Uzbekistan Journal of Mathematics and Computer Science
Volume-2, Issue-2, Page 1–21 (2026)
DOI: https://doi.org/10.56143/ujmcs.v2i2.1
Research article

Об одной коэффициентной обратной задаче с нелокальными граничными условиями для трехмерного уравнения Трикоми в неограниченном параллелепипеде

Шокиров Абдувасик А.

Аннотация

В статье исследуется коэффициентная обратная задача с нелокальными краевыми условиями для трёхмерного уравнения Трикоми в неограниченном параллелепипеде. Для доказательства разрешимости задачи используются преобразование Фурье, методы "ε-регуляризации", априорных оценок и сжимающих отображений.

Ключевые слова: *Трёхмерное уравнение Трикоми, коэффициентная обратная задача с нелокальными условиями, преобразование Фурье, методы "ε-регуляризации", априорных оценок, последовательных приближений и сжимающих отображений.*

Предметная классификацие AMS (2020): *Основная: 35M10.*

1. Введение

В исследовании нелокальных задач была выявлена тесная связь между задачами с нелокальными граничными условиями и обратными задачами [1]. Обратные задачи для классических уравнений, таких как параболические, эллиптические и гиперболические уравнения, изучены достаточно хорошо [2, 3, 4, 5].

Как нам известно, в линейных обратных задачах при наличии дополнительной информации требуется определить как само решение уравнения, так и неизвестную правую часть уравнения, а в коэффициентной обратной задаче при дополнительных информациях ищется как само решения уравнения, так и неизвестную правую часть уравнения, а также коэффициент при неизвестной функции. Такие задачи ранее для вырождающихся уравнений и уравнений смешанного типа не рассматривались. Линейные обратные задачи (с поиском решений задачи и правых частей уравнений) для модельных уравнений смешанного типа второго порядка на плоскости были изучены в работах А.Г. Меграбова, К.Б. Сабитова и их учеников [6, 7, 8, 9, 10], а для многомерных уравнений смешанного типа второго порядка в ограниченных областях с локальными граничными условиями — изучены и развиты в работе С.З. Джамалова, С.Г. Пяткова [11], а с нелокальными граничными условиями — в работах С.З. Джамалова, Р.Р. Ашурова [12].

Линейные обратные задачи для уравнений смешанного типа второго порядка как первого, так и второго рода в неограниченных областях изучались в работах С.З. Джамалова, Р.Р. Ашурова, Х.Ш. Туракулова [13] и С.З. Джамалова, Б.К. Сипатдиновой [14]. Насколько нам известно, коэффициентные обратные задачи (в которых требуется определить решения, коэффициенты и правые части уравнений) для вырождающихся уравнений и уравнений смешанного типа до настоящего времени изучены крайне мало. Коэффициентные обратные

Received : *10–february–2026,* ***Accepted :*** *12–september–2026*
**** Corresponding author***

задачи с нелокальными граничными условиями в ограниченной области для уравнения Трикоми были впервые поставлены и исследованы в работе С.З. Джамалова, А.А. Шокирова [15]. Такие задачи в неограниченных областях практически не исследованы. В отличие от работы [15], в настоящей работе коэффициентная обратная задача рассматривается в неограниченном параллелепипеде $G = Q \times R$ с условиями затухания при $|z| \to \infty$. Для исследования задачи применяется преобразование Фурье по переменной z, позволяющее свести её к семейству нагруженных задач в ограниченной области Q. Разрешимость нелинейной задачи устанавливается с помощью методов «$\varepsilon-$ регуляризации», априорных оценок, последовательных приближений и сжимающих отображений. Полученный результат является локальным относительно данных, что характерно для большинства коэффициентных обратных задач.

Отметим, что, теорема существования и единственности решения коэффициентной обратной задачи для уравнения смешанного типа является новым результатом в теории уравнений смешанного типа.

Пусть Ω — область в R^n. Напомним, что дифференциальное уравнение называется нагруженным, если оно содержит след некоторых операций от искомого решения на многообразиях, принадлежащих замыканию области $\bar{\Omega}$, размерность которых строго меньше n [16].

В области

$$G = Q \times (-\infty, +\infty) = \{(x,t,z)|\ -1 < x < 1,\ 0 < t < T,\ -\infty < z < +\infty\}$$

рассмотрим трехмерное уравнение Трикоми:

$$Lu = xu_{tt} - bu_{xx} - u_{zz} + \alpha(x,t)u_t = c(x,t)u + \psi(x,t,z) \tag{1.1}$$

здесь $\alpha(x,t)$ — достаточно большая функция, b — достаточно большое положительное число. Пусть $\psi(x,t,z) = g(x,t,z) + h(x,t) \cdot f(x,t,z)$, где $g(x,t,z)$, $f(x,t,z)$ — заданные функции, а $h(x,t)$ и $c(x,t)$ подлежат определению.

Предварительные сведения.

Через $L_2(Q)$ обозначим пространство квадратично суммируемых функций со скалярным произведением и нормой:

$$(u,v)_0 = \int\limits_Q uv\,dxdt, \qquad \|u\|_0^2 = \|u\|_{L_2(Q)}^2 = \int\limits_Q u^2\,dxdt.$$

Через $W_2^l(Q)$, $(l = 0,1,2,\dots)$ обозначим пространство Соболева с нормой:

$$\|\vartheta\|_l^2 = \|\vartheta\|_{W_2^l(Q)}^2 = \sum_{|\alpha| \le l} \int\limits_Q |D^\alpha \vartheta|^2\,dxdt,$$

α — это мультииндекс, D^α — обобщённая производная по переменным x и t, $W_2^0(Q) = L_2(Q)$.

Через $C^l(Q)$, $(l = 0,1,2,\dots)$ обозначим пространство непрерывных в Q функций, имеющих непрерывные в Q производные до порядка l включительно,

$$C^0(Q) = C(Q), \qquad \|u\|_{C(Q)} = \max_{(x,t)\in Q} |u(x,t)|.$$

В общем случае

$$\|u\|_{C^l(Q)} = \|u\|_{C(Q)} + \sum_{|k| \le l} \left\| D^{(k)}u \right\|_{C(Q)}.$$

Обозначим через

$$\hat{u}(x,t,\lambda) = (2\pi)^{-1/2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,t,z)e^{-i\lambda z}\,dz$$

преобразование Фурье по переменной z функции $u(x,t,z)$, а через

$$u(x,t,z) = (2\pi)^{-1/2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(x,t,\lambda) e^{i\lambda z}\, d\lambda$$

обратное преобразование Фурье.

Теперь с помощью преобразования Фурье определим анизотропные пространства Соболева $W_2^{l,s}(G)$ с нормой

$$[u]_{l,s}^2 \equiv \|u\|_{W_2^{l,s}(G)}^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1+\lambda^2)^s \, \|\hat{u}\|_{W_2^l(Q)}^2 d\lambda,$$

здесь s, l — любые конечные положительные целые числа, где через $W_2^l(Q)$ (при $l=0$, $W_2^0(Q) = L_2(Q)$) обозначены пространства Соболева [17, 18, 19].

2. Постановка задачи

Найти тройку функций $\{u(x,t,z),\ h(x,t),\ c(x,t)\}$, удовлетворяющую уравнению (1.1) почти всюду в области G, такую, что функция $u(x,t,z)$ удовлетворяет следующим краевым условиям:

1) нелокальные краевые условия

$$\gamma D_t^p u|_{t=0} = D_t^p u|_{t=T}, \tag{2.1}$$

$$\rho\, D_x^p u|_{x=-1} = D_x^p u|_{x=1}, \quad p = 0, 1, \tag{2.2}$$

$$\lim_{|z|\to\infty} u = 0, \quad \lim_{|z|\to\infty} u_z = 0, \tag{2.3}$$

где γ, ρ — числа, такие что $|\gamma| > 1$, $|\rho| \geq 1$;

2) дополнительные условия

$$u(x,t,\ell_1) = \varphi_1(x,t), \tag{2.4}$$

$$u(x,t,\ell_2) = \varphi_2(x,t), \tag{2.5}$$

$$-\infty < \ell_1 < \ell_2 < +\infty,$$

причём функции$u(x,t,z)$, $h(x,t)$ и $c(x,t)$ принадлежат классу

$$U = \left\{ (u,\ h,\ c) \mid u \in W_2^{2,3}(G),\ h \in W_2^2(Q),\ c \in W_2^2(Q) \right\}.$$

Определение 2.1. Обобщённым решением задачи (1.1)–(2.5) называется функция $\{u, h, c\}$ из класса U, которая удовлетворяет уравнению (1.1) почти всюду в области G при выполнении условий (2.1)–(2.5).

Пусть относительно коэффициентов и правой части уравнения (1.1) выполнены следующие условия:

Условие 1:

1) нелокальные условия:

$$\alpha(x,0) = \alpha(x,T), \quad \alpha(-1,t) = \alpha(1,t),$$

$$\gamma g(x,0,z) = g(x,T,z), \quad \gamma f(x,0,z) = f(x,T,z);$$

2) гладкость:

$$f(x,t,\ell_i) = f_i \in C_{x,t}^{0,1}(\bar{Q}), \quad g(x,t,\ell_i) = g_i \in C_{x,t}^{0,1}(\bar{Q}),$$

$$f \in W_2^{3,3}(G), \quad g \in W_2^{1,3}(G);$$

3) $2\alpha(x,t)+x\mu>\delta_1>0$, $\alpha(x,t)\mu-\alpha_t(x,t)>\delta_2>0$, $b\min\{1,\mu\}>3$, для всех $(x,t)\in Q$, где $\mu>0$.

Условие 2:

$$\varphi_i\in W_2^3(Q),\quad \gamma D_t^p\varphi_i|_{t=0}=D_t^p\varphi_i|_{t=T},\quad \rho D_x^p\varphi_i|_{x=-1}=D_x^p\varphi_i|_{x=1},\quad p=0,1,\quad \varphi_i\neq 0.$$

Докажем следующую вспомогательную лемму.

Лемма 2.1. *Для любой функции $u(x,t)\in W_2^1(Q)$ удовлетворяющей условию $\gamma u(x,0)=u(x,T)$, справедливо следующее неравенство*

$$\int\limits_Q u^2\le c_1^*\int\limits_Q u_t^2dQ,\qquad c_1^*>0.$$

Доказательство. Рассмотрим для $\forall u\in W_2^1(Q),\ \gamma u(x,0)=u(x,T)$ следующие тождества

$$u(x,t)=\int\limits_0^t u_\tau d\tau+u(x,0),\quad u(x,t)=-\int\limits_t^T u_\tau d\tau+u(x,T).$$

Умножим первое из них на γ и вычтем второго. Получим

$$(\gamma-1)u=\gamma\int\limits_0^t u_\tau d\tau+\int\limits_t^T u_\tau d\tau+\gamma u(x,0)-u(x,T).$$

По условию $\gamma u(x,0)-u(x,T)=0$. Теперь возведем в квадрат обе части и оценим сверху, используя неравенство Гёльдера

$$(\gamma-1)^2u^2=\left(\gamma\int\limits_0^t u_\tau d\tau+\int\limits_t^T u_\tau d\tau\right)^2\le 2\gamma^2\left(\int\limits_0^t u_\tau d\tau\right)^2+2\left(\int\limits_t^T u_\tau d\tau\right)^2\le\gamma_* T\int\limits_0^T u_\tau^2 d\tau,$$

где $\gamma_*=2\max(\gamma^2,1)$. Так как $\gamma\neq 1$, тогда разделяем обе части неравенства на $(\gamma-1)^2$ и интегрируем по области Q:

$$\int\limits_Q u^2dQ\le c_1^*\int\limits_Q u_t^2dQ$$

где $c_1^*=\frac{\gamma_* T^2}{(\gamma-1)^2}>0$. *Лемма доказана.*

Лемма 2.2. *Для любой функции $u(x,t)\in W_2^1(Q)$ удовлетворяющую условию $\gamma u(x,0)=u(x,T)$, справедливо следующее неравенство*

$$\|u\|_1^2\le c_1\int\limits_Q(u_t^2+u_x^2)dQ,$$

где $c_1>0$

Лемма 2.2 легко доказывается с помощью лемммы 2.1.

