Uzbekistan Journal of Mathematics and Computer Science
Volume-2, Issue-1, Page 73–84 (2026)
DOI: https://doi.org/10.56143/ujmcs.v2i1.8
Research article

Векторные поля Киллинга на многообразии Sol

А.С. Шарипов* Ж.О. Аслонов и М.А. Эргашев

Аннотация

В статье исследуются векторные поля Киллинга на многообразии Sol, одной из восьми модельных геометрий в классификации Тёрстона. Для стандартной левоинвариантной метрики Sol мы используем согласованный ортонормированный репер и сводим условие Киллинга к явной системе уравнений в частных производных для компонент векторного поля. Получено полное описание векторных полей Киллинга для специальной метрики четырёхмерного многообразия Sol. Кроме того, показано, что многообразие Sol не является риччи-плоским.

Ключевые слова: *геометрии Тёрстона; многообразие Sol; векторные поля Киллинга; производная Ли; риччи-плоское многообразие*

Предметная классификацие AMS (2020): *Основная: 53C30 ; Дополнительная: 53C20; 22E25.*

1. Введение

Геометрия Sol является одной из восьми фундаментальных модельных геометрий в списке трёхмерных геометрий Тёрстона и связана с разрешимой, но не нильпотентной группой Ли. Модель Sol обычно рассматривают как группу Ли, снабжённую левоинвариантной метрикой. Вследствие этого в геометрии Sol геодезические, инварианты кривизны и структура группы изометрий существенно отличаются от евклидова и гиперболического случаев. Это делает геометрию Sol важным объектом при изучении геометрических структур трёхмерных многообразий.

Теория геометрий Тёрстона играет центральную роль в классификации трёхмерных многообразий и в понимании их геометрических структур. Среди исследователей, внёсших вклад в развитие этого направления, следует отметить E. Molnár и J. Szirmai [1], в работах которых систематически изложены общие основы геометрий Тёрстона, модельных геометрий и их топологических приложений. Ряд авторов также изучал задачи, специфичные для геометрии Sol, включая инвариантные метрики, тензоры связности и кривизны, геодезическую структуру и многообразия Sol-типа. В частности, работы L.A. Masaltsev [2], A. Bolcskei [3], R. López [4], B. Daniel [5] и R. Bossly [6] примечательны тем, что в них установлены свойства различных геометрических объектов на многообразии Sol, приведены явные вычисления и выполнены сравнительные анализы.

Кроме того, особый интерес представляют теория симметрий и геодезических линий в геометрии Sol, а также задачи нахождения и описания векторных полей Киллинга и магнитных полей Киллинга [7, 8, 9]. Актуальность изучения векторных полей Киллинга обусловлена их фундаментальной ролью в дифференциальной геометрии и математической физике, поскольку они описывают бесконечно малые изометрии римановых многообразий и тем самым характеризуют их симметрии и инвариантные метрические свойства. Наличие или отсутствие таких полей существенно влияет на геометрическую структуру пространства, классификацию многообразий и поведение геодезических, а в приложениях — на формулировку законов сохранения в теориях гравитации

Received : *01–февраля–2026,* ***Accepted :*** *30–мая–2026*
*** Corresponding author**

и других физических моделях. Поэтому исследование условий существования, размерности алгебры полей Киллинга и их свойств остаётся одной из актуальных задач современной геометрии. Поля Киллинга являются инфинитезимальными генераторами группы изометрий и служат фундаментальным инструментом при изучении алгебр симметрий, инвариантных распределений и геодезической динамики.

A.M. Blaga [10] исследовал поля Киллинга на $\mathbb{R}^3$, наделённом диагональными римановыми метриками. Используя согласованный ортонормированный репер, автор свёл условие $\mathcal{L}_V g = 0$ к явной системе уравнений в частных производных для компонент поля Киллинга и получил описание соответствующих симметрий для нескольких классов диагональных метрик. A.Y. Narmanov и J.O. Aslonov [11] исследовали геометрию орбит, порождённых полями Киллинга. В частности, они проанализировали структурные свойства таких орбит и их связь с исходной метрикой. В работе A.S. Sharipov и F.F. Topvoldiyev [12] исследовали поверхности, обладающие изометричностью по сечениям, установлены условия сохранения их метрических характеристик при соответствующих отображениях, что тесно связано с анализом локальных и глобальных симметрий, описываемых векторными полями Киллинга. Также в работе [13] установлены теоремы существования и единственности выпуклых многогранников с заданной условной кривизной; полученные результаты интерпретируются в терминах инвариантности метрических характеристик относительно групп изометрий, что, естественно, соотносится с исследованием симметрий, порождаемых векторными полями Киллинга.

Голоморфные аффинные векторные поля на расслоениях Вейля были исследованы А.Я. Султановым [14], где получены результаты, связанные с инвариантными геометрическими структурами и их преобразованиями.

