$$u_{xxxx}(x, y) - u_{yyyy}(x, y) + au(x, y) = g(x, y), \quad (2.1)$$

где $a, p \in R$, $g(x, y)$ — заданная достаточно гладкая функция.

Задача A_1 . В области D^+ требуется найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую уравнению (2.1), из класса $C_{x,y}^{4,3}(D^+) \cap C_{x,y}^{3,2}(D^+ \cup \Gamma_1)$, с ограниченной третьей производной по x и второй производной по y на $y \rightarrow +\infty$, а также, производная по x является непрерывной, $u_{xx} \in L_2(D^+)$ и удовлетворяющего следующим краевым условиям:

$$u(0, y) = u(p, y) = u_{xx}(0, y) = u_{xx}(p, y) = 0, \quad 0 \leq y < +\infty; \quad (2.2)$$

$$u(x, 0) = \psi_1(x); \quad u_y(x, 0) = \psi_2(x); \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} u(x, y) = 0, \quad 0 \leq x \leq p, \quad (2.3)$$

где $\Gamma_1 = \partial D^+$ - граница области D^+ . $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ - заданные достаточно гладкие функции.

Задача A_2 . В области D^- требуется найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую уравнению (2.1), из класса $C_{x,y}^{4,3}(D^-) \cap C_{x,y}^{3,2}(D^- \cup \Gamma_2)$, с ограниченной третьей производной по x и второй производной по y на $y \rightarrow -\infty$, а также, производная по x является непрерывной, $u_{xx} \in L_2(D^-)$, удовлетворять условиям (2.2) и следующим граничным условиям:

$$u(x, 0) = \psi_3(x); \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} u(x, y) = \lim_{y \rightarrow -\infty} u_y(x, y) = 0, \quad 0 \leq x \leq p \quad (2.4)$$

где $\Gamma_2 = \partial D^-$ — граница области D^- , $\psi_3(x)$ - заданная достаточно гладкая функция.

3. Единственность решения

Теорема 3.1. Если задача A_1 (A_2) имеет решение, то при условии $a \geq 0$ это решение является единственным.

Доказательство. Предположим обратное, пусть задача A_1 (A_2) имеет два решения $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$. Тогда функция $u(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$ удовлетворяет уравнению (2.1) с однородными краевыми условиями. Докажем, что $u(x, y) \equiv 0$ в D^+ (D^-).

В области D^+ (D^-) справедливо тождество

$$\frac{\partial}{\partial x} (uu_{xxx} - u_x u_{xx}) + u_{xx}^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left(-uu_{yy} + \frac{1}{2}u_y^2 \right) + au^2 = 0. \quad (3.1)$$

Интегрируя тождество (3.1) по области $D_d^+ = \{(x, y) : 0 < x < p, 0 < y < d\}$, где $d > 0$ имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^d [u(p, y) u_{xxx}(p, y) - u_x(p, y) u_{xx}(p, y)] dy \\ & - \int_0^d [u(0, y) u_{xxx}(0, y) - u_x(0, y) u_{xx}(0, y)] dy \\ & + \int_0^p \int_0^d u_{xx}^2 dx dy + \int_0^p (-u(x, d) u_{yy}(x, d) + u(x, 0) u_{yy}(x, 0)) dx \\ & + \frac{1}{2} \int_0^p (u_y^2(x, d) - u_y^2(x, 0)) dx + a \int_0^p \int_0^d u^2(x, y) dx dy = 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Если $d \rightarrow +\infty$, то $D_d^+ \rightarrow D^+$. Учитывая однородные краевые условия задачи A , т.е. $\psi_1(x) = \psi_2(x) = 0$ и свойства функции $u(x, y)$ при $y \rightarrow +\infty$, а также, что $u_{xx} \in L_2(D^+)$, из (3.2) получаем

$$\iint_{D^+} u_{xx}^2(x, y) dx dy + \frac{1}{2} \lim_{d \rightarrow +\infty} \int_0^p u_y^2(x, d) dx + a \iint_{D^+} u^2(x, y) dx dy = 0.$$

Если $a > 0$ из третьего слагаемого, получим $u(x, y) \equiv 0, \forall (x, y) \in D^+ \cup \Gamma_1$, а если $a = 0$, из первого слагаемого имеем $u_{xx}(x, y) = 0$. Следовательно, $u(x, y) = x f_1(y) + f_2(y)$, где $f_1(y), f_2(y)$ – произвольные функции, удовлетворяющие условиям задачи A_1 . С учётом условия (2.2) в области $D^+ \cup \Gamma_1$ получаем $f_1(y) = f_2(y) = 0$, тогда имеем $u(x, y) \equiv 0$.

Если $d \rightarrow -\infty$, то $D_d^- \rightarrow D^-$. Учитывая однородные краевые условия задачи A_2 , т.е. $\psi_3(x) = 0$ и свойства функции $u(x, y)$ при $y \rightarrow -\infty$, а также, что $u_{xx} \in L_2(D^-)$, из (3.2) получаем

$$\iint_{D^-} u_{xx}^2(x, y) dx dy + \frac{1}{2} \int_0^p u_y^2(x, 0) dx + a \iint_{D^-} u^2(x, y) dx dy = 0.$$

Отсюда также легко следует, что $u(x, y) \equiv 0$ в $D^- \cup \Gamma_2$.