Введём следующие обозначения:

$$H=\det\begin{pmatrix}\varphi_1 & f_1\\ \varphi_2 & f_2\end{pmatrix},\quad |H|=|\varphi_1f_2-\varphi_2f_1|\ge\eta>0,$$

$$L_1\varphi_i\equiv x\varphi_{itt}-b\varphi_{ixx}+\alpha\varphi_{it}-g_i,\ \ i=1,2,$$

$$\gamma_0=m_1m_3\left([g]_{1,3}^2+\varepsilon_{\varphi,g}[f]_{2,3}^2\right),\quad \gamma_1=m_1\left(\varepsilon_{\varphi,g}+m_2[f]_{2,3}^2\right),\quad \gamma_2=m_1m_2,$$

где

$$\varepsilon_{\varphi,g}=\left(\left(1+b+\|\alpha\|^2_{C^1}\right)\sum_{i=1,2}\sum_{|\alpha|=1}^{3}\|D^\alpha\varphi_i\|^2_C+\sum_{i=1,2}\|g_i\|^2_{C^1}\right),$$

$$m_1=\frac{196}{\delta}\left(3+\mu^2\right),\quad m_2=\frac{3\pi}{4}c_2^2\mathfrak{F},\quad m_3=2m_1m_2\|\alpha\|^2_{C^1},$$

для $(x,t)\in Q$, здесь $\mu=\frac{2}{T}\ln|\gamma|>0$, $|\gamma|>1$; $\beta=\ln|\rho|>0$, $|\rho|\geq 1$; δ — положительное число, точное значение которого будет определено ниже, через $\mathfrak{F}$ обозначим следующее выражение

$$\mathfrak{F}\equiv\max\left(\|f_1\|^2_{C^{0,1}_{x,t}(\bar{Q})},\|f_2\|^2_{C^{0,1}_{x,t}(\bar{Q})},\|\varphi_1\|^2_{C^{0,1}_{x,t}(\bar{Q})},\|\varphi_2\|^2_{C^{0,1}_{x,t}(\bar{Q})}\right).$$

Без ограничения общности можно положить $\eta=1$.

Теперь из уравнения (1.1) с учётом условий (2.4), (2.5), формально определим коэффициенты $c(x,t)$ и $h(x,t)$. Для этого рассмотрим следы уравнения (1.1) при $z=\ell_i$, $i=1,2$:

$$Lu|_{z=\ell_i}=x\varphi_{i\,tt}-b\varphi_{i\,xx}-u_{zz}(x,t,\ell_i)=c\varphi_i+hf_i+g_i,\quad i=1,2.$$

С учётом условий (2.4), (2.5) и условия $H\neq 0$ получаем систему, позволяющую формально определить $c(x,t)$ и $h(x,t)$:

$$\begin{cases}\varphi_1c+f_1h=\Phi_1+L_1\varphi_1,\\ \varphi_2c+f_2h=\Phi_2+L_1\varphi_2,\end{cases}\tag{2.6}$$

где

$$\Phi_i=\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\xi^2\hat{u}(x,t,\xi)e^{i\xi\ell_i}d\xi,\quad L_1\varphi_i\equiv x\varphi_{i\,tt}-b\varphi_{i\,xx}+\alpha\varphi_{i\,t}-g_i,\quad i=1,2.$$

Решая систему (2.6), получаем

$$c(x,t)=\frac{1}{H}\left[f_2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\xi^2\hat{u}(x,t,\xi)e^{i\xi\ell_1}d\xi-f_1\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\xi^2\hat{u}(x,t,\xi)e^{i\xi\ell_2}d\xi+f_2L_1\varphi_1-f_1L_1\varphi_2\right],$$

$$h(x,t)=\frac{1}{H}\left[\varphi_1\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\xi^2\hat{u}(x,t,\xi)e^{i\xi\ell_2}d\xi-\varphi_2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\xi^2\hat{u}(x,t,\xi)e^{i\xi\ell_1}d\xi+\varphi_1L_1\varphi_2-\varphi_2L_1\varphi_1\right].$$

Для доказательства разрешимости задачи (1.1)-(2.5) воспользуемся преобразованием Фурье. А именно, будем искать решение в виде

$$u(x,t,z)=\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\hat{u}(x,t,\lambda)e^{i\lambda z}d\lambda.$$

Для нахождения неизвестной функции $\hat{u}(x,t,\lambda)$ применим преобразование Фурье в задаче (1.1)-(2.5) по переменной z, после чего в области Q получим следующую систему нагруженных нелинейных интегро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}\mathfrak{L}\hat{u}\equiv x\hat{u}_{tt}-b\hat{u}_{xx}+\alpha\hat{u}_t+\lambda^2\hat{u}\\ =\frac{\hat{u}}{H}\left[f_2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\xi^2\hat{u}(x,t,\xi)e^{i\xi\ell_1}d\xi-f_1\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\xi^2\hat{u}(x,t,\xi)e^{i\xi\ell_2}d\xi+f_2L_1\varphi_1-f_1L_1\varphi_2\right]\\ +\frac{\hat{f}}{H}\left[\varphi_1\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\xi^2\hat{u}(x,t,\xi)e^{i\xi\ell_2}d\xi-\varphi_2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\xi^2\hat{u}(x,t,\xi)e^{i\xi\ell_1}d\xi+\varphi_1L_1\varphi_2-\varphi_2L_1\varphi_1\right]\\ +\hat{g}\equiv F(\hat{u})\end{gathered}\tag{2.7}$$

с нелокальными краевыми условиями

$$\gamma D_t^p \hat{u}|_{t=0} = D_t^p \hat{u}|_{t=T}, \tag{2.8}$$

$$\rho\, D_x^p \hat{u}|_{x=-1} = D_x^p \hat{u}|_{x=1}, \quad p = 0, 1, \tag{2.9}$$

где значок «крышка» обозначает преобразование Фурье по переменной z.

3. Основная часть

Введём следующее обозначение

$$q \equiv \gamma_1 + 2\gamma_0\gamma_2 = m_1 \left(\varepsilon_{\varphi,g} + m_3 [g]_{1,3}^2 + (m_2 + \varepsilon_{\varphi,g} m_3) [f]_{2,3}^2 \right).$$

Основным результатом является следующая теорема.

Теорема 3.1. *Пусть для коэффициентов уравнения* (1.1) *выполнены приведённые выше Условия 1 и 2, а также для коэффициентов уравнения и их следов выполнены следующие неравенства:*

$$2q < 1.$$

Тогда существует единственное решение задачи (1.1)–(2.5) *из класса* U.

Замечание 3.1. Условие $2q < 1$ является условием малости данных задачи. Поскольку q явно определено через нормы f, g и производные φ, его справедливость может быть непосредственно проверена для заданных данных. В частности, условие $2q < 1$ выполняется, когда эти величины достаточно малы. Это условие гарантирует ограниченность и сходимость последовательных приближений, используемых в доказательстве.

Доказательство. Покажем, что искомая функция удовлетворяет условиям (2.4), (2.5), т.е.

$$u(x, t, \ell_i) = \varphi_i(x, t), \quad i = 1, 2.$$

Предположим противное. Пусть существует функция $\vartheta_i(x, t)$ такая, что

$$u(x, t, \ell_i) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(x, t, \xi) e^{i\xi\ell_i} d\xi = \vartheta_i(x, t) \neq \varphi_i(x, t).$$

Если мы покажем, что разность $\zeta_i(x, t) = \vartheta_i(x, t) - \varphi_i(x, t)$ тождественно равна нулю, то будет установлено, что $\vartheta_i(x, t) = \varphi_i(x, t)$. Для простоты сначала рассмотрим случай $i = 1$. Применим преобразование Фурье по переменной z к уравнению (1.1) и рассмотрим следы функций при $z = \ell_1$, тогда в области Q получим

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}\vartheta_1 &= x\vartheta_{1\,tt} - b\vartheta_{1\,xx} + \alpha\vartheta_{1\,t} + \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 \hat{u}(x, t, \xi) e^{i\xi\ell_1} d\xi \\ &= \frac{\vartheta_1}{H} \left[f_2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 \hat{u}(x, t, \xi) e^{i\xi\ell_1} d\xi - f_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 \hat{u}(x, t, \xi) e^{i\xi\ell_2} d\xi + f_2 L_1\varphi_1 - f_1 L_1\varphi_2 \right] \\ &+ \frac{f_1}{H} \left[\varphi_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 \hat{u}(x, t, \xi) e^{i\xi\ell_2} d\xi - \varphi_2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 \hat{u}(x, t, \xi) e^{i\xi\ell_1} d\xi + \varphi_1 L_1\varphi_2 - \varphi_2 L_1\varphi_1 \right] + g_1. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Заменим ϑ_1 на $\vartheta_1 = \zeta_1 + \varphi_1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(x,t,\xi)e^{i\xi\ell_1}d\xi$, после чего получим

$$\mathfrak{L}(\zeta_1+\varphi_1) = x(\zeta_1+\varphi_1)_{tt} - b(\zeta_1+\varphi_1)_{xx} + \alpha(\zeta_1+\varphi_1)_t + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi^2\hat{u}(x,t,\xi)e^{i\xi\ell_1}d\xi$$

$$= g_1 + c\zeta_1 + \frac{1}{H}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi^2\hat{u}(x,t,\xi)e^{i\xi\ell_1}d\xi\,[\varphi_1 f_2 - \varphi_2 f_1] + \frac{1}{H}\,[\varphi_1 f_2 - \varphi_2 f_1]\,L_1\varphi_1$$

или

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}\zeta_1 &= x\zeta_{1\,tt} - b\zeta_{1\,xx} + \alpha\zeta_{1\,t} + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi^2\hat{u}(x,t,\xi)e^{i\xi\ell_1}d\xi + x\varphi_{1\,tt} - a\varphi_{1\,xx} + \alpha\varphi_{1\,t}\\ &= g_1 + c\zeta_1 + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi^2\hat{u}(x,t,\xi)e^{i\xi\ell_1}d\xi + x\varphi_{1\,tt} - a\varphi_{1\,xx} + \alpha\varphi_{1\,t} - g_1.\end{aligned} \tag{3.2}$$

После элементарных преобразований в (3.2) для функции $\zeta_1 = \vartheta_1 - \varphi_1$ в области Q получаем следующую задачу

$$L_0\zeta_1 \equiv x\zeta_{1\,tt} - b\zeta_{1\,xx} + \alpha\zeta_{1\,t} = c\zeta_1, \tag{3.3}$$

$$\gamma\, D_t^p\zeta_1|_{t=0} = D_t^p\zeta_1|_{t=T}, \tag{3.4}$$

$$\rho D_x^p\zeta_1|_{x=-1} = D_x^p\zeta_1|_{x=1} \quad p = 0,1. \tag{3.5}$$

Докажем единственность решения задачи (3.3)–(3.5) методом интеграла энергии [21, 22]. Рассмотрим тождество

$$2\Big(L_0\zeta_1, e^{-(\mu t+\beta x)}\zeta_{1\,t}\Big)_0 = 2\Big(c\zeta_1, e^{-(\mu t+\beta x)}\zeta_{1\,t}\Big)_0. \tag{3.6}$$

Интегрируя по частям выражение (3.6) и учитывая условия теоремы 3.1, а также краевые условия (3.4), (3.5) при $|\gamma| > 1, |\rho| \geq 1$, получаем следующее неравенство

$$\delta\,\|\zeta_1\|_1^2 \leq \|c\|_{C(Q)}^2\,\|\zeta_1\|_1^2$$

или

$$\left(\delta - \|c\|_{C(Q)}^2\right)\|\zeta_1\|_1^2 \leq 0.$$

Потребуем выполнения условия $\|c\|_{C(Q)}^2 < r$, где $r = \delta$, $\delta = \frac{1}{c_1}e^{-(\mu T+\beta)}\min\{\delta_1,\delta_2\}$. Тогда получим $\|\zeta_1\|_1^2 \leq 0$, т.е. $\zeta_1 = 0$. Отсюда следует, что $\vartheta_1 = \varphi_1$. Таким образом, при $z = \ell_1$ решение уравнения (1.1) удовлетворяет условию $u(x,t,\ell_1) = \varphi_1(x,t)$. Случай $z = \ell_2$, $u(x,t,\ell_2) = \varphi_2(x,t)$ доказывается аналогично.