Риччи-плоские многообразия (то есть $\mathrm{Ric} = 0$) естественным образом возникают также в теории геометрических потоков и солитонов. В частности, M.A. Lone и T.A. Wani [15] исследовали римановы субмерсии, полное пространство которых допускает h-почти солитон Риччи–Ямабе, и вывели условия, связывающие кривизну Риччи полного многообразия. В работах В.А. Киосака и Й. Микеша [16] получены результаты о сохранении типа Эйнштейна при специальных преобразованиях римановой метрики. В четырёхмерном случае установлены дополнительные ограничения на многообразия Эйнштейна и их кривизну.

2. Предварительные сведения

Определение 2.1. [4] Многообразие Sol (обозначаемое Sol^3) есть структура группы Ли на $\mathbb{R}^3$, задаваемая операцией

$$(x, y, z) \cdot (x', y', z') = \Big(x + e^{-z}x',\ y + e^{z}y',\ z + z'\Big).$$

Его матричное представление имеет следующий вид

$$\begin{pmatrix} e^{-z} & 0 & x \\ 0 & e^{z} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

На многообразии Sol^3 левоинвариантная метрика определяется формулой

$$g = e^{2z}dx^2 + e^{-2z}dy^2 + dz^2. \tag{2.1}$$

Определение 2.2. [8] Четырёхмерное многообразие Sol (обозначаемое Sol^4) есть разрешимая группа Ли с групповым законом

$$(x, y, z, t) \cdot (x', y', z', t') = \big(x + e^{t}x',\ y + e^{t}y',\ z + e^{-2t}z',\ t + t'\big).$$

Его матричное представление имеет вид

$$\begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 & x \\ 0 & e^t & 0 & y \\ 0 & 0 & e^{-2t} & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Стандартную левоинвариантную риманову метрику на Sol^4 можно задать следующим образом

$$g = e^{-2t}(dx^2 + dy^2) + e^{4t}\,dz^2 + dt^2. \tag{2.2}$$

Пусть M — гладкое риманово многообразие с римановой метрикой g и V — векторное поле на (M, g).

Определение 2.3. [10] Векторное поле V называется полем Киллинга, если производная Ли метрики g вдоль V равна нулю, то есть

$$\mathcal{L}_V g(X, Y) = V(g(X, Y)) - g([V, X], Y) - g(X, [V, Y]) = 0,$$

где $X, Y \in \Gamma(TM)$, а $[\cdot, \cdot]$ означает скобку Ли.

Предположим, что разложение данного векторного поля V по базисным векторным полям E_1, E_2, E_3 имеет вид

$$V = V^1 E_1 + V^2 E_2 + V^3 E_3,$$

где V^1, V^2, V^3 — гладкие функции в $\mathbb{R}^3$. Тогда для производной Ли справедлива формула

$$\mathcal{L}_V g(E_i, E_j) = g(\nabla_{E_i} V, E_j) + g(E_i, \nabla_{E_j} V).$$

3. Основные результаты

В работе [10] рассматривается специальная риманова метрика, в которой f_1, f_2, f_3 — гладкие нигде не обращающиеся в нуль функции. В случае Sol^3, поскольку метрика задаётся равенством (2.1), эти функции принимают вид

$$f_1 = e^{-z},\ f_2 = e^z,\ f_3 = 1. \tag{3.1}$$

Следовательно, ортонормированные базисные векторные поля задаются следующим образом

$$E_1 = e^{-z}\frac{\partial}{\partial x},\ E_2 = e^z\frac{\partial}{\partial y},\ E_3 = \frac{\partial}{\partial z}. \tag{3.2}$$

Отсюда следует, что соотношения из [10, Предложение 2.2 и Следствие 2.4] в данном случае не выполняются. Следовательно, базисные поля на многообразии Sol^3 не могут сами по себе быть полями Киллинга.

Справедлива следующая теорема, которая определяет критерий Киллинговости векторного поля на многообразии Sol^3.

Теорема 3.1. *Векторное поле $V = V^1E_1 + V^2E_2 + V^3E_3$ является векторным полем Киллинга на многообразии Sol^3 тогда и только тогда, когда*

$$V^1 = e^z(-c_1x + c_2),\ V^2 = e^{-z}(c_1y + c_3),\ V^3 = c_1,$$

где $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Подставляя функции f_1, f_2, f_3 метрики Sol^3 из (1) в систему для компонент векторного поля Киллинга, приведённую в [10, Предложение 2.1], получаем следующую систему:

$$\begin{cases} e^{-z}\dfrac{\partial V^1}{\partial x} + V^3 = 0, \\ e^{z}\dfrac{\partial V^2}{\partial y} - V^3 = 0, \\ \dfrac{\partial V^3}{\partial z} = 0, \\ e^{z}\dfrac{\partial V^1}{\partial y} + e^{-z}\dfrac{\partial V^2}{\partial x} = 0, \\ V^2 + \dfrac{\partial V^2}{\partial z} + e^{z}\dfrac{\partial V^3}{\partial y} = 0, \\ V^1 - \dfrac{\partial V^1}{\partial z} - e^{-z}\dfrac{\partial V^3}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Так как $\dfrac{\partial V^3}{\partial z} = 0$, то V^3 не зависит от z. Следовательно, существует гладкая функция $A(x,y)$ такая, что $V^3 = A(x,y)$. Далее подставим это в шестое уравнение системы. Получим

$$V^1 - \frac{\partial V^1}{\partial z} - e^{-z}\frac{\partial A}{\partial x} = 0.$$

Отсюда

$$V^1 = \frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial x}e^{-z} + B(x,y)e^{z},$$

где $B(x,y)$ — некоторая гладкая функция.