Теорема 3.1 доказана.

4. Существование решения

Теорема 4.1. При выполнении следующих условий:

1) $\psi_i(x) \in C^5[0, p], i = 1, 2;$

$\psi_i(0) = \psi_i(p) = \psi_i''(0) = \psi_i''(p) = \psi_i^{(4)}(0) = \psi_i^{(4)}(p) = 0;$

2) $\frac{\partial^2 g(x, y)}{\partial x \partial y} \in C_b(D^+ \cup \Gamma_1); g(0, y) = g(p, y) = 0, \lim_{y \rightarrow +\infty} g(x, y) = 0, g(x, 0) = 0$

решение задачи A_1 существует.

Доказательство. Решение задачи A_1 ищем в виде

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) Y_n(y). \quad (4.1)$$

Соответствующая спектральная задача имеет следующий вид:

$$\begin{cases} X^{IV} - \lambda X = 0, \\ X(0) = X(p) = X''(0) = X''(p) = 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

Собственные числа задачи (4.2),

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{p}\right)^4 \quad n \in N,$$

соответствующая собственная функции имеет вид:

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{p}} \sin\left(\frac{\pi n}{p}x\right). \quad (4.3)$$

Известно [19], что система собственных функций (4.3) задачи (4.2) является полной и ортонормированной в $L_2(0, p)$.

Учитывая условия (2.3), приходим к следующей задаче по $Y(y)$ для A_1 :

$$\begin{cases} Y_n'''(y) + (a + \lambda_n) Y_n'''(y) = g_n(y) \\ Y_n(0) = \psi_{1n}, \quad Y_n'(0) = \psi_{2n}, \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} Y_n(y) = 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

здесь

$$\psi_{in} = \int_0^p \psi_i(x) X_n(x) dx, \quad i = 1, 2,$$

$$g_n(y) = \sqrt{\frac{2}{p}} \int_0^p g(x, y) \sin\left(\frac{\pi n}{p}x\right) dx.$$

Интегрируя по частям $g_n(y)$ и учитывая второе условие теоремы 4.1, имеем:

$$g_n(y) = -\sqrt{\frac{2}{p}} g(x, y) \cos\left(\frac{\pi n}{p}x\right) \Big|_{x=0}^{x=p} + \sqrt{\frac{2}{p}} \frac{p}{\pi n} \int_0^p g_x(x, y) \cos\left(\frac{\pi n}{p}x\right) dx = \frac{p}{\pi n} F_n(y) \quad (4.5)$$

где

$$F_n(y) = \sqrt{\frac{2}{p}} \int_0^p g_x(x, y) \cos\left(\frac{\pi n}{p}x\right) dx.$$

В дальнейшем максимальное значение всех найденных положительных известных чисел в оценках будем обозначать через M . Из (4.5) получим оценки

$$|g_n(y)| \leq \frac{M}{n} |F_n(y)| \quad (4.6)$$

Интегрируя по частям $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ пять раз и учитывая первое условие теоремы 4.1, получим оценки:

$$|\psi_{in}| \leq \frac{M}{n^5} |\Psi_{in}|, \quad i = 1, 2 \quad (4.7)$$

где

$$\Psi_{in} = \int_0^p \psi_i^{(5)}(x) X_n(x) dx, \quad i = 1, 2.$$

Решение задачи (4.4) находим с помощью построения функции Грина, для этого с помощью функции

$$V_n(y) = Y_n(y) - \rho_n(y), \quad (4.8)$$

изменим граничные условия задачи (4.4) на однородные, здесь функция $\rho_n(y)$ имеет вид:

$$\rho_n(y) = -\psi_{2n}e^{-y} + (\psi_{1n} + \psi_{2n})e^{-y^2}. \quad (4.9)$$

Подставляя (4.8), (4.9) в (4.4), приходим к следующей задаче

$$\begin{cases} V_n''' - (a + \lambda_n)V_n = \lambda_n f_n(y), \\ V_n(0) = V_n'(0) = \lim_{y \rightarrow +\infty} V_n(y) = 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

здесь

$$f_n(y) = \psi_{1n} \left(\frac{8y^3 - 12y + (a + \lambda_n)}{\lambda_n} \right) e^{-y^2} + \psi_{2n} \left(\frac{8y^3 - 12y + (a + \lambda_n)}{\lambda_n} e^{-y^2} - \frac{a + \lambda_n + 1}{\lambda_n} e^{-y} \right) + \frac{g_n(y)}{\lambda_n}.$$

С учётом (4.6) и (4.7) получаем следующие оценки

$$\begin{aligned} |f_n(y)| &\leq \frac{M}{n^5} \left(e^{-y^2} |\Psi_{1n}| + (e^{-y^2} + e^{-y}) |\Psi_{2n}| + |F_n(y)| \right), \\ |f_n(0)| &\leq \frac{M}{n^5} (|\Psi_{1n}| + |\Psi_{2n}| + |F_n(0)|), \\ |f_n'(y)| &\leq \frac{M}{n^5} \left(|y| e^{-y^2} |\Psi_{1n}| + (|y| e^{-y^2} + e^{-y}) |\Psi_{2n}| + |F_n'(y)| \right), \end{aligned} \quad (4.11)$$

Решение задачи (4.10) имеет следующий вид:

$$V_n(y) = \lambda_n \int_0^{+\infty} G_n(\xi, y) f_n(\xi) d\xi \quad (4.12)$$

где функция $G_n(\xi, y)$ является функцией Грина задачи (4.10) и принадлежит следующему классу $C_b^1[0, +\infty) \cap C_b^3(0, +\infty)$ где $b = \lim_{y \rightarrow +\infty} y$, [20].