Теперь решаем задачу (2.7)–(2.9), методами «ε-регуляризации», априорных оценок и последовательных приближений [21, 23, 24]. Для этого в области Q рассмотрим систему нагруженных нелинейных интегро-дифференциальных уравнений третьего порядка с малым параметром:

$$\begin{aligned}&\mathfrak{L}_\varepsilon\hat{u}_\varepsilon \equiv -\varepsilon\hat{u}_{\varepsilon\,ttt} + x\hat{u}_{\varepsilon\,tt} - b\hat{u}_{\varepsilon\,xx} + \alpha\hat{u}_{\varepsilon\,t} + \lambda^2\hat{u}_\varepsilon\\ &= \frac{\hat{u}_\varepsilon}{H}\left[f_2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\xi^2\hat{u}_\varepsilon(x,t,\xi)e^{i\xi\ell_1}d\xi - f_1\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\xi^2\hat{u}_\varepsilon(x,t,\xi)e^{i\xi\ell_2}d\xi + f_2L_1\varphi_1 - f_1L_1\varphi_2\right]\\ &+\frac{f_1}{H}\left[\varphi_1\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\xi^2\hat{u}_\varepsilon(x,t,\xi)e^{i\xi\ell_2}d\xi - \varphi_2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\xi^2\hat{u}_\varepsilon(x,t,\xi)e^{i\xi\ell_1}d\xi + \varphi_1L_1\varphi_2 - \varphi_2L_1\varphi_1\right]\\ &+\hat{g} \equiv F(\hat{u}_\varepsilon),\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\gamma D_t^p \hat{u}_\varepsilon|_{t=0} = D_t^p \hat{u}_\varepsilon|_{t=T}, \quad p = 0, 1, 2, \tag{3.8}$$

$$\rho D_x^q \hat{u}_{\varepsilon\, x}|_{x=-1} = D_x^q \hat{u}_{\varepsilon\, x}|_{x=1}, \quad q = 0, 1, \tag{3.9}$$

где $\varepsilon > 0$.

Введём следующие функциональные пространства. Через $W_i(Q,R)$, $i = 0, 1, 2$, обозначим пространство функций вида

$$W_i(Q,R) = \left\{ \vartheta \mid (1+\xi^2)^{3/2} \left\| \hat{\vartheta} \right\|_i \in L_2(R) \right\}$$

с нормой

$$\langle \vartheta \rangle_i^2 := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1+\xi^2)^3 \left\| \hat{\vartheta} \right\|_i^2 d\xi. \tag{A}$$

Пространства $W_i(Q,R)$ с указанной нормой являются банаховыми пространствами [17].

Теперь определим следующее пространство функции

$$W(Q,R) = \Big\{ \vartheta | \hat{\vartheta} \in W_2(Q,R),\ \hat{\vartheta}_{ttt} \in W_2(Q,R),$$

$$\gamma D_t^p \hat{\vartheta}|_{t=0} = D_t^p \hat{\vartheta}|_{t=T},\ p = 0, 1, 2,\ \rho D_t^q \hat{\vartheta}|_{x=-1} = D_t^q \hat{\vartheta}|_{x=1},\ q = 0, 1 \Big\}$$

с конечной нормой (A) при $i = 2$.

Определение 3.1. Обобщённым решением задачи (3.7)–(3.9) называется функция из пространства $W(Q,R)$, которая удовлетворяет уравнению (3.7) почти всюду в области Q.

Для доказательства разрешимости регуляризованной задачи (3.7)–(3.9) воспользуемся методом последовательных приближений:

$$\begin{gathered}
\mathfrak{L}_\varepsilon \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)} = -\varepsilon \hat{u}_{\varepsilon\, ttt}^{(\theta)} + x \hat{u}_{\varepsilon\, tt}^{(\theta)} - b \hat{u}_{\varepsilon\, xx}^{(\theta)} + \alpha \hat{u}_{\varepsilon\, t}^{(\theta)} + \lambda^2 \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)} \\
= \frac{\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}}{H} \left[f_2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 \hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}(x,t,\xi) e^{i\xi\ell_1} d\xi - f_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 \hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}(x,t,\xi) e^{i\xi\ell_2} d\xi + f_2 L_1 \varphi_1 - f_1 L_1 \varphi_2 \right] \\
+ \frac{\hat{f}}{H} \left[\varphi_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 \hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}(x,t,\xi) e^{i\xi\ell_2} d\xi - \varphi_2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 \hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}(x,t,\xi) e^{i\xi\ell_1} d\xi + \varphi_1 L_1 \varphi_2 - \varphi_2 L_1 \varphi_1 \right] \\
+ \hat{g} = F(\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}),
\end{gathered} \tag{3.10}$$

$$\gamma D_t^p \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)}\Big|_{t=0} = D_t^p \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)}\Big|_{t=T}, \quad p = 0, 1, 2, \tag{3.11}$$

$$\rho D_x^q \hat{u}_{\varepsilon\, x}^{(\theta)}\Big|_{x=-1} = D_x^q \hat{u}_{\varepsilon\, x}^{(\theta)}\Big|_{x=1}, \quad q = 0, 1, \tag{3.12}$$

где $\theta = 0, 1, 2, \ldots$, $\hat{u}_\varepsilon^{(-1)} \equiv 0$.

Для решения задачи (3.10)–(3.12) справедлива следующая лемма.

Лемма 3.1. *Пусть выполнены все условия теоремы 3.1. Тогда для решения задачи* (3.10)–(3.12) *справедливы следующие оценки:*

I) $\frac{\varepsilon}{\delta} \left\langle u_{\varepsilon\, tt}^{(\theta)} \right\rangle_0^2 + \left\langle u_\varepsilon^{(\theta)} \right\rangle_1^2 < 2\gamma_0,$

II) $\frac{\varepsilon}{\delta} \left\langle u_{\varepsilon\, ttt}^{(\theta)} \right\rangle_0^2 + \left\langle u_\varepsilon^{(\theta)} \right\rangle_2^2 < 2\gamma_0.$

Доказательство. Сначала рассмотрим тождество

$$\left|2\left(\mathfrak{L}_\varepsilon \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)}, e^{-(\mu t+\beta x)}\hat{u}_{\varepsilon t}^{(\theta)}\right)_0\right| = \left|2\left(F_\varepsilon(\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}), e^{-(\mu t+\beta x)}\hat{u}_{\varepsilon t}^{(\theta)}\right)_0\right|. \tag{3.13}$$

Оценим его снизу. Интегрируя по частям, получим:

$$\left|2\left(\mathfrak{L}_\varepsilon \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)}, e^{-(\mu t+\beta x)}\hat{u}_{\varepsilon t}^{(\theta)}\right)_0\right|$$

$$\geq \varepsilon e^{-(\mu T+\beta)}\left\|\hat{u}_{\varepsilon\, tt}^{(\theta)}\right\|_0^2 + \int\limits_Q \left((2\alpha(x,t)+x\mu-b^2\beta^2)\hat{u}_{\varepsilon\, t}^{2(\theta)} + (b\mu-1)\hat{u}_{\varepsilon\, x}^{2(\theta)}\right)e^{-(\mu t+\beta x)}dQ$$

$$+\int\limits_{\partial Q}(-\varepsilon\hat{u}_{\varepsilon\, tt}^{(\theta)}\hat{u}_{\varepsilon\, t}^{(\theta)} + x\hat{u}_{\varepsilon\, t}^{2(\theta)} + \lambda^2\hat{u}_\varepsilon^{2(\theta)} + b\hat{u}_{\varepsilon\, x}^{2(\theta)})e^{-(\mu t+\beta x)}e_t dS + \int\limits_{\partial Q}(-2)b\hat{u}_{\varepsilon\, x}^{(\theta)}\hat{u}_{\varepsilon\, t}^{(\theta)}e^{-(\mu t+\beta x)}e_x dS,$$

где e_x и e_t координаты единичного вектора $\vec{e}=(e_x,e_t)$ внутренней нормали к границе ∂Q. В условии 1 δ_1 можно выбрать так, что бы выполнялось неравенство $\delta_1 - b^2\beta^2 = \delta_1^* > 0$. Учитывая условия теоремы 3.1, краевые условия (3.11), (3.12) и соотношения $\gamma^2 = e^{\mu T}$, $\rho^2 = e^{2\beta}$, получаем, что граничные интегралы равны нулю. Тогда

$$\left|2\left(\mathfrak{L}_\varepsilon \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)}, e^{-(\mu t+\beta x)}\hat{u}_{\varepsilon t}^{(\theta)}\right)_0\right| \geq \varepsilon e^{-(\mu T+\beta)}\left\|\hat{u}_{\varepsilon\, tt}^{(\theta)}\right\|_0^2 + \int\limits_Q \left(\delta_1^*\hat{u}_{\varepsilon\, t}^{2(\theta)} + (b\mu-1)\hat{u}_{\varepsilon\, x}^{2(\theta)}\right)e^{-(\mu t+\beta x)}dQ.$$

Введём обозначение $\delta_{\min}^1 = \frac{1}{c_1}\min\{\delta_1^*, b\mu-1\}$. Тогда получаем оценку снизу

$$\left|2\left(\mathfrak{L}_\varepsilon \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)}, e^{-(\mu t+\beta x)}\hat{u}_{\varepsilon t}^{(\theta)}\right)_0\right| \geq \varepsilon e^{-(\mu T+\beta)}\left\|\hat{u}_{\varepsilon\, tt}^{(\theta)}\right\|_0^2 + \delta_{\min}^1 e^{-(\mu T+\beta)}\left\|\hat{u}_\varepsilon^{(\theta)}\right\|_1^2. \tag{3.14}$$

Теперь, применяя неравенство Коши с параметром σ к тождеству (3.14), получаем оценку сверху

$$\begin{aligned}
\left|2\left(F_\varepsilon(\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}), e^{-(\mu t+\beta x)}\hat{u}_{\varepsilon t}^{(\theta)}\right)_0\right| \leq\ & \sigma_1\frac{3\pi}{4}c_2^2\left(\|f_0\|_C^2 + \|f_1\|_C^2\right)\left\|\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}\right\|_1^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty}(1+\xi^2)^3\left\|\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}\right\|_1^2 d\xi \\
&+\sigma_1\frac{3\pi}{4}c_2^2\left(\|\varphi_0\|_C^2 + \|\varphi_1\|_C^2\right)\left\|\hat{f}\right\|_1^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty}(1+\xi^2)^3\left\|\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}\right\|_1^2 d\xi \\
&+4\sigma_1\mathfrak{F}\left(\|\varphi_{1tt}\|_C^2 + \|\varphi_{2tt}\|_C^2 + b\left(\|\varphi_{1xx}\|_C^2 + \|\varphi_{2xx}\|_C^2\right)\right. \\
&\left.+\|\alpha\|_C^2\left(\|\varphi_{1t}\|_C^2 + \|\varphi_{2t}\|_C^2\right) + \|g_1\|_C^2 + \|g_2\|_C^2\right)\left\|\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}\right\|_1^2 \\
&+4\mathfrak{F}\sigma_1\left(\|\varphi_{1tt}\|_C^2 + \|\varphi_{2tt}\|_C^2 + b\left(\|\varphi_{1xx}\|_C^2 + \|\varphi_{2xx}\|_C^2\right)\right. \\
&\left.+\|\alpha\|_C^2\left(\|\varphi_{1t}\|_C^2 + \|\varphi_{2t}\|_C^2\right) + \|g_1\|_C^2 + \|g_2\|_C^2\right)\left\|\hat{f}\right\|_1^2 \\
&+2\sigma_1\|\hat{g}\|_0^2 + 7\sigma_1^{-1}\int\limits_Q \hat{u}_{\varepsilon t}^{2(\theta)}e^{-\mu t}dQ + 7\sigma_1^{-1}\int\limits_Q \hat{u}_\varepsilon^{2(\theta)}e^{-\mu t}dQ.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