Аналогично, подставляя $V^3 = A(x,y)$ в пятое уравнение, получаем

$$V^2 + \frac{\partial V^2}{\partial z} + e^{z}\frac{\partial A}{\partial y} = 0.$$

Следовательно,

$$V^2 = -\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial y}e^{z} + C(x,y)e^{-z},$$

где $C(x,y)$ — гладкая функция.

Теперь воспользуемся первым уравнением системы. Подставляя найденное выражение для V^1, имеем $e^{-z}\dfrac{\partial V^1}{\partial x} + A = 0$. Вычислим производную:

$$\frac{\partial V^1}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}e^{-z} + \frac{\partial B}{\partial x}e^{z}.$$

Тогда получаем

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}e^{-2z} + \frac{\partial B}{\partial x} + A = 0.$$

Отсюда $\dfrac{\partial^2 A}{\partial x^2} = 0$, $\dfrac{\partial B}{\partial x} + A = 0$. Далее используем второе уравнение. Подставляя выражение для V^2, получаем $e^{z}\dfrac{\partial V^2}{\partial y} - A = 0$. Вычисляем

$$\frac{\partial V^2}{\partial y} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}e^{z} + \frac{\partial C}{\partial y}e^{-z}.$$

Следовательно,

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}e^{2z} + \frac{\partial C}{\partial y} - A = 0.$$

Поэтому $\dfrac{\partial^2 A}{\partial y^2} = 0$, $\dfrac{\partial C}{\partial y} - A = 0$. Теперь рассмотрим четвёртое уравнение:

$$e^z \frac{\partial V^1}{\partial y} + e^{-z} \frac{\partial V^2}{\partial x} = 0.$$

Имеем

$$\frac{\partial V^1}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} e^{-z} + \frac{\partial B}{\partial y} e^z,$$

$$\frac{\partial V^2}{\partial x} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} e^{z} + \frac{\partial C}{\partial x} e^{-z}.$$

Подставляя эти выражения в четвёртое уравнение, получаем

$$\frac{\partial B}{\partial y} e^{2z} + \frac{\partial C}{\partial x} e^{-2z} = 0.$$

Так как это равенство выполняется при всех z, то $\dfrac{\partial B}{\partial y} = 0$, $\dfrac{\partial C}{\partial x} = 0$. Следовательно, $B = B(x)$ зависит только от x, а $C = C(y)$ зависит только от y.

Наконец, из соотношения $\dfrac{\partial B}{\partial x} + A = 0$ видим, что A зависит только от x, а из соотношения $\dfrac{\partial C}{\partial y} - A = 0$ видим, что A зависит только от y. Следовательно, A должна быть постоянной, то есть $A(x, y) = c_1$. Поэтому $V^3 = c_1$. Так как $A_x = A_y = 0$, полученные формулы упрощаются до $V^1 = B(x)e^z$, $V^2 = C(y)e^{-z}$. Кроме того, соотношения $B'(x) + c_1 = 0$, $C'(y) - c_1 = 0$ влекут $B(x) = c_2 - c_1 x$, $C(y) = c_1 y + c_3$, где c_2, c_3 — постоянные. Таким образом, получаем

$$V^1 = e^z (c_2 - c_1 x),\ V^2 = e^{-z}(c_1 y + c_3),\ V^3 = c_1.$$

Теорема доказана.

Из теоремы 3.1 можно выбрать следующие три линейно независимых поля Киллинга на многообразии Sol^3:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_3 = -x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}.$$

Предложение 3.1. *Многообразие Sol^3 не является риччи-плоским.*

Доказательство. Рассмотрим стандартную метрику Sol^3 g, заданную в (2.1), и соответствующий ортонормированный базис $\{E_1, E_2, E_3\}$ из (3.2). Чтобы доказать, что Sol^3 не является риччи-плоским, вычислим тензор Риччи относительно этого базиса [16, с. 38].

Найдём скобки Ли базисных векторных полей. Из (3.2) имеем

$$[E_3, E_1] = \left[\frac{\partial}{\partial z},\ e^{-z}\frac{\partial}{\partial x}\right] = \frac{\partial(e^{-z})}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x} = -e^{-z}\frac{\partial}{\partial x} = -E_1.$$

Аналогично,

$$[E_3, E_2] = \left[\frac{\partial}{\partial z},\ e^{z}\frac{\partial}{\partial y}\right] = \frac{\partial(e^{z})}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y} = e^{z}\frac{\partial}{\partial y} = E_2.$$

Кроме того, поскольку коэффициенты при E_1 и E_2 зависят только от z, получаем $[E_1, E_2] = 0$.