Искомую функцию Грина будем искать в следующем виде

$$G_n^+(\xi, y) = \begin{cases} G_{1n}^+(\xi, y), & 0 \leq y < \xi, \\ G_{2n}^+(\xi, y), & \xi < y < \infty, \end{cases}$$

Функция Грина задачи (4.10) удовлетворяет следующему уравнению:

$$G_{nyyy}(\xi, y) - (a + \lambda_n)G_n(\xi, y) = 0, \quad (4.13)$$

а также следующим условиям:

$$G_{1n}(\xi, 0) = G_{1ny}(\xi, 0) = \lim_{y \rightarrow +\infty} G_{2n}(\xi, y) = 0, \quad (4.14)$$

$$\begin{cases} G_{2n}(\xi, \xi) - G_{1n}(\xi, \xi) = 0, \\ G_{2ny}(\xi, \xi) - G_{1ny}(\xi, \xi) = 0, \\ G_{2nyy}(\xi, \xi) - G_{1nyy}(\xi, \xi) = 1. \end{cases} \quad (4.15)$$

$$G_n^+(\xi, y) = \begin{cases} \frac{1}{3k_n^2} \left(-e^{k_n(y-\xi)} + 2e^{-k_n\left(\xi + \frac{1}{2}y\right)} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_n y + \frac{\pi}{6}\right) \right), & 0 \leq y < \xi, \\ \frac{2}{3k_n^2} \left(e^{-k_n\left(\xi + \frac{1}{2}y\right)} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_n y + \frac{\pi}{6}\right) + e^{\frac{k_n}{2}(\xi-y)} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_n(\xi-y) - \frac{\pi}{6}\right) \right), & \xi < y < \infty. \end{cases} \quad (4.16)$$

здесь $k_n = \sqrt[3]{\lambda_n + a}$,

Нетрудно проверить, что функция, определённая формулой (4.16), обладает всеми свойствами, указанными в определении функции Грина. Далее перейдём к оценке функции $G_n(\xi, y)$,

$$\begin{aligned} |G_{1n}(\xi, y)| &\leq \frac{1}{3k_n^2} \left(e^{k_n(y-\xi)} + 2e^{-k_n(\xi+\frac{1}{2}y)} \right), \\ |G_{1n}(\xi, y)| &\leq \frac{M}{k_n^2}, \\ |G_{2n}(\xi, y)| &\leq \frac{2}{3k_n^2} \left(e^{-k_n\left(\xi+\frac{1}{2}y\right)} + e^{\frac{1}{2}k_n(\xi-y)} \right) \\ |G_{2n}(\xi, y)| &\leq \frac{M}{k_n^2}. \end{aligned}$$

Из этого следует следующая оценка,

$$|G_n(\xi, y)| \leq \frac{M}{k_n^2},$$

также

$$|G_{n\xi}(\xi, y)| \leq \frac{M}{k_n}, \quad |G_{n\xi\xi}(\xi, y)| \leq M. \quad (4.17)$$

A_1 имеет следующий вид:

$$u(x, y) = \sqrt{\frac{2}{p}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\rho_n(y) + \lambda_n \int_0^{\infty} G_n(\xi, y) f_n(\xi) d\xi \right) \sin\left(\frac{\pi n}{p} x\right). \quad (4.18)$$

С учётом (4.7) оценим (4.9),

$$|\rho_n(y)| \leq \frac{M}{n^5} \left(e^{-y} |\Psi_{2n}| + e^{-y^2} (|\Psi_{1n}| + |\Psi_{2n}|) \right) \quad (4.19)$$

Учитывая (4.13), оценим (4.12), для этой цели воспользуемся следующим соотношением

$$\begin{aligned} G_n(\xi, y) &= \frac{1}{a + \lambda_n} G_{nyyy}(\xi, y), \quad (\xi, y) \in C_b^1[0, +\infty) \cap C_b^3(0, +\infty); \\ V_n(y) &= \lambda_n \int_0^{+\infty} G_n(\xi, y) f_n(\xi) d\xi = \frac{\lambda_n}{a + \lambda_n} \left(\int_0^{\xi-\varepsilon} G_{n\xi\xi\xi}(\xi, y) f_n(\xi) d\xi + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\xi+\varepsilon}^{\nu} G_{n\xi\xi\xi}(\xi, y) f_n(\xi) d\xi + \int_{\nu}^{+\infty} G_{n\xi\xi\xi}(\xi, y) f_n(\xi) d\xi \right). \end{aligned}$$

Для функции Грина $G_{nyy}(\xi, y)$ точка $y = \xi$ является точкой разрыва первого рода. В то же время данная функция сохраняет непрерывность в точке $y = \nu$ для любого $\nu \in [0, +\infty)$.