где c_2 — константа вложения $\|u\|^2_{L_4(Q)} \le c_2 \|u\|^2_{W_2^1(Q)}$ [18, 19]. Здесь мы использовали равенство $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda^4}{(1+\lambda^2)^3} d\lambda = \frac{3\pi}{8}$. Тогда имеем

$$\begin{aligned}
&\left|2\left(F_\varepsilon(\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}), e^{-(\mu t+\beta x)}\hat{u}_{\varepsilon t}^{(\theta)}\right)_0\right| \\
&\le 2\sigma_1\mathfrak{F}\left(\left(1+b+\|\alpha\|_C^2\right)\sum_{i=1,2}\sum_{|\alpha|=1}^{3}\|D^\alpha\varphi_i\|_C^2+\sum_{i=1,2}\|g_i\|_{C^1}^2\right)\left\|\hat{f}\right\|_1^2 \\
&+2\sigma_1\|\hat{g}\|_0^2+\sigma_1\frac{3\pi}{4}c_2^2\left(\|\varphi_0\|_C^2+\|\varphi_1\|_C^2\right)\left\|\hat{f}\right\|_1^2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(1+\xi^2)^3\left\|\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}\right\|_1^2 d\xi \\
&+4\sigma_1\left(\left(1+b+\|\alpha\|_C^2\right)\sum_{i=1,2}\sum_{|\alpha|=1}^{3}\|D^\alpha\varphi_i\|_C^2+\sum_{i=1,2}\|g_i\|_{C^1}^2\right)\mathfrak{F}\left\|\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}\right\|_1^2 \\
&+\sigma_1\frac{3\pi}{4}c_2^2\left(\|f_0\|_C^2+\|f_1\|_C^2\right)\left\|\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}\right\|_1^2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(1+\xi^2)^3\left\|\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}\right\|_1^2 d\xi+7\sigma_1^{-1}\left\|\hat{u}_\varepsilon^{(\theta)}\right\|_1^2,
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Объединяя неравенства (3.14) и (3.16), получаем

$$\begin{aligned}
&\varepsilon e^{-(\mu T+\beta)}\left\|\hat{u}_{\varepsilon tt}^{(\theta)}\right\|_0^2+\left(\delta_{\min}^1 e^{-(\mu T+\beta)}-7\sigma_1^{-1}\right)\left\|\hat{u}_\varepsilon^{(\theta)}\right\|_1^2 \\
&\le 2\sigma_1\|\hat{g}\|_0^2+4\sigma_1\mathfrak{F}\left(\left(1+b+\|\alpha\|_C^2\right)\sum_{i=1,2}\sum_{|\alpha|=1}^{3}\|D^\alpha\varphi_i\|_C^2+\sum_{i=1,2}\|g_i\|_{C^1}^2\right)\left\|\hat{f}\right\|_1^2 \\
&+4\sigma_1\mathfrak{F}\left(\left(1+b+\|\alpha\|_C^2\right)\sum_{i=1,2}\sum_{|\alpha|=1}^{3}\|D^\alpha\varphi_i\|_C^2+\sum_{i=1,2}\|g_i\|_{C^1}^2\right)\left\|\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}\right\|_1^2 \\
&+\sigma_1\frac{3\pi}{4}c_2^2\left(\|\varphi_0\|_C^2+\|\varphi_1\|_C^2\right)\left\|\hat{f}\right\|_1^2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(1+\xi^2)^3\left\|\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}\right\|_1^2 d\xi \\
&+\sigma_1\frac{3\pi}{4}c_2^2\left(\|f_0\|_C^2+\|f_1\|_C^2\right)\left\|\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}\right\|_1^2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(1+\xi^2)^3\left\|\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}\right\|_1^2 d\xi.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Выбираем σ_1, $\sigma_1 = \frac{14}{\delta_{\min}^1}e^{\mu T+\beta}$, откуда следует $\delta_{\min}^1 - 7e^{\mu T+\beta}\sigma_1^{-1} = \frac{\delta_{\min}^1}{2}$. Умножая (3.17) на $\frac{2}{\delta_{\min}^1}e^{\mu T+\beta}(1+\lambda^2)^3$ и интегрируя по λ от $-\infty$ до $+\infty$, получаем первую рекуррентную формулу

$$\frac{\varepsilon}{\delta_{\min}^1}\left\langle u_{\varepsilon tt}^{(\theta)}\right\rangle_0^2+\left\langle u_\varepsilon^{(\theta)}\right\rangle_1^2<\gamma_{00}+\gamma_{11}\left\langle u_\varepsilon^{(\theta-1)}\right\rangle_1^2+\gamma_{22}\left\langle u_\varepsilon^{(\theta-1)}\right\rangle_1^4, \tag{3.18}$$

где $\gamma_{00} = \frac{28}{\delta_{\min}^1}e^{\mu T+\beta}\left[g\right]_{0.3}^2 + 2\frac{28}{\delta_{\min}^1}e^{\mu T+\beta}\varepsilon_{\varphi,g}\mathfrak{F}\left[f\right]_{1,3}^2$, $\gamma_{11} = 2\frac{28}{\delta_{\min}^1}e^{\mu T+\beta}\varepsilon_{\varphi,g}\mathfrak{F} + \frac{28}{\delta_{\min}^1}\frac{3\pi}{4}e^{\mu T+\beta}c_2^2\mathfrak{F}\left[f\right]_{1,3}^2$, $\gamma_{22} = \frac{28}{\delta_{\min}^1}\frac{3\pi}{4}e^{\mu T+\beta}c_2^2\mathfrak{F}$. Для удобства в (3.18) вводятся следующие обозначения $J_1^{(\theta)} = \left\langle u_\varepsilon^{(\theta)}\right\rangle_1^2$ и $I_2^{(\theta)} = \left\langle u_{\varepsilon\ tt}^{(\theta)}\right\rangle_0^2$. Поскольку $\gamma_{00}<\gamma_0$, $\gamma_{11}<\gamma_1$, $\gamma_{22}<\gamma_2$, то из (3.18) получаем следующую рекуррентную формулу

$$\frac{\varepsilon}{\delta}I_2^{(\theta)}+J_1^{(\theta)}\le\gamma_0+\gamma_1 J_1^{(\theta-1)}+\gamma_2 J_1^{2(\theta-1)}. \tag{3.19}$$

Замечание 3.2. Отметим, что для линейных обратных задач коэффициент γ_2 в рекуррентной формуле (3.19) всегда равен нулю. Однако для нелинейных обратных задач γ_2 уже не равен нулю. Это усложняет доказательство ограниченности итерационного процесса.

Теперь докажем ограниченность итерационного процесса (3.19). В качестве начального приближения возьмём $\hat{u}_\varepsilon^{(-1)} = 0$. Тогда из задачи (3.10)–(3.12) для нулевого приближения имеем

$$\frac{\varepsilon}{\delta} I_2^{(0)} + J_1^{(0)} \le \gamma_0 < 2\gamma_0.$$

Следовательно, для первого приближения из рекуррентной формулы (3.19), с учётом условий теоремы 3.1, получаем следующую оценку:

$$\frac{\varepsilon}{\delta} I_2^{(1)} + J_1^{(1)} < \gamma_0 + 2\gamma_0\gamma_1 + 4\gamma_0^2\gamma_2 < 2\gamma_0. \tag{3.20}$$

Продолжая этот процесс с учётом неравенства $q = \gamma_1 + 2\gamma_0\gamma_2 < \frac{1}{2}$, по индукции из (3.19) получаем первую априорную оценку для $\forall\, \theta$, $\theta = 2, 3, ...$,

$$\frac{\varepsilon}{\delta} I_2^{(\theta)} + J_1^{(\theta)} < \gamma_0 + \gamma_1 J_1^{(\theta-1)} + \gamma_2 J_1^{2(\theta-1)} < \gamma_0 + 2\gamma_0\gamma_1 + 4\gamma_0^2\gamma_2 < 2\gamma_0.$$

Таким образом, первая априорная оценка Леммы 3.1 доказана. Теперь докажем вторую априорную оценку. Для этого рассмотрим тождества

$$\left| -2\left(\mathfrak{L}_\varepsilon \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)}, P\hat{u}_\varepsilon^{(\theta)} e^{-(\mu t+\beta x)} \right)_0 \right| = \left| -2\left(F(\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}), P\hat{u}_\varepsilon^{(\theta)} e^{-(\mu t+\beta x)} \right)_0 \right|, \tag{3.21}$$

где $P\hat{u}_\varepsilon^{(\theta)} = \hat{u}_{\varepsilon ttt}^{(\theta)} - \mu\hat{u}_{\varepsilon tt}^{(\theta)} + \hat{u}_{\varepsilon xx}^{(\theta)} - \hat{u}_{\varepsilon t}^{(\theta)}$. Будем оценивать его снизу и сверху аналогично первой априорной оценке. Интегрируя по частям, оценим тождество (3.21) снизу следующим образом:

$$\varepsilon e^{-(\mu T+\beta)} \left\| \hat{u}_{\varepsilon\, ttt}^{(\theta)} \right\|_0^2 + \int\limits_Q \left[\delta_1^* \hat{u}_{\varepsilon\, tt}^{2(\theta)} + (b\mu + 2x)\hat{u}_{\varepsilon\, xt}^{2(\theta)} + (2b-2)\hat{u}_{\varepsilon\, xx}^{2(\theta)} + \delta_2\mu\hat{u}_{\varepsilon\, t}^{2(\theta)} + \delta_2\hat{u}_{\varepsilon\, x}^{2(\theta)} \right] e^{-(\mu t+\beta x)} dQ$$

$$+ \int\limits_{\partial Q} \left(-x\hat{u}_{tt}^{2(\theta)} + 2b\hat{u}_{xx}^{(\theta)}\hat{u}_{tt}^{(\theta)} + \hat{u}_{xt}^{2(\theta)} - 2\alpha(x,t)\hat{u}_t^{(\theta)}\hat{u}_{tt}^{(\theta)} + \alpha(x,t)\mu\hat{u}_t^{2(\theta)} + x\hat{u}_t^{2(\theta)} \right) e_t e^{-(\mu t+\beta x)} dS$$

$$+ \int\limits_{\partial Q} \left(-2b\hat{u}_{xt}^{(\theta)}\hat{u}_{tt}^{(\theta)} - 2\alpha(x,t)\hat{u}_t^{(\theta)}\hat{u}_x^{(\theta)} \right) e_x e^{-(\mu t+\beta x)} dS$$

$$-2\left\|\alpha\right\|_{C^1}^2 \int\limits_Q \hat{u}_{\varepsilon\, t}^{2(\theta)} e^{-(\mu t+\beta x)} dQ \le \left| -2\left(\mathfrak{L}_\varepsilon \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)}, P\hat{u}_\varepsilon^{(\theta)} e^{-(\mu t+\beta x)} \right)_0 \right|.$$

Учитывая условия теоремы 3.1, краевые условия (3.11), (3.12) и соотношения $\gamma^2 = e^{\mu T}$, $\rho^2 = e^{2\beta}$, получаем, что граничные интегралы равны нулю. Введём обозначение $\delta_{\min}^2 = \min\{\delta_1^*, b\mu - 2, b-1, \delta_2\mu, \delta_2\}$. Тогда имеем

$$\varepsilon e^{-(\mu T+\beta)} \left\| \hat{u}_{\varepsilon ttt}^{(\theta)} \right\|_0^2 + \delta_{\min}^2 e^{-(\mu T+\beta)} \left\| \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)} \right\|_2^2 - \left\|\alpha\right\|_{C^1}^2 \int\limits_Q \hat{u}_{\varepsilon t}^{2(\theta)} e^{-(\mu t+\beta)} dQ \le \left| -2\left(L_\varepsilon \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)}, P\hat{u}_\varepsilon^{(\theta)} e^{-(\mu t+\beta)} \right)_0 \right|. \tag{3.22}$$