Используя эти коммутаторные соотношения и формулы для связности Леви–Чивиты, выписанные в [10, с. 8417] и специализированные на функциях f_1, f_2, f_3 для Sol^3, получаем

$$\nabla_{E_1}E_1 = -E_3,\ \nabla_{E_1}E_3 = E_1,\ \nabla_{E_1}E_2 = 0,\ \nabla_{E_2}E_2 = E_3,$$

$$\nabla_{E_2}E_3 = -E_2,\ \nabla_{E_2}E_1 = 0,\ \nabla_{E_3}E_1 = 0,\ \nabla_{E_3}E_2 = 0,\ \nabla_{E_3}E_3 = 0.$$

Таким образом, относительно ортонормированных базисных векторных полей $\{E_1, E_2, E_3\}$ имеем

$$\mathrm{Ric}(E_1, E_1) = 0,\ \mathrm{Ric}(E_2, E_2) = 0,\ \mathrm{Ric}(E_3, E_3) = -2,$$

и $\mathrm{Ric}(E_i, E_j) = 0$ при $i \neq j$. Поскольку $\mathrm{Ric}(E_3, E_3) = -2 \neq 0$, тензор Риччи не обращается тождественно в нуль. Предложение доказано.

Далее мы обобщаем эти результаты для четырёхмерного многообразия Sol^4. Сначала напомним некоторые общие обозначения. Пусть метрика, как в [10, с. 8417], имеет вид

$$g = \frac{1}{f_1^2}dx^2 + \frac{1}{f_2^2}dy^2 + \frac{1}{f_3^2}dz^2 + \frac{1}{f_4^2}dt^2.$$

Как и выше, ортонормированные векторные поля задаются

$$E_1 = f_1\frac{\partial}{\partial x},\ E_2 = f_2\frac{\partial}{\partial y},\ E_3 = f_3\frac{\partial}{\partial z},\ E_4 = f_4\frac{\partial}{\partial t}.$$

Введём обозначение

$$f_{ij} = \frac{f_j}{f_i}\frac{\partial f_i}{\partial x_j},$$

где $i, j = 1, 2, 3, 4$ и $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = t$. Тогда связность Леви–Чивиты и производную Ли можно вычислять аналогично трёхмерному случаю.

$$\nabla_{E_1}E_1 = f_{12}E_2 + f_{13}E_3 + f_{14}E_4,\ \nabla_{E_1}E_2 = -f_{12}E_1,\ \nabla_{E_1}E_3 = -f_{13}E_1,\ \nabla_{E_1}E_4 = -f_{14}E_1,$$

$$\nabla_{E_2}E_2 = f_{21}E_1 + f_{23}E_3 + f_{24}E_4,\ \nabla_{E_2}E_1 = -f_{21}E_2,\ \nabla_{E_2}E_3 = -f_{23}E_2,\ \nabla_{E_2}E_4 = -f_{24}E_2,$$

$$\nabla_{E_3}E_3 = f_{31}E_1 + f_{32}E_2 + f_{34}E_4,\ \nabla_{E_3}E_1 = -f_{31}E_3,\ \nabla_{E_3}E_2 = -f_{32}E_3,\ \nabla_{E_3}E_4 = -f_{34}E_3,$$

$$\nabla_{E_4}E_4 = f_{41}E_1 + f_{42}E_2 + f_{43}E_3,\ \nabla_{E_4}E_1 = -f_{41}E_4,\ \nabla_{E_4}E_2 = -f_{42}E_4,\ \nabla_{E_4}E_3 = -f_{43}E_4.$$

Пусть

$$V = \sum_{k=1}^{4} V^k E_k,$$

тогда получаем следующую систему для производной Ли:

$$\begin{cases} f_1 \dfrac{\partial V^1}{\partial x} - f_{12}V^2 - f_{13}V^3 - f_{14}V^4 = 0, \\ f_2 \dfrac{\partial V^2}{\partial y} - f_{21}V^1 - f_{23}V^3 - f_{24}V^4 = 0, \\ f_3 \dfrac{\partial V^3}{\partial z} - f_{31}V^1 - f_{32}V^2 - f_{34}V^4 = 0, \\ f_4 \dfrac{\partial V^4}{\partial t} - f_{41}V^1 - f_{42}V^2 - f_{43}V^3 = 0, \\ f_1 \dfrac{\partial V^2}{\partial x} + f_2 \dfrac{\partial V^1}{\partial y} + f_{21}V^2 + f_{12}V^1 = 0, \\ f_1 \dfrac{\partial V^3}{\partial x} + f_3 \dfrac{\partial V^1}{\partial z} + f_{31}V^3 + f_{13}V^1 = 0, \\ f_2 \dfrac{\partial V^3}{\partial y} + f_3 \dfrac{\partial V^2}{\partial z} + f_{32}V^3 + f_{23}V^2 = 0, \\ f_1 \dfrac{\partial V^4}{\partial x} + f_4 \dfrac{\partial V^1}{\partial t} + f_{41}V^4 + f_{14}V^1 = 0, \\ f_2 \dfrac{\partial V^4}{\partial y} + f_4 \dfrac{\partial V^2}{\partial t} + f_{42}V^4 + f_{24}V^2 = 0, \\ f_3 \dfrac{\partial V^4}{\partial z} + f_4 \dfrac{\partial V^3}{\partial t} + f_{43}V^4 + f_{34}V^3 = 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

Теперь сформулируем необходимые и достаточные условия, при которых ортонормированные базисные поля E_1, E_2, E_3, E_4 являются полями Киллинга.