$$\begin{aligned} V_n(y) &= \frac{\lambda_n}{a + \lambda_n} \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (f_n(\xi - \varepsilon) G_{n\xi\xi}(\xi - \varepsilon, y) - f_n(0) G_{n\xi\xi}(0, y) - \int_0^{\xi-\varepsilon} G_{n\xi\xi}(\xi, y) f_n'(\xi) d\xi) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda_n}{a + \lambda_n} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(f_n(\nu) G_{n\xi\xi}(\nu, y) - f_n(\xi + \varepsilon) G_{n\xi\xi}(\xi + \varepsilon, y) - \int_{\xi+\varepsilon}^{\nu} G_{n\xi\xi}(\xi, y) f_n'(\xi) d\xi \right) \right) + \\ &\quad \left. + \frac{\lambda_n}{a + \lambda_n} \left(\lim_{B \rightarrow +\infty} (f_n(B) G_{n\xi\xi}(B, y) - f_n(\nu) G_{n\xi\xi}(\nu, y) - \int_{\nu}^B G_{n\xi\xi}(\xi, y) f_n'(\xi) d\xi) \right) \right) \end{aligned}$$

Следовательно

$$|V_n(y)| \leq \frac{M}{n^5} (|\Psi_{1n}| + |\Psi_{2n}|). \quad (4.20)$$

Принимая во внимание (4.19) и (4.20) оценим (4.18) в виде,

$$|u(x, y)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} (|\rho_n(y)| + |V_n(y)|) |X_n(x)| \leq \frac{M}{n^5} (|\Psi_{1n}| + |\Psi_{2n}|) < \infty.$$

Теперь оценим $u_{yyy}(x, y)$,

$$u_{yyy}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\rho_n'''(y) + \lambda_n \int_0^{\infty} G_{n\xi\xi\xi}(\xi, y) f_n(\xi) d\xi \right) X_n(x). \quad (4.21)$$

$\rho_n'''(y)$ имеет следующий вид,

$$\rho_n'''(y) = 4\psi_{1n} (3ye^{-y^2} - 2y^3e^{-y^2}) + \psi_{2n} (e^{-y} + 12ye^{-y^2} - 8y^3e^{-y^2}). \quad (4.22)$$

Исходя из (4.7) оценим (4.22),

$$|\rho_n'''(y)| \leq \frac{M}{n^5} (|\Psi_{1n}| + |\Psi_{2n}|). \quad (4.23)$$

Тогда $V_n'''(y)$ имеет следующий вид,

$$\begin{aligned} V_n'''(y) &= \lambda_n \int_0^{+\infty} G_{n\xi\xi\xi}(\xi, y) f_n(\xi) d\xi = \lambda_n \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_n(\xi) G_{n\xi\xi}(\xi, y) \Big|_0^{\xi-\varepsilon} - \int_0^{\xi-\varepsilon} G_{n\xi\xi}(\xi, y) f_n'(\xi) d\xi + \right. \\ &+ \left. \int_{\xi+\varepsilon}^{+\infty} G_{n\xi\xi}(\xi, y) f_n'(\xi) d\xi \right) = \lambda_n \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (f_n(\xi - \varepsilon) G_{n\xi\xi}(\xi - \varepsilon, y) - f_n(0) G_{n\xi\xi}(y, 0)) - \right. \\ &- \left. \int_0^{\xi-\varepsilon} G_{n\xi\xi}(\xi, y) f_n'(\xi) d\xi + \int_{\xi+\varepsilon}^{\nu} G_{n\xi\xi}(\xi, y) f_n'(\xi) d\xi + \int_{\nu}^{+\infty} G_{n\xi\xi}(\xi, y) f_n'(\xi) d\xi \right) = \\ &= \lambda_n \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left((f_n(\xi - \varepsilon) G_{n\xi\xi}(\xi - \varepsilon, y) - f_n(0) G_{n\xi\xi}(0, y)) - \int_0^{\xi-\varepsilon} G_{n\xi\xi}(\xi, y) f_n'(\xi) d\xi \right) + \\ &+ \lambda_n \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left((f_n(\nu) G_{n\xi\xi}(\nu, y) - f_n(\xi + \varepsilon) G_{n\xi\xi}(\xi + \varepsilon, y)) - \int_{\xi+\varepsilon}^c G_{n\xi\xi}(\xi, y) f_n'(\xi) d\xi \right) \right) + \\ &+ \lambda_n \left(\lim_{B \rightarrow +\infty} (f_n(B) G_{n\xi\xi}(B, y) - f_n(\nu) G_{n\xi\xi}(\nu, y)) - \int_{\nu}^B G_{n\xi\xi}(\xi, y) f_n'(\xi) d\xi \right). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Учитывая (4.11) и (4.17) оценим (4.24),

$$|V_n'''(y)| \leq \frac{M}{n} (|\Psi_{1n}| + |\Psi_{2n}|). \quad (4.25)$$

На основании (4.23) и (4.25) оценим (4.21) в виде

$$|u_{yyy}(x, y)| \leq M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (|\Psi_{1n}| + |\Psi_{2n}|).$$

Используя неравенство Коши-Буняковского и Бесселя, получим

$$\begin{aligned} |u_{yyy}(x, y)| &\leq M \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} \left(\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\Psi_{1n}|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\Psi_{2n}|^2} \right) \leq \\ &\leq M \sqrt{\frac{\pi^2}{6}} \left(\|\psi_1^{(5)}(x)\| + \|\psi_2^{(5)}(x)\| \right) < \infty, \end{aligned}$$