Теперь оценим тождество (3.21) сверху, используя неравенство Коши с параметром σ

$$\begin{aligned}
&\left|-2\left(F(\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}), P\hat{u}_\varepsilon^{(\theta)}e^{-(\mu t+\beta x)}\right)_0\right| \le 8\sigma_2(1+\mu^2)\left\|\hat{g}\right\|_1^2 \\
&+2\sigma_2\left(\left(1+b+\|\alpha\|_C^2\right)\sum_{i=1,2}\sum_{|\alpha|=1}^{3}\|D^\alpha\varphi_i\|_C^2+\sum_{i=1,2}\|g_i\|_{C^1}^2\right)\left(3+\mu^2\right)\left\|\hat{f}\right\|_1^2 \\
&+2\sigma_2\left(\left(1+b+\|\alpha\|_C^2\right)\sum_{i=1,2}\sum_{|\alpha|=1}^{3}\|D^\alpha\varphi_i\|_C^2+\sum_{i=1,2}\|g_i\|_{C^1}^2\right)\left(3+\mu^2\right)\left\|\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}\right\|_2^2 \\
&+3\pi\sigma_2c_2^2\mathfrak{F}\left(3+\mu^2\right)\left\|\hat{f}\right\|_2^2\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1+\xi^2\right)^3\left\|\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}\right\|_2^2d\xi \\
&+3\pi\sigma_2c_2^2\mathfrak{F}\left(3+\mu^2\right)\left\|\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}\right\|_2^2\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1+\xi^2\right)^3\left\|\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}\right\|_2^2d\xi+32\sigma_2^{-1}\left\|\hat{u}_\varepsilon^{(\theta)}\right\|_2^2.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Из (3.22) и (3.23) получаем

$$\begin{aligned}
&\varepsilon e^{-(\mu T+\beta)}\left\|\hat{u}_{\varepsilon ttt}^{(\theta)}\right\|_0^2+\left(\delta_{\min}^2e^{-(\mu T+\beta)}-32\sigma_2^{-1}\right)\left\|\hat{u}_\varepsilon^{(\theta)}\right\|_2^2 \le \|\alpha\|_{C^1}^2\left\|\hat{u}_{\varepsilon t}^{(\theta)}\right\|_0^2+8\sigma_2(1+\mu^2)\left\|\hat{g}\right\|_1^2 \\
&+2\sigma_2\left(\left(1+b+\|\alpha\|_C^2\right)\sum_{i=1,2}\sum_{|\alpha|=1}^{3}\|D^\alpha\varphi_i\|_C^2+\sum_{i=1,2}\|g_i\|_{C^1}^2\right)\left(3+\mu^2\right)\left\|\hat{f}\right\|_1^2 \\
&+2\sigma_2\left(\left(1+b+\|\alpha\|_C^2\right)\sum_{i=1,2}\sum_{|\alpha|=1}^{3}\|D^\alpha\varphi_i\|_C^2+\sum_{i=1,2}\|g_i\|_{C^1}^2\right)\left(3+\mu^2\right)\left\|\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}\right\|_2^2 \\
&+3\pi\sigma_2c_2^2\mathfrak{F}\left(3+\mu^2\right)\left\|\hat{f}\right\|_2^2\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1+\xi^2\right)^3\left\|\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}\right\|_2^2d\xi \\
&+3\pi\sigma_2c_2^2\mathfrak{F}\left(3+\mu^2\right)\left\|\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}\right\|_2^2\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1+\xi^2\right)^3\left\|\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}\right\|_2^2d\xi.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Из леммы 3.1 мы имеем $\left\|\hat{u}_{\varepsilon t}^{(\theta)}\right\|_0^2 \le 2\gamma_{00}$. Выбирая σ_2 равным $\sigma_2=\frac{64}{\delta_{\min}^2}e^{\mu T+\beta}$, получаем $\delta_{\min}^2-32e^{\mu T+\beta}\sigma^{-1}=\frac{\delta_{\min}^2}{2}$. Теперь, умножая (3.24) на $\frac{2}{\delta_{\min}^2}e^{\mu T+\beta}(1+\lambda^2)^3$ и интегрируя по λ от $-\infty$ до $+\infty$, получаем вторую рекуррентную формулу

$$\frac{\varepsilon}{\delta_{\min}^2}\left\langle u_{\varepsilon ttt}^{(\theta)}\right\rangle_0^2+\left\langle u_\varepsilon^{(\theta)}\right\rangle_2^2<\gamma_0+\gamma_1\left\langle u_\varepsilon^{(\theta-1)}\right\rangle_2^2+\gamma_2\left\langle u_\varepsilon^{(\theta-1)}\right\rangle_2^4, \tag{3.25}$$

где $\gamma_0=\delta_{\min}^{-2}m_1m_3\left([g]_{1,3}^2+\varepsilon_{\varphi,g}\left[f\right]_{2,3}^2\right)$, $\gamma_1=\delta_{\min}^{-2}m_1\left(\varepsilon_{\varphi,g}+m_2\left[f\right]_{2,3}^2\right)$, $\gamma_2=\delta_{\min}^{-2}m_1m_2$. Для удобства в (3.25) введём следующие обозначения: $J_2^{(\theta)}=\left\langle u_\varepsilon^{(\theta)}\right\rangle_2^2$ и $I_3^{(\theta)}=\left\langle u_{\varepsilon ttt}^{(\theta)}\right\rangle_0^2$. Тогда из (3.25) получаем следующую вторую рекуррентную формулу:

$$\frac{\varepsilon}{\delta}I_3^{(\theta)}+J_2^{(\theta)}\le\gamma_0+\gamma_1J_2^{(\theta-1)}+\gamma_2J_2^{2(\theta-1)}. \tag{3.26}$$

В качестве начального приближения возьмём $\hat{u}_\varepsilon^{(-1)}=0$. Тогда из задачи (3.10)–(3.12) для нулевого приближения имеем

$$\frac{\varepsilon}{\delta}I_3^{(0)}+J_2^{(0)}\le\gamma_0<2\gamma_0.$$

Следовательно, из рекуррентной формулы (3.26), с учётом условий теоремы 3.1, получаем следующую оценку:

$$\frac{\varepsilon}{\delta}I_3^{(1)} + J_2^{(1)} < \gamma_0 + 2\gamma_0\gamma_1 + 4\gamma_0^2\gamma_2 < 2\gamma_0.$$

Продолжая этот процесс, с учётом условия теоремы 3.1, по индукции из (3.26) получаем вторую априорную оценку для $\forall\,\theta$, $\theta = 2, 3, ...,$

$$\frac{\varepsilon}{\delta}I_2^{(\theta)} + J_1^{(\theta)} < \gamma_0 + \gamma_1 J_1^{(\theta-1)} + \gamma_2 J_1^{2(\theta-1)} < \gamma_0 + 2\gamma_1\gamma_0 + 4\gamma_2\gamma_0^2 < 2\gamma_0.$$

Таким образом, вторая априорная оценка леммы 3.1 доказана. Лемма 3.1 доказана. □

Теперь введём новую функцию по формуле $\hat{\vartheta}_\varepsilon^{(\theta)} = \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)} - \hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}$, $\theta = 0, 1, ...$ Тогда для неё справедлива следующая лемма.

Лемма 3.2. *Пусть выполнены условия теоремы 3.1. Тогда для функций* $\left\{\hat{\vartheta}^{(\theta)}\right\} \in W(Q,R)$ *справедливы следующие оценки:*
III) $\frac{\varepsilon}{\delta}\left\langle \vartheta_{\varepsilon\,tt}^{(\theta)}\right\rangle_0^2 + \left\langle \vartheta_\varepsilon^{(\theta)}\right\rangle_1^2 < 2\gamma_0 q^\theta,$
IV) $\frac{\varepsilon}{\delta}\left\langle \vartheta_{\varepsilon\,ttt}^{(\theta)}\right\rangle_0^2 + \left\langle \vartheta_\varepsilon^{(\theta)}\right\rangle_2^2 < 2\gamma_0 q^\theta,$
где согласно условиям теоремы 3.1 выполнено неравенство $2q < 1$.

Доказательство. Сначала докажем третью априорную оценку (III). Из (3.10)–(3.12) для функций $\left\{\vartheta_\varepsilon^{(\theta)}\right\} \in W(Q,R)$ получаем следующую задачу:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{L}_\varepsilon\hat{\vartheta}_\varepsilon^{(\theta)} = -\varepsilon\hat{\vartheta}_{\varepsilon ttt}^{(\theta)} + L_0\hat{\vartheta}_\varepsilon^{(\theta)} + \lambda^2\hat{\vartheta}_\varepsilon^{(\theta)} \\
&= \frac{1}{H}\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)} f_2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 \hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)} e^{i\xi\ell_1} d\xi - \frac{1}{H}\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)} f_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 \hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)} e^{i\xi\ell_2} d\xi \\
&-\frac{1}{H}\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-2)} f_2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 \hat{u}_\varepsilon^{(\theta-2)} e^{i\xi\ell_1} d\xi + \frac{1}{H}\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-2)} f_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 \hat{u}_\varepsilon^{(\theta-2)} e^{i\xi\ell_2} d\xi \\
&+\frac{1}{H}\hat{\vartheta}_\varepsilon^{(\theta-1)}\left[f_2 L_1\varphi_1 - f_1 L_1\varphi_2\right] + \frac{1}{H}\hat{f}\left[\varphi_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 \hat{\vartheta}_\varepsilon^{(\theta-1)} e^{i\xi\ell_2} d\xi - \varphi_2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 \hat{\vartheta}_\varepsilon^{(\theta-1)} e^{i\xi\ell_1} d\xi\right]
\end{aligned} \tag{3.27}$$

с нелокальными граничными условиями

$$\gamma\, D_t^p \hat{\vartheta}_\varepsilon^{(\theta)}\Big|_{t=0} = D_t^p \hat{\vartheta}_\varepsilon^{(\theta)}\Big|_{t=T}, \quad p = 0, 1, 2, \tag{3.28}$$

$$\rho D_t^q\, \hat{\vartheta}_{\varepsilon x}^{(\theta)}\Big|_{x=-1} = D_t^q\, \hat{\vartheta}_{\varepsilon x}^{(\theta)}\Big|_{x=1}, \quad q = 0, 1, \tag{3.29}$$

где $\theta = 0, 1, \ldots$. В правой части уравнении (3.27) мы складываем и вычитаем слагаемые $\frac{1}{H}\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-2)} f_2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 \hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)} e^{i\xi\ell_1} d\xi$ и $\frac{1}{H}\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-2)} f_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 \hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)} e^{i\xi\ell_1} d\xi$ следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{L}_\varepsilon \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)} - \mathfrak{L}_\varepsilon \hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)} = \mathfrak{L}_\varepsilon \hat{\vartheta}_\varepsilon^{(\theta)} = F_\varepsilon\left(\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}\right) - F_\varepsilon\left(\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-2)}\right) \\
&= \frac{1}{H}\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)} f_2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 \hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)} e^{i\xi\ell_1} d\xi - \frac{1}{H}\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-2)} f_2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 \hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)} e^{i\xi\ell_1} d\xi \\
&- \frac{1}{H}\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)} f_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 \hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)} e^{i\xi\ell_2} d\xi + \frac{1}{H}\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-2)} f_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 \hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)} e^{i\xi\ell_2} d\xi \\
&- \frac{1}{H}\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-2)} f_2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 \hat{u}_\varepsilon^{(\theta-2)} e^{i\xi\ell_1} d\xi + \frac{1}{H}\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-2)} f_2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 \hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)} e^{i\xi\ell_1} d\xi \\
&+ \frac{1}{H}\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-2)} f_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 \hat{u}_\varepsilon^{(\theta-2)} e^{i\xi\ell_2} d\xi - \frac{1}{H}\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-2)} f_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 \hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)} e^{i\xi\ell_2} d\xi \\
&+ \frac{1}{H}\hat{\vartheta}_\varepsilon^{(\theta-1)} \left[f_2 L_1\varphi_1 - f_1 L_1\varphi_2\right] + \frac{1}{H}\hat{f}\left[\varphi_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 \hat{\vartheta}_\varepsilon^{(\theta-1)} e^{i\xi\ell_2} d\xi - \varphi_2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 \hat{\vartheta}_\varepsilon^{(\theta-1)} e^{i\xi\ell_1} d\xi\right].
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