Предложение 3.2. *1. Векторное поле E_1 является полем Киллинга тогда и только тогда, когда*

$$\begin{cases} f_1 = f_1(x), \\ f_2 = f_2(y, z, t), \\ f_3 = f_3(y, z, t), \\ f_4 = f_4(y, z, t), \end{cases} \tag{3.4}$$

2. Векторное поле E_2 является полем Киллинга тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} f_1 = f_1(x, z, t), \\ f_2 = f_2(y), \\ f_3 = f_3(x, z, t), \\ f_4 = f_4(x, z, t), \end{cases} \tag{3.5}$$

3. Векторное поле E_3 является полем Киллинга тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} f_1 = f_1(x, y, t), \\ f_2 = f_2(x, y, t), \\ f_3 = f_3(z), \\ f_4 = f_4(x, y, t), \end{cases} \tag{3.6}$$

4. Векторное поле E_4 является полем Киллинга тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} f_1 = f_1(x, y, z), \\ f_2 = f_2(x, y, z), \\ f_3 = f_3(x, y, z), \\ f_4 = f_4(t). \end{cases} \tag{3.7}$$

Доказательство. 1. Имеем $V^1 = 1$ и $V^2 = V^3 = V^4 = 0$. Следовательно, из (3.3) получаем

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial f_3}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial f_4}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial f_1}{\partial z} = 0,\ \frac{\partial f_1}{\partial t} = 0.$$

В итоге, получаем требуемое заключение. Оставшиеся системы (3.5), (3.6) и (3.7) доказываются аналогично.

Пример 3.1. Если метрика g задаётся формулой

$$g = e^{x+2y+t}dx^2 + e^{x-yt}dy^2 + e^{2z}dz^2 + e^{xy^2-2t}dt^2,$$

то $E_3 = e^{-z}\dfrac{\partial}{\partial z}$ является векторным полем Киллинга.

Сравнивая с (2.2), получаем

$$f_1 = e^t,\ f_2 = e^t,\ f_3 = e^{-2t},\ f_4 = 1.$$

Ни одна из систем (3.4), (3.5), (3.6) и (3.7) не выполняется для этих функций f_i $(i = 1, 2, 3, 4)$. Следовательно, ортонормированные базисные поля на многообразии Sol^4 не могут быть полями Киллинга.

Теорема 3.2. *Векторное поле $V = V^1E_1 + V^2E_2 + V^3E_3 + V^4E_4$ является полем Киллинга на многообразии Sol^4 тогда и только тогда, когда*

$$V^1 = e^{-t}(c_1x - c_2y + c_3),\ V^2 = e^{-t}(c_1y + c_2x + c_4),\ V^3 = e^{2t}(-2c_1z + c_5),\ V^4 = c_1,$$

где $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Подставляя f_1, f_2, f_3, f_4 для многообразия Sol^4 в указанную выше систему, получаем

$$\begin{cases} e^t\dfrac{\partial V^1}{\partial x} - V^4 = 0, \\ e^t\dfrac{\partial V^2}{\partial y} - V^4 = 0, \\ e^{-2t}\dfrac{\partial V^3}{\partial z} + 2V^4 = 0, \\ \dfrac{\partial V^4}{\partial t} = 0, \\ \dfrac{\partial V^2}{\partial x} + \dfrac{\partial V^1}{\partial y} = 0, \\ e^t\dfrac{\partial V^3}{\partial x} + e^{-2t}\dfrac{\partial V^1}{\partial z} = 0, \\ e^t\dfrac{\partial V^3}{\partial y} + e^{-2t}\dfrac{\partial V^2}{\partial z} = 0, \\ e^t\dfrac{\partial V^4}{\partial x} + \dfrac{\partial V^1}{\partial t} + V^1 = 0, \\ e^t\dfrac{\partial V^4}{\partial y} + \dfrac{\partial V^2}{\partial t} + V^2 = 0, \\ e^{-2t}\dfrac{\partial V^4}{\partial z} + \dfrac{\partial V^3}{\partial t} - 2V^3 = 0. \end{cases}$$

Из четвёртого уравнения видно, что V^4 не зависит от t. Таким образом, существует гладкая функция $A(x,y,z)$ такая, что

$$V^4 = A(x,y,z).$$

Подставляя $V^4 = A(x,y,z)$ в последние три уравнения, получаем

$$\frac{\partial V^1}{\partial t} + V^1 = -e^t\frac{\partial A}{\partial x},\ \frac{\partial V^2}{\partial t} + V^2 = -e^t\frac{\partial A}{\partial y},\ \frac{\partial V^3}{\partial t} - 2V^3 = -e^{-2t}\frac{\partial A}{\partial z}.$$