так как

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\Psi_{in}|^2 \leq \left\| \psi_i^{(5)}(x) \right\|_{L_2(0 < x < p)}^2, \quad i = 1, 2.$$

Следовательно, ряд, соответствующий функции $u_{yyyy}(x, y)$, сходится абсолютная и равномерно в области D^+ . Из уравнения (4.18) найдём $u_{xxxx}(x, y)$ и также покажем его сходимость,

$$\begin{aligned} |u_{xxxx}(x, y)| &\leq \sqrt{\frac{2}{p}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n}{p}\right)^4 \left(|\rho_n(y)| + \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A |G_n(\xi, y)| |f_n(\xi)| d\xi \right) \leq \\ &\leq M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (|\Psi_{1n}| + |\Psi_{2n}|). \end{aligned}$$

Используя неравенство Коши-Буняковского и Бесселя, получим

$$\begin{aligned} |u_{xxxx}(x, y)| &\leq M \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} \left(\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\Psi_{1n}|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\Psi_{2n}|^2} \right) \leq \\ &\leq M \sqrt{\frac{\pi^2}{6}} \left(\left\| \psi_1^{(5)}(x) \right\| + \left\| \psi_2^{(5)}(x) \right\| \right) < \infty. \end{aligned}$$

Следовательно, $u_{xxxx}(x, y)$ также сходится абсолютно и равномерно в области D^+ .

Теорема 4.1 доказана.

Теорема 4.2. При выполнении следующих условий:

- 1) $\psi_3(x) \in C^5[0, p]$; $\psi_3(0) = \psi_3(p) = \psi_3''(0) = \psi_3''(p) = \psi_3^{(4)}(0) = \psi_3^{(4)}(p) = 0$;
 - 2) $\frac{\partial^2 g(x, y)}{\partial x \partial y} \in C_b(D^- \cup \Gamma_2)$; $g(0, y) = g(p, y) = 0$, $\lim_{y \rightarrow -\infty} g(x, y) = 0$, $g(x, 0) = 0$
- решение задачи A_1 существует.

Теперь учитывая условия (2.4), приходим к следующей задаче по $Y(y)$ для A_2 :

$$\begin{cases} Y_n''' - (a + \lambda) Y_n = g_n(y) \\ Y_n(0) = \psi_{3n}, \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} Y_n(y) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} Y_n'(y) = 0 \end{cases} \quad (4.26)$$

здесь

$$\begin{aligned} \psi_{3n} &= \int_0^p \psi_3(x) X_n(x) dx, \\ g_n(y) &= \sqrt{\frac{2}{p}} \int_0^p g(x, y) \sin\left(\frac{\pi n}{p} x\right) dx. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям $g_n(y)$ и учитывая второе условие теоремы 4.2, имеем:

$$g_n(y) = -\sqrt{\frac{2}{p}} g(x, y) \cos\left(\frac{\pi n}{p} x\right) \Big|_{x=0}^{x=p} + \sqrt{\frac{2}{p}} \frac{p}{\pi n} \int_0^p g_x(x, y) \cos\left(\frac{\pi n}{p} x\right) dx = \frac{p}{\pi n} F_n(y), \quad (4.27)$$

где

$$F_n(y) = \sqrt{\frac{2}{p}} \int_0^p g_x(x, y) \cos\left(\frac{\pi n}{p} x\right) dx.$$

Из (4.27) получим оценки

$$|g_n(y)| \leq \frac{M}{n} |F_n(y)| \quad (4.28)$$

Интегрируя по частям $\psi_3(x)$ пять раз и учитывая первое условие теоремы 4.2, получим оценки:

$$|\psi_{3n}| \leq \frac{M}{n^5} |\Psi_{in}|, \quad (4.29)$$

где

$$\Psi_{3n} = \int_0^p \psi_3^{(5)}(x) X_n(x) dx, \quad i = 1, 2.$$

Решение задачи (4.26) находим с помощью построения функции Грина, для этого с помощью функции

$$V_{1n}(y) = Y_{1n}(y) - \rho_{1n}(y), \quad (4.30)$$

изменим граничные условия задачи (4.26) на однородные, здесь функция $\rho_{1n}(y)$ имеет вид:

$$\rho_{1n}(y) = \psi_{3n} e^y \quad (4.31)$$

Подставляя (4.30), (4.31) в (4.26), приходим к следующей задаче

$$\begin{cases} V_{1n}''' - (a + \lambda_n) V_{1n} = \lambda_n f_n(y), \\ V_{1n}(0) = \lim_{y \rightarrow -\infty} V_{1n}(y) = \lim_{y \rightarrow -\infty} V_{1n}'(y) = 0, \end{cases} \quad (4.32)$$

здесь

$$f_n(y) = \left(\frac{a + \lambda_n - 1}{\lambda_n} \right) e^y \psi_{3n} + \frac{g_n(y)}{\lambda_n}.$$

Принимая во внимание (4.29) и (4.30) получаем следующие оценки

$$\begin{aligned} |f_n(y)| &\leq \frac{M}{n^5} (e^y |\Psi_{3n}| + |F_n(y)|), \\ |f_n(0)| &\leq \frac{M}{n^5} (|\Psi_{3n}| + |F_n(0)|), \\ |f_n'(y)| &\leq \frac{M}{n^5} (e^y |\Psi_{3n}| + |F_n'(y)|). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Решение задачи (4.32) имеет следующий вид:

$$V_{1n}(y) = \lambda_n \int_{-\infty}^0 G_n(\xi, y) f_n(\xi) d\xi \quad (4.34)$$

где функция $G_n(\xi, y)$ является функцией Грина задачи (4.32) и принадлежит следующему классу $C_b^1(-\infty; 0] \cap C_b^3(-\infty; 0)$ где $b = \lim_{y \rightarrow -\infty} y$.