Рассмотрим тождество

$$
\left|-2\left(\mathfrak{L}_\varepsilon \hat{\vartheta}^{(\theta)}, e^{-(\mu t+\beta x)}\hat{\vartheta}_{\varepsilon,t}^{(\theta)}\right)_0\right| = \left|-2\left(F(\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}) - F(\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-2)}), e^{-(\mu t+\beta x)}\hat{\vartheta}_{\varepsilon,t}^{(\theta)}\right)_0\right|. \tag{3.31}
$$

Покажем, что выражение (3.31) ограничено снизу. Интегрируя по частям, используя неравенство Коши и учитывая условия теоремы 3.1, получаем:

$$
\left|2\left(\mathfrak{L}_\varepsilon \hat{\vartheta}_\varepsilon^{(\theta)}, e^{-(\mu t+\beta x)}\hat{\vartheta}_{\varepsilon t}^{(\theta)}\right)_0\right| \geq \varepsilon e^{-(\mu T+\beta)} \left\|\hat{\vartheta}_{\varepsilon tt}^{(\theta)}\right\|_0^2 + \int\limits_Q \left(\delta_1^* \hat{\vartheta}_{\varepsilon t}^{2(\theta)} + (b\mu - 1)\hat{\vartheta}_{\varepsilon x}^{2(\theta)}\right) e^{-(\mu t+\beta x)} dQ.
$$

или

$$
\left|2\left(\mathfrak{L}_\varepsilon \hat{\vartheta}_\varepsilon^{(\theta)}, e^{-(\mu t+\beta x)}\hat{\vartheta}_{\varepsilon t}^{(\theta)}\right)_0\right| \geq \varepsilon e^{-(\mu T+\beta)} \left\|\hat{\vartheta}_{\varepsilon tt}^{(\theta)}\right\|_0^2 + \delta_{\min}^1 e^{-(\mu T+\beta)} \left\|\hat{\vartheta}_\varepsilon^{(\theta)}\right\|_1^2, \tag{3.32}
$$

как в лемме 3.1. Покажем, что тождество (3.31) ограничено сверху. Напишем правую часть в развернутом виде:

$$
\begin{aligned}
&\left|-2\left(F(\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}) - F(\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-2)}), e^{-(\mu t+\beta x)}\hat{\vartheta}_{\varepsilon,t}^{(\theta)}\right)_0\right| \\
&= \left|-2\int\limits_Q \left(\frac{1}{H}\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)} f_2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 \hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)} e^{i\xi\ell_1} d\xi - \frac{1}{H}\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)} f_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 \hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)} e^{i\xi\ell_2} d\xi\right.\right. \\
&- \frac{1}{H}\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-2)} f_2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 \hat{u}_\varepsilon^{(\theta-2)} e^{i\xi\ell_1} d\xi + \frac{1}{H}\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-2)} f_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 \hat{u}_\varepsilon^{(\theta-2)} e^{i\xi\ell_2} d\xi \\
&+ \frac{1}{H}\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-2)} f_2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 \hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)} e^{i\xi\ell_1} d\xi - \frac{1}{H}\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-2)} f_2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 \hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)} e^{i\xi\ell_1} d\xi \\
&\left.\left. + \frac{1}{H}\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-2)} f_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 \hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)} e^{i\xi\ell_2} d\xi - \frac{1}{H}\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-2)} f_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 \hat{u}_\varepsilon^{(\theta-2)} e^{i\xi\ell_2} d\xi\right)\right|
\end{aligned}
\tag{3.33}
$$

$$+\frac{1}{H}\hat{\vartheta}_{\varepsilon}^{(\theta-1)}\left[f_2L_1\varphi_1-f_1L_1\varphi_2\right]$$
$$+\frac{1}{H}\hat{f}\left[\varphi_1\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\xi^2\hat{\vartheta}_{\varepsilon}^{(\theta-1)}e^{i\xi\ell_2}d\xi-\varphi_2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\xi^2\hat{\vartheta}_{\varepsilon}^{(\theta-1)}e^{i\xi\ell_1}d\xi\right]\Bigg)e^{-(\mu t+\beta x)}\hat{\vartheta}_{\varepsilon,t}^{(\theta)}dQ\Bigg|.$$

Применяя к (3.33) неравенство Коши с параметром σ и используя результаты леммы 3.1, получаем

$$\begin{aligned}
&\left|-2\left(F(\hat{u}_{\varepsilon}^{(\theta-1)})-F(\hat{u}_{\varepsilon}^{(\theta-2)}),e^{-(\mu t+\beta x)}\hat{\vartheta}_{\varepsilon,t}^{(\theta)}\right)_0\right|\\
&\le\sigma_3\frac{3\pi}{4}c_2^2\mathfrak{F}\left\|\hat{\vartheta}_{\varepsilon}^{(\theta-1)}\right\|_1^2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(1+\xi^2\right)^3\left\|\hat{u}_{\varepsilon}^{(\theta-1)}\right\|_1^2d\xi\\
&+3\pi\sigma_3c_2^2\mathfrak{F}\left\|\hat{u}_{\varepsilon}^{(\theta-1)}\right\|_1^2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(1+\xi^2\right)^3\left\|\hat{\vartheta}_{\varepsilon}^{(\theta-1)}\right\|_1^2d\xi\\
&+3\pi\sigma_3c_2^2\mathfrak{F}\left(\left(1+a+\|\alpha\|_C^2\right)\sum_{i=1,2}\sum_{|\alpha|=1}^{3}\|D^{\alpha}\varphi_i\|_C^2+\sum_{i=1,2}\|g_i\|_{C^1}^2\right)\left\|\hat{\vartheta}_{\varepsilon}^{(\theta-1)}\right\|_1^2\\
&+3\pi\sigma_3c_2^2\mathfrak{F}\left\|\hat{f}\right\|_2^2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(1+\xi^2\right)^3\left\|\hat{\vartheta}_{\varepsilon}^{(\theta-1)}\right\|_1^2d\xi+6\sigma_3^{-1}\left\|\hat{\vartheta}_{\varepsilon}^{(\theta)}\right\|_1^2.
\end{aligned}\tag{3.34}$$

Теперь, объединяя оценки (3.32) и (3.34), получаем

$$\begin{aligned}
&\varepsilon e^{-(\mu T+\beta)}\left\|\hat{\vartheta}_{\varepsilon tt}^{(\theta)}\right\|_0^2+\left(\delta_{\min}^1e^{-(\mu T+\beta)}-6\sigma_3^{-1}\right)\left\|\hat{\vartheta}_{\varepsilon}^{(\theta)}\right\|_1^2\\
&\le\sigma_3\frac{3\pi}{4}c_2^2\mathfrak{F}\left\|\hat{\vartheta}_{\varepsilon}^{(\theta-1)}\right\|_1^2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(1+\xi^2\right)^3\left\|\hat{u}_{\varepsilon}^{(\theta-1)}\right\|_1^2d\xi\\
&+3\pi\sigma_3c_2^2\mathfrak{F}\left\|\hat{u}_{\varepsilon}^{(\theta-1)}\right\|_1^2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(1+\xi^2\right)^3\left\|\hat{\vartheta}_{\varepsilon}^{(\theta-1)}\right\|_1^2d\xi\\
&+3\pi\sigma_3c_2^2\mathfrak{F}\left(\left(1+a+\|\alpha\|_C^2\right)\sum_{i=1,2}\sum_{|\alpha|=1}^{3}\|D^{\alpha}\varphi_i\|_C^2+\sum_{i=1,2}\|g_i\|_{C^1}^2\right)\left\|\hat{\vartheta}_{\varepsilon}^{(\theta-1)}\right\|_1^2\\
&+3\pi\sigma_3c_2^2\mathfrak{F}\left\|\hat{f}\right\|_2^2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(1+\xi^2\right)^3\left\|\hat{\vartheta}_{\varepsilon}^{(\theta-1)}\right\|_1^2d\xi.
\end{aligned}\tag{3.35}$$

Выбираем σ_3, $\sigma_3=e^{\mu T+\beta}\frac{12}{\delta_{\min}^1}$, откуда следует $\delta_{\min}^1-6e^{\mu T+\beta}\sigma^{-1}=\frac{\delta_{\min}^1}{2}$. Умножая неравенство (3.35) на $\frac{2}{\delta_{\min}^1}e^{\mu T+\beta}(1+\lambda^2)^3$ и интегрируя по λ от $-\infty$ до $+\infty$, получаем первое рекуррентное соотношение

$$\frac{\varepsilon}{\delta_{\min}^1}\left\langle\vartheta_{\varepsilon tt}^{(\theta)}\right\rangle_0^2+\left\langle\vartheta_{\varepsilon}^{(\theta)}\right\rangle_1^2<q_1\left\langle\vartheta_{\varepsilon}^{(\theta-1)}\right\rangle_1^2.\tag{3.36}$$

где $q_1=\frac{36}{(\delta_{\min}^1)^2}\pi e^{2(\mu T+\beta)}c_2^2\mathfrak{F}\left(2\left[g\right]_{1,3}^2+\varepsilon_{\varphi,g}\left(2m_1+\left[f\right]_{2,3}^2\right)\right)$. Так как коэффициент q_1 меньше, чем q, из (3.36) имеем

$$\frac{\varepsilon}{\delta}\left\langle\vartheta_{\varepsilon\,tt}^{(\theta)}\right\rangle_0^2+\left\langle\vartheta_{\varepsilon}^{(\theta)}\right\rangle_1^2<q\left\langle\vartheta_{\varepsilon}^{(\theta-1)}\right\rangle_1^2.\tag{3.37}$$

Теперь, рассуждая как в лемме 3.1, из (3.37) получаем

$$\frac{\varepsilon}{\delta}\left\langle\vartheta_{\varepsilon\,tt}^{(\theta)}\right\rangle_0^2+\left\langle\vartheta_{\varepsilon}^{(\theta)}\right\rangle_1^2<2\gamma_0q^{\theta}.$$

Таким образом, третья оценка (III) доказана.