Решая эти линейные уравнения по переменной t, получаем

$$V^1 = -\frac{1}{2}e^t\frac{\partial A}{\partial x} + e^{-t}B_1(x,y,z),\ V^2 = -\frac{1}{2}e^t\frac{\partial A}{\partial y} + e^{-t}B_2(x,y,z),\ V^3 = \frac{1}{4}e^{-2t}\frac{\partial A}{\partial z} + e^{2t}B_3(x,y,z),$$

где B_1, B_2, B_3 не зависят от t.

Теперь используем первые три уравнения. Из $e^t\dfrac{\partial V^1}{\partial x} - A = 0$ получаем

$$e^t\frac{\partial}{\partial x}\Big(-\frac{1}{2}e^t\frac{\partial A}{\partial x} + e^{-t}B_1\Big) - A = 0,$$

и поэтому

$$-\frac{1}{2}e^{2t}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial B_1}{\partial x} - A = 0.$$

Так как это верно при всех t, заключаем, что $\dfrac{\partial^2 A}{\partial x^2} = 0,\ \dfrac{\partial B_1}{\partial x} = A$. Аналогично, из $e^t\dfrac{\partial V^2}{\partial y} - A = 0$ получаем $\dfrac{\partial^2 A}{\partial y^2} = 0,\ \dfrac{\partial B_2}{\partial y} = A$. Из $e^{-2t}\dfrac{\partial V^3}{\partial z} + 2A = 0$ получаем $e^{-2t}\dfrac{\partial}{\partial z}\Big(\dfrac{1}{4}e^{-2t}\dfrac{\partial A}{\partial z} + e^{2t}B_3\Big) + 2A = 0$, и поэтому

$$\frac{1}{4}e^{-4t}\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + \frac{\partial B_3}{\partial z} + 2A = 0.$$

Отсюда следует, что $\dfrac{\partial^2 A}{\partial z^2} = 0,\ \dfrac{\partial B_3}{\partial z} = -2A$.

Далее используем шестое уравнение $e^t\dfrac{\partial V^3}{\partial x} + e^{-2t}\dfrac{\partial V^1}{\partial z} = 0$. Подставляя V^1 и V^3 и упрощая, получаем

$$-\frac{1}{4}e^{-t}\frac{\partial^2 A}{\partial x\,\partial z} + e^{3t}\frac{\partial B_3}{\partial x} + e^{-3t}\frac{\partial B_1}{\partial z} = 0.$$

Поскольку это тождество верно при всех t, получаем $\dfrac{\partial B_3}{\partial x} = 0,\ \dfrac{\partial B_1}{\partial z} = 0,\ \dfrac{\partial^2 A}{\partial x\,\partial z} = 0$. Аналогично, из седьмого уравнения получаем $\dfrac{\partial B_3}{\partial y} = 0,\ \dfrac{\partial B_2}{\partial z} = 0,\ \dfrac{\partial^2 A}{\partial y\,\partial z} = 0$. Поскольку $\dfrac{\partial^2 A}{\partial z^2} = 0$, можно записать

$$A(x,y,z) = p(x,y)\,z + q(x,y).$$

Соотношения $\dfrac{\partial^2 A}{\partial x\,\partial z} = 0$ и $\dfrac{\partial^2 A}{\partial y\,\partial z} = 0$ влекут $\dfrac{\partial p}{\partial x} = 0,\ \dfrac{\partial p}{\partial y} = 0$, и поэтому $p = \alpha$ является константой. Значит, $A(x,y,z) = \alpha z + q(x,y)$. Поскольку $\dfrac{\partial B_1}{\partial z} = 0$, функция B_1 не зависит от z. Используя $\dfrac{\partial B_1}{\partial x} = A$, видим, что A не зависит от z, что влечёт $\alpha = 0$. Отсюда $A(x,y,z) = q(x,y)$. Кроме того, поскольку $\dfrac{\partial B_3}{\partial x} = \dfrac{\partial B_3}{\partial y} = 0$, функция B_3 зависит только от z. Поскольку $\dfrac{\partial B_3}{\partial z} = -2A$, а левая часть зависит только от z, получаем, что A является константой. Итак, $V^4 = c_1$.