Искомую функцию Грина будем искать в следующем виде

$$G_n^-(\xi, y) = \begin{cases} G_{1n}^-(\xi, y), & -\infty < y < \xi, \\ G_{2n}^-(\xi, y), & \xi < y \leq 0. \end{cases}$$

Функция Грина задачи (4.32) удовлетворяет уравнению (4,13), а также следующим условиям

$$G_{1n}(\xi, 0) = \lim_{y \rightarrow -\infty} G_{2n}(\xi, y) = \lim_{y \rightarrow -\infty} G_{2ny}(\xi, y) = 0, \quad (4.35)$$

$$\begin{cases} G_{2n}(\xi, \xi) - G_{1n}(\xi, \xi) = 0, \\ G_{2ny}(\xi, \xi) - G_{1ny}(\xi, \xi) = 0, \\ G_{2nyy}(\xi, \xi) - G_{1nyy}(\xi, \xi) = 1. \end{cases} \quad (4.36)$$

$$G_n(\xi, y) = \begin{cases} \frac{2}{3k_n^2} \left(e^{k_n(y+\frac{\xi}{2})} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_n - \frac{\pi}{6}\right) + e^{\frac{1}{2}k_n(\xi-y)} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_n(y-\xi) + \frac{\pi}{6}\right) \right), \\ \frac{e^{k_n(y-\xi)}}{3k_n^2} \left(1 + 2e^{\frac{3}{2}k_n\xi} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_n\xi - \frac{\pi}{6}\right) \right). \end{cases} \quad (4.37)$$

Можно проверить, что функция, определенная формулой (4.37), обладает всеми свойствами, указанными в определении функции Грина. Теперь оценим $G_n^-(\xi, y)$,

$$|G_{1n}^-(\xi, y)| \leq \frac{2}{3k_n^2} \left(e^{k_n(y+\frac{\xi}{2})} + e^{\frac{1}{2}k_n(\xi-y)} \right),$$

$$|G_{1n}^-(\xi, y)| \leq \frac{M}{k_n^2},$$

$$|G_{2n}^-(\xi, y)| \leq \frac{1}{3k_n^2} \left(e^{k_n(y-\xi)} + 2e^{k_n(y+\frac{1}{2}\xi)} \right)$$

$$|G_{2n}^-(\xi, y)| \leq \frac{M}{k_n^2}.$$

Из этого следует следующая оценка,

$$|G_n^-(\xi, y)| \leq \frac{M}{k_n^2},$$

также

$$|G_{n\xi}^-(\xi, y)| \leq \frac{M}{k_n}, \quad |G_{n\xi\xi}^-(\xi, y)| \leq M, \quad (4.38)$$

Следовательно, общее решение задачи A_2 имеет следующий вид:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\rho_{1n}(y) + \lambda_n \int_{-\infty}^0 G_n(\xi, y) f_n(\xi) d\xi \right) X_n(x). \quad (4.39)$$

С учётом (4.29) оценим (4.31),

$$|\rho_{1n}(y)| \leq \frac{M}{n^5} |\Psi_{3n}|. \quad (4.40)$$

Учитывая (4.34), оценим (4.35), для этой цели воспользуемся следующим соотношением

$$\begin{aligned} V_{1n}(y) &= \lambda_n \int_{-\infty}^0 G_n(\xi, y) f_n(\xi) d\xi = \frac{\lambda_n}{a + \lambda_n} \int_{-\infty}^0 G_{n\xi\xi\xi}(\xi, y) f_n(\xi) d\xi = \\ &= \frac{\lambda_n}{a + \lambda_n} \left(\int_{-\infty}^{\nu} G_{n\xi\xi\xi}(\xi, y) f_n(\xi) d\xi + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\nu}^{\xi-\varepsilon} G_{n\xi\xi\xi}(\xi, y) f_n(\xi) d\xi + \int_{\xi+\varepsilon}^0 G_{n\xi\xi\xi}(\xi, y) f_n(\xi) d\xi \right) \right) \\ &= \frac{\lambda_n}{a + \lambda_n} \lim_{B \rightarrow -\infty} \left(f_n(\nu) G_{n\xi\xi}(\nu, y) - f_n(B) G_{n\xi\xi}(B, y) - \int_B^{\nu} G_{n\xi\xi}(\xi, y) f_n'(\xi) d\xi \right) + \\ &+ \frac{\lambda_n}{a + \lambda_n} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(f_n(\xi - \varepsilon) G_{n\xi\xi}(\xi - \varepsilon, y) - f_n(\nu) G_{n\xi\xi}(\nu, y) - \int_{\nu}^{\xi-\varepsilon} G_{n\xi\xi}(\xi, y) f_n'(\xi) d\xi \right) + \\ &+ \frac{\lambda_n}{a + \lambda_n} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(f_n(0) G_{n\xi\xi}(0, y) - f_n(\xi + \varepsilon) G_{n\xi\xi}(\xi + \varepsilon, y) - \int_{\xi+\varepsilon}^0 G_{n\xi\xi}(\xi, y) f_n'(\xi) d\xi \right). \end{aligned}$$

Для функции Грина $G_{ny}^-(\xi, y)$ точка $y = \xi$ является точкой разрыва первого рода. В то же время данная функция сохраняет непрерывность в точке $y =$ для любого $\xi \in (-\infty, 0]$.