Теперь докажем четвертую оценку (IV). Рассмотрим тождество

$$\left|-2\left(\mathfrak{L}_\varepsilon\hat{\vartheta}_\varepsilon^{(\theta)}, e^{-(\mu t+\beta x)}P\hat{\vartheta}_\varepsilon^{(\theta)}\right)_0\right| = \left|-2\left(F(\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}) - F(\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-2)}), e^{-(\mu t+\beta x)}P\hat{\vartheta}_\varepsilon^{(\theta)}\right)_0\right|, \tag{3.38}$$

где $P\hat{\vartheta}_\varepsilon^{(\theta)} = \hat{\vartheta}_{\varepsilon ttt}^{(\theta)} - \mu\hat{\vartheta}_{\varepsilon tt}^{(\theta)} + \hat{\vartheta}_{\varepsilon xx}^{(\theta)} - \hat{\vartheta}_{\varepsilon t}^{(\theta)}$. Сначала докажем нижнюю оценку из (3.38). Будем оценивать её аналогично третьей оценке снизу. Тогда имеем

$$\varepsilon e^{-(\mu T+\beta)}\left\|\hat{\vartheta}_{\varepsilon ttt}^{(\theta)}\right\|_0^2 + \int\limits_Q\left[\delta_1^*\hat{\vartheta}_{\varepsilon tt}^{2(\theta)} + (b\mu+2x)\hat{\vartheta}_{\varepsilon xt}^{2(\theta)} + (2b-2)\hat{u}_{\varepsilon xx}^{2(\theta)} + \delta_2\mu\hat{\vartheta}_{\varepsilon t}^{2(\theta)} + \delta_2\hat{\vartheta}_{\varepsilon x}^{2(\theta)}\right]e^{-(\mu t+\beta x)}dQ$$

$$-2\|\alpha\|_{C^1}^2\int\limits_Q\hat{\vartheta}_{\varepsilon t}^{2(\theta)}e^{-(\mu t+\beta x)}dQ \le \left|-2\left(\mathfrak{L}_\varepsilon\hat{\vartheta}_\varepsilon^{(\theta)}, P\hat{\vartheta}_\varepsilon^{(\theta)}e^{-(\mu t+\beta x}\right)_0\right|.$$

или

$$\varepsilon e^{-(\mu T+\beta)}\hat{\vartheta}\left\|\hat{u}_{\varepsilon ttt}^{(\theta)}\right\|_0^2 + \delta_{\min^2}e^{-(\mu T+\beta)}\left\|\hat{\vartheta}_\varepsilon^{(\theta)}\right\|_2^2 - \|\alpha\|_{C^1}^2\int\limits_Q\hat{\vartheta}_{\varepsilon t}^{2(\theta)}e^{-(\mu t+\beta)}dQ \le \left|-2\left(L_\varepsilon\hat{\vartheta}_\varepsilon^{(\theta)}, P\hat{\vartheta}_\varepsilon^{(\theta)}e^{-(\mu t+\beta)}\right)_0\right|. \tag{3.39}$$

Теперь возьмём верхнюю оценку (3.39). Запишем правую часть в развернутом виде

$$\left|-2\left(F(\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}) - F(\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-2)}), e^{-(\mu t+\beta x)}P\hat{\vartheta}_\varepsilon^{(\theta)}\right)_0\right|$$

$$= \left|-2\int\limits_Q\left(\frac{1}{H}\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}f_2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\xi^2\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}e^{i\xi\ell_1}d\xi - \frac{1}{H}\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}f_1\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\xi^2\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}e^{i\xi\ell_2}d\xi\right.\right.$$

$$-\frac{1}{H}\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-2)}f_2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\xi^2\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-2)}e^{i\xi\ell_1}d\xi + \frac{1}{H}\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-2)}f_1\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\xi^2\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-2)}e^{i\xi\ell_2}d\xi$$

$$+\frac{1}{H}\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-2)}f_2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\xi^2\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}e^{i\xi\ell_1}d\xi - \frac{1}{H}\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-2)}f_2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\xi^2\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}e^{i\xi\ell_1}d\xi$$

$$+\frac{1}{H}\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-2)}f_1\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\xi^2\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}e^{i\xi\ell_2}d\xi - \frac{1}{H}\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-2)}f_1\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\xi^2\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}e^{i\xi\ell_2}d\xi$$

$$+\frac{1}{H}\hat{\vartheta}_\varepsilon^{(\theta-1)}\left[f_2L_1\varphi_1 - f_1L_1\varphi_2\right]$$

$$\left.\left.+\frac{1}{H}\hat{f}\left[\varphi_1\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\xi^2\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}e^{i\xi\ell_2}d\xi - \varphi_2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\xi^2\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}e^{i\xi\ell_1}d\xi\right]\right)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left(\hat{\vartheta}_{\varepsilon ttt}^{(\theta)} - \mu\hat{\vartheta}_{\varepsilon tt}^{(\theta)} + \hat{\vartheta}_{\varepsilon xx}^{(\theta)} - \hat{\vartheta}_{\varepsilon t}^{(\theta)}\right)e^{-(\mu t+\beta x)}dQ\right|.$$

Применяя неравенства Коши с параметром σ и используя предыдущие результаты, получаем

$$\left|-2\left(F(\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}) - F(\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-2)}), e^{-(\mu t+\beta x)}P\hat{\vartheta}_\varepsilon^{(\theta)}\right)_0\right|$$

$$\le \sigma_4\frac{3\pi}{2}c_2^2\mathfrak{F}\left(3+\mu^2\right)\left\|\hat{\vartheta}_\varepsilon^{(\theta-1)}\right\|_2^2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(1+\xi^2\right)^3\left\|\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}\right\|_2^2d\xi \tag{3.40}$$

$$+\sigma_4\frac{3\pi}{2}c_2^2\mathfrak{F}\left(3+\mu^2\right)\left\|\hat{\vartheta}_\varepsilon^{(\theta-1)}\right\|_2^2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(1+\xi^2\right)^3\left\|\hat{\vartheta}_\varepsilon^{(\theta-1)}\right\|_2^2d\xi$$

$$+\sigma_4\frac{3\pi}{2}c_2^2\mathfrak{F}\left(\left(1+a+\|\alpha\|_C^2\right)\sum_{i=1,2}\sum_{|\alpha|=1}^{3}\|D^\alpha\varphi_i\|_C^2+\sum_{i=1,2}\|g_i\|_{C^1}^2\right)\left\|\hat{\vartheta}_\varepsilon^{(\theta-1)}\right\|_2^2$$

$$+\sigma_4\frac{3\pi}{2}c_2^2\mathfrak{F}\left(3+\mu^2\right)\left\|\hat{f}\right\|_2^2\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1+\xi^2\right)^3\left\|\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}\right\|_2^2 d\lambda+30\sigma_4^{-1}\left\|\hat{\vartheta}_\varepsilon^{(\theta)}\right\|_2^2.$$

Теперь, объединяя верхнюю оценку (3.39) и нижнюю оценку (3.40) для тождества (3.38), получаем

$$\begin{aligned}
&\varepsilon e^{-(\mu T+\beta)}\left\|\hat{\vartheta}_{\varepsilon ttt}^{(\theta)}\right\|_0^2+\left(\delta_{\min}^2e^{-(\mu T+\beta)}-30\sigma_4^{-1}\right)\left\|\hat{\vartheta}_\varepsilon^{(\theta)}\right\|_2^2-\|\alpha\|_{C^1}^2\int_Q\hat{\vartheta}_{\varepsilon t}^{2(\theta)}e^{-(\mu t+\beta x)}dQ\\
&\le\sigma_4\frac{3\pi}{2}c_2^2\mathfrak{F}\left(3+\mu^2\right)\left\|\hat{\vartheta}_\varepsilon^{(\theta-1)}\right\|_2^2\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1+\xi^2\right)^3\left\|\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}\right\|_2^2 d\xi\\
&+\sigma_4\frac{3\pi}{2}c_2^2\mathfrak{F}\left(3+\mu^2\right)\left\|\hat{\vartheta}_\varepsilon^{(\theta-1)}\right\|_2^2\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1+\xi^2\right)^3\left\|\hat{\vartheta}_\varepsilon^{(\theta-1)}\right\|_2^2 d\xi\\
&+\sigma_4\frac{3\pi}{2}c_2^2\mathfrak{F}\left(\left(1+b+\|\alpha\|_C^2\right)\sum_{i=1,2}\sum_{|\alpha|=1}^{3}\|D^\alpha\varphi_i\|_C^2+\sum_{i=1,2}\|g_i\|_{C^1}^2\right)\left\|\hat{\vartheta}_\varepsilon^{(\theta-1)}\right\|_2^2\\
&+\sigma_4\frac{3\pi}{2}c_2^2\mathfrak{F}\left(3+\mu^2\right)\left\|\hat{f}\right\|_2^2\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1+\xi^2\right)^3\left\|\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}\right\|_2^2 d\xi.
\end{aligned}\tag{3.41}$$

Выберем σ_4, равным $\sigma_4=e^{\mu T+\beta}\frac{60}{\delta_{\min}^2}$, откуда следует $\delta_{\min}^2-30e^{\mu T+\beta}\sigma^{-1}=\frac{\delta_{\min}^2}{2}$. Отсюда

$$\begin{aligned}
&\frac{\varepsilon}{\delta_{\min}^2}\left\|\hat{\vartheta}_{\varepsilon ttt}^{(\theta)}\right\|_0^2+\left\|\hat{\vartheta}_\varepsilon^{(\theta)}\right\|_2^2\le q_1\|\alpha\|_{C^1}^2\left\|\hat{\vartheta}_\varepsilon^{(\theta-1)}\right\|_2^2\\
&+\frac{256}{\left(\delta_{\min}^2\right)^2}\frac{3\pi}{2}e^{2(\mu T+\beta)}c_2^2\mathfrak{F}\left(3+\mu^2\right)\left\|\hat{\vartheta}_\varepsilon^{(\theta-1)}\right\|_2^2\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1+\xi^2\right)^3\left\|\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}\right\|_2^2 d\xi\\
&+\frac{256}{\left(\delta_{\min}^2\right)^2}\frac{3\pi}{2}e^{2(\mu T+\beta)}c_2^2\mathfrak{F}\left(3+\mu^2\right)\left\|\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}\right\|_2^2\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1+\xi^2\right)^3\left\|\hat{\vartheta}_\varepsilon^{(\theta-1)}\right\|_2^2 d\xi\\
&+\frac{256}{\left(\delta_{\min}^2\right)^2}\frac{3\pi}{2}e^{2(\mu T+\beta)}c_2^2\mathfrak{F}\left(3+\mu^2\right)\left\|\hat{f}\right\|_2^2\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1+\xi^2\right)^3\left\|\hat{\vartheta}_\varepsilon^{(\theta-1)}\right\|_2^2 d\xi\\
&+\frac{256}{\left(\delta_{\min}^2\right)^2}\frac{3\pi}{2}e^{2(\mu T+\beta)}c_2^2\mathfrak{F}\left(\left(1+a+\|\alpha\|_C^2\right)\sum_{i=1,2}\sum_{|\alpha|=1}^{3}\|D^\alpha\varphi_i\|_C^2+\sum_{i=1,2}\|g_i\|_{C^1}^2\right)\left\|\hat{\vartheta}_\varepsilon^{(\theta-1)}\right\|_1^2.
\end{aligned}\tag{3.42}$$

Умножая неравенство (3.42) на $\frac{2}{\delta_{\min}^2}e^{\mu T+\beta}\left(1+\lambda^2\right)^3$ и суммируя по λ от $-\infty$ до $+\infty$, получаем вторую рекуррентную формулу

$$\begin{aligned}
&\frac{\varepsilon}{\delta_{\min}^2}\left\langle\vartheta_{\varepsilon ttt}^{(\theta)}\right\rangle_0^2+\left\langle\vartheta_\varepsilon^{(\theta)}\right\rangle_2^2\\
&\le\frac{192}{\left(\delta_{\min}^2\right)^2}\pi e^{2(\mu T+\beta)}c_2^2\mathfrak{F}\left(3+\mu^2\right)\|\alpha\|_{C^1}^2\cdot\\
&\cdot\left(2\left[g\right]_{1,3}^2+\left(\left(1+a+\|\alpha\|_C^2\right)\sum_{i=1,2}\sum_{|\alpha|=1}^{3}\|D^\alpha\varphi_i\|_C^2+\sum_{i=1,2}\|g_i\|_{C^1}^2\right)\left(2m_1+\left[f\right]_{2,3}^2\right)\right)\left\langle\vartheta_\varepsilon^{(\theta-1)}\right\rangle_2^2.
\end{aligned}\tag{3.43}$$

Рассуждая аналогично доказательству леммы 3.1, получаем

$$\frac{\varepsilon}{\delta}\left\langle \vartheta_{\varepsilon\, ttt}^{(\theta)}\right\rangle_0^2+\left\langle \vartheta_{\varepsilon}^{(\theta)}\right\rangle_2^2\le 2\gamma_0 q^{\theta}.$$

Таким образом, оценка IV) доказана. Лемма 3.2 доказана.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены все условия теоремы 3.1. Тогда задача* (2.7)–(2.9) *имеет единственное решение в пространстве* $W(Q,R)$.