Поскольку $\dfrac{\partial A}{\partial x} = \dfrac{\partial A}{\partial y} = \dfrac{\partial A}{\partial z} = 0$, выражения для V^1, V^2, V^3 упрощаются до

$$V^1 = e^{-t}B_1(x,y),\ V^2 = e^{-t}B_2(x,y),\ V^3 = e^{2t}B_3(z).$$

Подставляя это в первые три уравнения и используя $V^4 = c_1$, получаем

$$\frac{\partial B_1}{\partial x} = c_1, \ \frac{\partial B_2}{\partial y} = c_1, \ \frac{\partial B_3}{\partial z} = -2c_1.$$

Следовательно,

$$B_1 = c_1 x + \phi(y), \ B_2 = c_1 y + \psi(x), \ B_3 = -2c_1 z + c_5,$$

где ϕ и ψ — гладкие функции одной переменной. Наконец из пятого уравнения следует

$$\frac{\partial V^2}{\partial x} + \frac{\partial V^1}{\partial y} = 0,$$

что

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0.$$

Вследствие этого, существует константа c_2 такая, что $\dfrac{\partial \psi}{\partial x} = c_2, \ \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = -c_2$. Отсюда

$$\psi(x) = c_2 x + c_4, \ \phi(y) = -c_2 y + c_3.$$

Подставляя эти функции в V^1, V^2, V^3, V^4 получаем

$$V^1 = e^{-t}(c_1 x - c_2 y + c_3), \ V^2 = e^{-t}(c_1 y + c_2 x + c_4), \ V^3 = e^{2t}(-2c_1 z + c_5), \ V^4 = c_1.$$

Доказательство завершено.

Предложение 3.3. *Многообразие Sol^4 не является риччи-плоским.*

Доказательство. Сначала вычислим скобки Ли $[E_i, E_j]$ ортонормированного базиса. Поскольку $E_4 = \dfrac{\partial}{\partial_t}$, получаем

$$[E_4, E_1] = \left[\frac{\partial}{\partial t}, e^t \frac{\partial}{\partial x}\right] = \frac{\partial(e^t)}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x} = e^t \frac{\partial}{\partial x} = E_1,$$

$$[E_4, E_2] = \left[\frac{\partial}{\partial t}, e^t \frac{\partial}{\partial y}\right] = \frac{\partial(e^t)}{\partial t}\frac{\partial}{\partial y} = e^t \frac{\partial}{\partial y} = E_2,$$

$$[E_4, E_3] = \left[\frac{\partial}{\partial t}, e^{-2t} \frac{\partial}{\partial z}\right] = \frac{\partial(e^{-2t})}{\partial t}\frac{\partial}{\partial z} = -2e^{-2t} \frac{\partial}{\partial z} = -2E_3.$$

Все остальные скобки равны нулю. Действительно, E_1, E_2, E_3 касательны к различным координатным направлениям, а их коэффициенты зависят только от t, поэтому

$$[E_1, E_2] = [E_1, E_3] = [E_2, E_3] = 0.$$

Далее вычислим связность Леви–Чивиты:

$$\nabla_{E_1} E_1 = E_4, \ \nabla_{E_1} E_2 = 0, \ \nabla_{E_1} E_3 = 0, \ \nabla_{E_1} E_4 = -E_1. \ \nabla_{E_2} E_1 = 0, \ \nabla_{E_2} E_2 = E_4,$$

$$\nabla_{E_2} E_3 = 0, \ \nabla_{E_2} E_4 = -E_2. \ \nabla_{E_3} E_1 = 0, \ \nabla_{E_3} E_2 = 0, \ \nabla_{E_3} E_3 = -2E_4, \ \nabla_{E_3} E_4 = 2E_3.$$

$$\nabla_{E_4} E_1 = 0, \ \nabla_{E_4} E_2 = 0, \ \nabla_{E_4} E_3 = 0, \ \nabla_{E_4} E_4 = 0.$$

Теперь, согласно [16, с. 38], вычислим тензор Риччи:

$$\mathrm{Ric}(E_1, E_1) = 0, \ \mathrm{Ric}(E_2, E_2) = 0, \ \mathrm{Ric}(E_3, E_3) = 0. \ \mathrm{Ric}(E_4, E_4) = -6,$$

и $\mathrm{Ric}(E_i, E_j) = 0$ при $i \neq j$. В частности, тензор Риччи не обращается тождественно в нуль, поскольку $\mathrm{Ric}(E_4, E_4) = -6 \neq 0$. Предложение доказано.

4. Заключение

В данной работе исследованы векторные поля Киллинга на трёхмерном и четырёхмерном многообразиях типа Sol. Для класса диагональных римановых метрик построен естественный ортонормированный репер, и из условия $\mathcal{L}_V g = 0$ получена явная система уравнений на компоненты поля V. Тем самым получены необходимые и достаточные условия киллинговости в терминах функций метрики f_i и компонент V в выбранном базисе.

В случае стандартной геометрии Sol^3 получено полное описание алгебры полей Киллинга и выделены три линейно независимых генератора алгебры изометрий. Дополнительно вычислены тензор кривизны и тензор Риччи в ортонормированном репере, что позволяет заключить: Sol^3 не является риччи-плоским. Аналогичные результаты получены для Sol^4: описаны все поля Киллинга и на основе прямых вычислений показано, что тензор Риччи не обращается тождественно в нуль, то есть Sol^4 также не является риччи-плоским.