Следовательно

$$|V_{1n}(y)| \leq \frac{M}{n^5} (|\Psi_{3n}|) \quad (4.41)$$

Принимая во внимание (4.41) и (4.42) оценим (4.40) в виде,

$$|u(x, y)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} (|\rho_{1n}(y)| + |V_{1n}(y)|) |X_n(x)| \leq \frac{M}{n^5} (|\Psi_{3n}|) < \infty$$

Теперь оценим $u_{yyyy}(x, y)$,

$$u_{yyyy}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\rho_{1n}'''(y) + \lambda_n \int_{-\infty}^0 G_{nyyy}(\xi, y) f_n(\xi) d\xi \right) X_n(x). \quad (4.42)$$

Оценим $\rho_{1n}'''(y)$ с учетом соотношения (4.30),

$$|\rho_{1n}'''(y)| \leq \frac{M}{n^5} (|\Psi_{3n}|). \quad (4.43)$$

Тогда $V_{1n}'''(y)$ имеет следующий вид,

$$\begin{aligned} V_{1n}'''(y) &= \lambda_n \int_{-\infty}^0 G_{n\xi\xi\xi}(\xi, y) f_n(\xi) d\xi = \\ &= \lambda_n \left(\lim_{B \rightarrow -\infty} \left(f_n(\nu) G_{n\xi\xi}(y, \nu) - f_n(B) G_{n\xi\xi}(y, B) - \int_B^\nu G_{n\xi\xi}(\xi, y) f_n'(\xi) d\xi \right) \right) + \\ &+ \lambda_n \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(f_n(\xi - \varepsilon) G_{n\xi\xi}(\xi, y - \varepsilon) - f_n(\nu) G_{n\xi\xi}(y, \nu) - \int_\nu^{\xi - \varepsilon} G_{n\xi\xi}(\xi, y) f_n'(\xi) d\xi \right) \right) + \\ &+ \lambda_n \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(f_n(0) G_{n\xi\xi}(y, 0) - f_n(\xi + \varepsilon) G_{n\xi\xi}(\xi, y + \varepsilon) - \int_{\xi + \varepsilon}^0 G_{n\xi\xi}(\xi, y) f_n'(\xi) d\xi \right) \right); \end{aligned} \quad (4.44)$$

На основании (4.33) и (4.38) оценка (4.44), имеет вид

$$|V_{1n}'''(y)| \leq \frac{1}{n} (|\Psi_{3n}|). \quad (4.45)$$

С учётом оценок (4.43) и (4.45) оценим (4.42),

$$|u_{yyyy}(x, y)| \leq M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (|\Psi_{3n}|)$$

Используя неравенство Коши-Буняковского и Бесселя, получим

$$|u_{yyyy}(x, y)| \leq M \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} \left(\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\Psi_{3n}|^2} \right) \leq M \sqrt{\frac{\pi^2}{6}} \left(\|\psi_3^{(5)}(x)\| \right) < \infty,$$

здесь

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\Psi_{3n}|^2 \leq \|\psi_3^{(5)}(x)\|_{L_2(0 < x < p)}^2.$$

Следовательно, ряд, соответствующий функции $u_{yyyy}(x, y)$, сходится абсолютно и равномерно в области D^- .

Вычислив частную производную четвертого порядка по x от уравнения (4.40), докажем её сходимость,

$$|u_{xxxx}(x, y)| \leq M \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n}{p} \right)^4 \left(|\rho_n(y)| + \lim_{B \rightarrow -\infty} \int_B^0 |G_n(\xi, y)| |f_n(\xi)| d\xi \right) \leq M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (|\Psi_{3n}|).$$

Используя неравенство Коши-Буняковского и Бесселя, получим

$$|u_{xxxx}(x, y)| \leq M \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} \left(\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\Psi_{3n}|^2} \right) \leq M \sqrt{\frac{\pi^2}{6}} \left(\|\psi_3^{(5)}(x)\| \right) < \infty.$$

Следовательно, $u_{xxxx}(x, y)$ также сходится абсолютно и равномерно в области D^- .

Теорема 4.2 доказана.