Разработанный подход даёт прямую вычислительную схему для описания инфинитезимальных изометрий на многообразиях Sol-типа с диагональными метриками. В качестве дальнейших направлений можно выделить исследование полей Киллинга для более общих левоинвариантных метрик на разрешимых группах Ли, а также изучение связанных геометрических условий (Эйнштейновость, солитоны Риччи) и поведения кривизны в более высоких размерностях.

Список литературы

[1] E. Molnár, J. Szirmai.: *Symmetries in the 8 homogeneous 3-geometries.* Symmetry: Culture and Science. **21** (1-3), 87-117 (2010).

[2] L.A. Masaltsev.: *Minimal surfaces in standard three-dimensional geometry Sol.* Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. **2** (1), 104-110 (2006).

[3] A. Bolcskei, B. Szilagyi.: *Frenet formulas and geodesics in Sol geometry,* Beit. Alg. Geom. **48** (2), 411–421 (2007).

[4] R. López, M.I. Munteanu,: *Surfaces with constant mean curvature in Sol geometry,* Differential Geom. Appl. **29** (1), 238–245 (2011). https://doi.org/10.1016/j.difgeo.2011.04.047

[5] B. Daniel, P. Mira.: *Existence and uniqueness of constant mean curvature spheres in* Sol_3. Journal für die reine und angewandte Mathematik. 1-32 (2013).

[6] R. Bossly, G.F. Ramandi, M.D. Siddiqi.: *2-Conformal Vector Fields on the Model Sol Space and Hyperbolic Ricci Solitons.* Journal of Mathematics. 1-8 (2025). https://doi.org/10.1155/jom/6724169

[7] Z. Erjavec.: *Generalizations of Killing vector fields in Sol space.* Filomat. **33** (15), 4803-4810 (2019), https://doi.org/10.2298/FIL1915803E

[8] Z. Erjavec.: *Geodesics and Translation Curves in* Sol_0^4. Mathematics. **11** (6), (2023). https://doi.org/10.3390/math11061533

[9] F.S. Dündar, Ö. Kelekçi, G. Ayar.: *A physical classification of Killing magnetic fields in Thurston geometries.* Mathematical Methods in the Applied Sciences. **48** (4), 5016-5023 (2024).

[10] A.M. Blaga.: *On certain symmetries of* $\mathbb{R}^3$ *with a diagonal metric.* Filomat. **39** (24), 8417–8437 (2025). https://doi.org/10.2298/FIL2524417B

[11] A.Y. Narmanov, J.O. Aslonov.: *On the Geometry of the Orbits of Killing Vector Fields.* Artificial Intelligence Application in Networks and Systems. **724**, (2023). https://doi.org/10.1007/978-3-031-35314-7_7

[12] A.S. Sharipov, F.F. Topvoldiyev.: *On some properties of surfaces with isometric on sections* Bulletin of the Institute of Mathematics (Bull. Inst. Math.). **4** (1), 11–15 (2021).

[13] A. Sharipov, M. Keunimjaev.: *Existence and Uniqueness of Polyhedra with Given Values of the Conditional Curvature.* International Electronic Journal of Geometry. **16** (1), 160-170 (2023). https://doi.org/10.36890/iejg.1246589

[14] А.Я. Султанов.: *Голоморфные аффинные векторные поля на расслоениях Вейля.* Матем. заметки. **91** (6), 896–899 (2012).

[15] M.A. Lone, T.A. Wani.: *Riemannian submersions whose total manifold admits h-almost Ricci-Yamabe solution.* Commun. Korean Math. Soc. **39** (2), 479-492 (2024). https://doi.org/10.4134/CKMS.c230203

[16] В.А. Киосак, Й. Микеш.: *О геодезических отображениях пространств Эйнштейна.* Изв. вузов. Матем. **47** (11), 32–37 (2003).

Killing vector fields on the Sol manifold

A. Sharipov, J. Aslonov and M. Ergashev

Abstract

We investigate Killing vector fields on the Sol manifold, one of Thurston's eight model geometries. For the standard left-invariant Sol metric, we employ an adapted orthonormal frame and reduce the Killing condition to an explicit system of partial differential equations for the components of a vector field. Solving this system, we obtain a complete description of Killing vector fields for the Sol metric. In addition, we compute the Ricci tensor and show that the Sol manifold is not Ricci-flat.

Keywords

Thurston geometries; Sol manifold; Killing vector field; Lie derivative; Ricci-flat manifold.

Affiliations

A.S. Sharipov
Address: National University of Uzbekistan, Dept. of Geometry and Topology, Tashkent-Uzbekistan.
e-mail: asharipov@inbox.ru
ORCID ID: https://orcid.org/0000-0002-7019-4694

J.O. Aslonov
Address: National University of Uzbekistan, Dept. of Geometry and Topology, Tashkent-Uzbekistan.
e-mail: jasurbek05@gmail.com
ORCID ID: https://orcid.org/0000-0001-7519-5779

M.A. Ergashev
Address: National University of Uzbekistan, Dept. of Geometry and Topology, Tashkent-Uzbekistan.
e-mail: turonsitiyim@gmail.com
ORCID ID: https://orcid.org/0009-0001-2701-2322