Список литературы

- [1] Турбин, М.В.: *Исследование начально краевой задачи для модели движения жидкости Герше - Балки*. Вест. Воронеж. Гос. Ун-та. Сер. Физ. Мат. № 2. - С. 246-257 (2013).
- [2] Amosov, A.A.: *On solvability of a fourth-order equation describing the dynamics of a viscous gas flow*. Mathematical Notes. **110**(4), pp. 483–498 (2021).
- [3] Шабров, С.А.: *Об оценках функций влияния одной математической модели четвёртого порядка*. Вест. Воронеж. Гос. Ун-та. Сер. Физ. Мат. **20**(2), - С. 168-179 (2015).
- [4] Al-Gwaiz, M.A., Benci, V., Gazzola, F.: *Bending and stretching of homogeneous plates: A fourth-order differential equation model*. Journal of Differential Equations. **262**(3), pp. 2453–2482 (2017).
- [5] Джурраев, Т.Д., Сопуев, А.: *К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвёртого порядка*. Ташкент. «Фан». -144 с (2000).
- [6] Аманов, Д, Мурзамбетова, М.Б.: *Краевая задача для уравнения четвёртого порядка с младшим членом*. Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. Выпуск **1** -С. 3–10. DOI: 10.20537/vm130101 (2013).
- [7] Аманов, Д., Бекиев, А.Б., Отарова, Ж.А.: *Краевая задача для уравнения четвёртого порядка*. Узб.мат.журнал. -№4. -С.11-18 (2015).
- [8] Сабитов, К. Б.: *Колебания балки с заделанными концами*. Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ. мат. Науки. **19**(2). -С.311–324 <https://doi.org/10.14498/vsgtu1406> (2015).
- [9] Сабитов, К. Б.: *К теории начально-граничных задач для уравнения стержней и балок*. Диффер. уравн. **53**(1). -С.89–100 (2017).
- [10] Сабитов, К. Б., Фадеева, О. В.: *Начально-граничная задача для уравнения вынужденных колебаний консольной балки*. Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. **25**(1). -С. 51–66. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1845> (2021).
- [11] Dzhuraev, T.D., Apakov, Yu.P.: *On the theory of the third- order equation with multiple characteristics containing the second time derivative*. Ukrainian Mathematical Journal. **62**, -pp.43–55. <https://doi.org/10.1007/s11253-010-0332-8> (2010).
- [12] Apakov, Yu.P., Rutkauskas, S.: *On a boundary problem to third order PDE with multiple characteristics*. Nonlinear Analysis: Modeling and Control. Vilnius. **16**(3). -pp.255–269. DOI:10.15388/NA.16.3.14092 (2011).
- [13] Apakov, Yu.P., Umarov, R.A.: *Solution of the Boundary Value Problem for a Third Order Equation with Little Terms Construction of the Green's Function*. Lobachevskii Journal of Mathematics. **43**, -pp.738–748. DOI:10.1134/S199508022206004X (2022).
- [14] Nurlan, S, Imanbayev., Yelue, Kurmysh.: *On computation of eigenfunctions of composite type equations with regular boundary value conditions*. International Journal of Applied Matematikcs. **34**(4). -pp. 681-692. doi: <http://dx.doi.org/10.12732/ijam.v34i4.7> (2021).
- [15] Аманов, Д., Скоробогатова, Э.Р.: *Краевые задачи для уравнения четвёртого порядка*. Вестник КазНУ сер.мат.,мех., инф. **4**(63).-С.16-20 (2009).
- [16] Apakov, Yu.P., Melikuzieva, D.M.: *On a problem for a fourth-order with multiple characteristics containing the third time derivate*. Lobachevskii Journal of Mathematics. **44**(8). pp.3218-3224. DOI:10.1134/S1995080223080061(2023).
- [17] Apakov, Yu.P., Melikuzieva, D.M.: *On a boundary problem for the fourth order equation with the third derivative with respect to time*. Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. **4**(112).pp.30-40. DOI:10.31489/2023M4/30-40 (2023).
- [18] Kong, S., Zhou, S., Nie, Z., Wang, K.: *Static and dynamic analysis of micro beams based on strain gradient elasticity theory*. International Journal of Engineering Science, **46**(3), 487-498, DOI: 10.1016/j.ijengsci.2007.10.004 (2008).
- [19] Владимиров, В.С., Жаринов, В.В.: *Уравнения математической физики*. — М.: Физматлит. — 400 с. (2000).
- [20] Краснов, М.М., Киселев, А.М., Макаренко, Г.И.: *Интегральные уравнения: задача и примеры с подробным решением, в сб.* Едиториал УРСС, М., 2003.

Solving Boundary Value Problems for a Fourth-Order Equation with Multiple Characteristics in a Semi-Bounded Domain Using the Green's Function Method

Apakov Yu.P., Melikuzieva D.M.

Abstract

This paper considers a boundary value problem posed in a semi-infinite domain for a non-homogeneous fourth-order differential equation with multiple characteristics. The uniqueness of the solutions to the formulated problems is proved using the energy integral method. The existence of solutions is established by the method of separation of variables. In the process of solving the problem, the Green's function is constructed. The solution is obtained in the form of an infinite series; furthermore, the solution itself and all partial derivatives involved in the equation are investigated for absolute and uniform convergence.

Keywords

Partial differential equations; Fourth-order equation; Multiple characteristics; Boundary value problem; Uniqueness; Existence; Green's function; Series; Semi-infinite domain; Absolute and uniform convergence.

Affiliations

Апаков Ю.П.

Address: Namangan State Technical University, Dept. of Higher Mathematics and Institute of Mathematics named after V.I.Romanovsky Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, 160103, Namangan, Uzbekistan.

e-mail: yusupjonapakov@gmail.com

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-9611-1466>

Меликузиева Д.М.

Address: Namangan State Technical University, Dept. of Higher Mathematics, 160103, Namangan, Uzbekistan.

e-mail: meliquziyevadilshoda@gmail.com

ORCID ID: <https://orcid.org/0009-0004-8759-7571>