Доказательство. Для доказательства теоремы покажем, что последовательность $\{\hat{u}_\varepsilon^{(\theta)}\}\in W(Q,R)$ является фундаментальной. Пусть $\left\{\hat{u}_\varepsilon^{(\theta)}\right\},\left\{\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}\right\}\in W(Q,R)$. Рассмотрим новые функции $\left\{\hat{\vartheta}^{(\theta)}\right\}=\left\{\hat{u}^{(\theta)}-\hat{u}^{(\theta-1)}\right\}$. Для этих функций справедлива априорная оценка IV) из леммы 3.2, т.е.

$$\left[\hat{\vartheta}_\varepsilon^{(\theta)}\right]^2_{W(Q,R)}<2\gamma_0 q^{\theta}. \tag{3.44}$$

Теперь докажем, что последовательность функций $\{\hat{u}_\varepsilon^{(\theta)}\}\in W(Q,R)$ является фундаментальной. Для этого, используя оценку (3.44) и неравенство треугольника, получаем для $\forall p\in N$

$$\left[\hat{u}_\varepsilon^{(\theta+p)}-\hat{u}_\varepsilon^{(\theta)}\right]^2_{W(Q,R)}\le\left[\hat{u}_\varepsilon^{(\theta+p)}-\hat{u}_\varepsilon^{(\theta+p-1)}\right]^2_{W(Q,R)}+\left[\hat{u}_\varepsilon^{(\theta+p-1)}-\hat{u}_\varepsilon^{(\theta+p-2)}\right]^2_{W(Q,R)}+...$$

$$+\left[\hat{u}_\varepsilon^{(\theta+1)}-\hat{u}_\varepsilon^{(\theta)}\right]^2_{W(Q,R)}\le 2\gamma_0\left(q^{\theta+p}+q^{\theta+p-1}+...+q^{\theta+1}\right)$$

$$=2\gamma_0 q^{\theta+1}(1+q+q^2+...+q^p)\le\frac{2\gamma_0 q^{\theta+1}}{1-q}.$$

Очевидно, что при достаточно больших θ, так как $q<\frac{1}{2}$, это значение сколь угодно мало. Отсюда следует, что последовательность $\left\{\hat{u}_\varepsilon^{(\theta)}\right\}$ является фундаментальной. Следовательно, задача (3.7)–(3.9) имеет решение в пространстве $W(Q,R)$, то есть $\left\{\hat{u}_\varepsilon^{(\theta)}\right\}\to\{\hat{u}_\varepsilon\}$ при $\theta\to\infty$. Отсюда следует, что функции $\{\hat{u}_\varepsilon\}\in W(Q,R)$ являются решениями задачи (3.8)–(3.10).

Теперь покажем, что $\{\hat{u}_\varepsilon\}$ имеет предел в подходящем пространстве, и предельная функция $\{\hat{u}\}$ является решением задачи (2.7)–(2.9). Отметим, что $F\left(\hat{u}_\varepsilon^2\right)$ в (3.7) содержит нелинейные члены. Сначала оценим эти члены. Из леммы 3.1 следует, что интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(1+\lambda^2)^3\left\|\hat{u}_\varepsilon\right\|_2^2 d\lambda$ сходится, следовательно, $\left\|\hat{u}_\varepsilon\right\|_2^2\le\frac{C}{(1+\lambda^2)^{3+s}}<C,\quad s>1$, то есть имеем оценку $\left\|\hat{u}_\varepsilon\right\|_2^2<C$. Используя неравенства Гёльдера и $\|u\|_{L_4}^2\le c_2\|u\|_{W_2^1}^2$, получаем

$$\begin{aligned}&\int\limits_Q\left|f_2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\xi^2\hat{u}_\varepsilon(x,t,\xi)\hat{u}_\varepsilon(x,t,\lambda)e^{i\xi\ell_1}d\xi\right|^2dxdt\\&\le\max_Q|f_2|^2\frac{3\pi}{4}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\xi^6\left(\int\limits_Q\hat{u}_\varepsilon^4(x,t,\xi)dxdt\right)\left(\int\limits_Q\hat{u}_\varepsilon^4(x,t,\lambda)dxdt\right)d\xi\\&\le\frac{3\pi}{4}c_2^2\mathfrak{F}\left\|\hat{u}_\varepsilon\right\|_1^2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\xi^6\left\|\hat{u}_\varepsilon\right\|_1^2d\xi\\&<\frac{3\pi}{4}c_2^2\mathfrak{F}C\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(1+\xi^2)^3\left\|\hat{u}_\varepsilon\right\|_1^2d\xi<\frac{3\pi}{2}c_2^2\gamma_0C\mathfrak{F}.\end{aligned}\tag{3.45}$$

Здесь имеет место ограниченность подынтегрального выражения в $L_2(Q)$, что позволяет выделить слабо сходящуюся подпоследовательность в $L_2(Q)$. Таким образом, из оценки леммы 3.1 можно перейти к пределу в подпоследовательности $\left\{\hat{u}_{\varepsilon_j}\right\}$ так, что

$$\hat{u}_{\varepsilon_j} \to \hat{u} \quad \text{слабо в} \quad W(Q).$$

Учитывая полученные выше результаты и (3.45), имеем

$$F\left(\hat{u}_{\varepsilon_j}\right) \to F\left(\hat{u}\right) \quad \text{слабо в} \quad L_2(Q).$$

Из леммы 3.1 следует, что $\sqrt{\varepsilon_j}\hat{u}_{\varepsilon_j ttt}$ ограничена, поэтому $\sqrt{\varepsilon_j}\sqrt{\varepsilon_j}\hat{u}_{\varepsilon_j ttt} \to 0$ в $L_2(Q)$. Так как сходимость в $L_2(Q)$ сильнее слабой сходимости, то $\sqrt{\varepsilon_j}\left(\sqrt{\varepsilon_j}\hat{u}_{\varepsilon_j ttt}, \vartheta\right) \to 0$. Переходя к слабому пределу в (3.7) при $\varepsilon_j \to 0$, получаем $L\hat{u} = F(\hat{u})$. Это означает, что функция $\hat{u}$ при фиксированном λ является единственным решением задачи (2.7)–(2.9) в пространстве $W_2^2(Q)$ [21, 23]. *Доказательство теоремы 2.4 завершено.*

Докажем теорему 3.1. Так как все условия теоремы 3.1 выполнены, то, используя равенства Парсеваля–Стеклова [24] для решения задачи (2.7)–(2.9), получаем решение задачи (1.1)–(2.5) из указанного класса U.

Оценка для $c(x,t)$:

$$\|c\|_{C(Q)} = \max_Q |c(x,t)|$$

$$= \max_Q \left| \frac{1}{H}\left[f_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 \hat{u} e^{i\lambda\ell_1} d\lambda - f_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 \hat{u} e^{i\lambda\ell_2} d\lambda + f_2 L_1\varphi_1 - f_1 L_1\varphi_2 \right] \right|$$

$$\le 2\frac{\mathfrak{F}}{\eta} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 \max|\hat{u}|\, d\lambda + \frac{\mathfrak{F}}{\eta}\left(\max|L_1\varphi_1| + \max|L_1\varphi_2|\right)$$

$$< 2\frac{\mathfrak{F}}{\eta}\frac{3\pi}{4}c_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1+\lambda^2\right)^3 \|\hat{u}\|_2^2\, d\lambda + 2\frac{\mathfrak{F}}{\eta}\gamma_0$$

$$< 2\frac{\mathfrak{F}}{\eta}\frac{3\pi}{4}\gamma_0 + 2\frac{\mathfrak{F}}{\eta}\gamma_0 < 2\frac{\mathfrak{F}}{\eta}\gamma_0\left(2c_1+1\right).$$

Можно выбрать данные так, чтобы число $2\frac{\mathfrak{F}}{\eta}\gamma_0\left(2c_1+1\right)$ было меньше r.

Оценка для $h(x,t)$:

$$\|h\|_{C(Q)} = \max_Q |h(x,t)|$$

$$= \max_Q \left| \frac{1}{H}\left[\varphi_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 \hat{u} e^{i\lambda\ell_2} d\lambda - \varphi_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 \hat{u} e^{i\lambda\ell_1} d\lambda + f_1 L_1\varphi_2 - f_2 L_1\varphi_1 \right] \right|$$

$$\le 2\frac{\mathfrak{F}}{\eta} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 \max|\hat{u}|\, d\lambda + \frac{\mathfrak{F}}{\eta}\left(\max|L_1\varphi_1| + \max|L_1\varphi_2|\right)$$

$$< 2\frac{\mathfrak{F}}{\eta}\frac{3\pi}{4}c_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1+\lambda^2\right)^3 \|\hat{u}\|_2^2\, d\lambda + 2\frac{\mathfrak{F}}{\eta}\gamma_0$$

$$< 2\frac{\mathfrak{F}}{\eta}\frac{3\pi}{4}\gamma_0 + 2\frac{\mathfrak{F}}{\eta}\gamma_0 < 2\frac{\mathfrak{F}}{\eta}\gamma_0\left(2c_1+1\right).$$

Доказательство теоремы 3.1 завершено.

Краткое изложение результатов. При допущениях теоремы 3.1, включая условие $2q < 1$, мы доказали существование и единственность решения обратной задачи коэффициентов (1.1)–(2.5) в классе U. Доказательство основано на преобразовании Фурье и методах «$\varepsilon-$ регуляризации», априорных оценках, последовательных приближениях и сжимающих отображениях.

Благодарность

Автор выражает искреннюю благодарность анонимным рецензентам за обсуждение полученных результатов.

Список литературы

[1] А. В. Бицадзе. О нелокальных краевых задачах. Докл. АН СССР. Т. 277, № 1, С. 17–19.
[2] Ю. Е. Аниканов. Некоторые методы исследования многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений. 1978. Новосибирск: Наука.
[3] Б. А. Бубнов. К вопросу о разрешимости многомерных обратных задач для параболических и гиперболических уравнений. Препринт. ВЦ СО АН СССР, Новосибирск. 1987. № 714.
[4] М. М. Лаврентьев, В. Г. Романов, В. Г. Васильев. Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. 1969. Новосибирск: Наука.
[5] С. И. Кабанихин. Обратные и некорректные задачи. 2009. Новосибирск: Сибирское научное издательство.
[6] А. Г. Меграбов. Некоторые обратные задачи для уравнения смешанного типа. 1977. Докл. АН СССР. Т. 234, С. 305–307.
[7] К. Б. Сабитов, Н. В. Мартемьянова. Нелокальная обратная задача для уравнения смешанного типа. Изв. высш. учебн. заведений. Математика. 2011. Т. 2, С. 71–85.
[8] К. Б. Сабитов, И. А. Бурханова (Хаджи). Краевая задача нахождения правой части для уравнения смешанного типа с оператором типа Чаплыгина. Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications. 2021. Т. 9, № 1, С. 26–50.
[9] К. Б. Сабитов, И. А. Бурханова (Хаджи). Обратная задача нахождения правых частей уравнений смешанного типа с оператором Чаплыгина. Lobachevskii Journal of Mathematics. 2022. Т. 43, № 43, С. 666–680.
[10] К. Б. Сабитов. Об единственности решений обратных задач для уравнений различных типов при нахождении их правой части. Lobachevskii Journal of Mathematics. 2024. Т. 45, № 1, С. 532–539.
[11] Джамалов С.З, Пятков С.Г. Некоторые классы обратных задач для уравнений смешанного типа второго порядка. Матем, заметки СВФУ. 2018, Т.25, №4, С. 3-15.
[12] С. З. Джамалов, Р. Р. Ашуров. О линейной обратной задаче для многомерного уравнения смешанного типа первого рода второго порядка. Изв. высш. учебн. заведений. Математика. 2019. Т. 6, С. 1–12.
[13] С. З. Джамалов, Р. Р. Ашуров, Х. Ш. Туракулов. Линейная обратная задача для трехмерного уравнения Трикоми в призматической неограниченной области. Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. Т. 42(15), С. 3606–3615.
[14] С. З. Джамалов, Б. К. Сипатдинова. Линейная обратная задача с полунелокальными краевыми условиями для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода второго порядка в неограниченном параллелепипеде. Челябинский физико-математический журнал. 2024. Т. 9, № 3, С. 471–482.
[15] С. З. Джамалов, А. А. Шокиров. О коэффициентной обратной задаче с нелокальными краевыми условиями для трехмерного уравнения Трикоми в параллелепипеде. Lobachevskii Journal of Mathematics. 2025. Т. 46, С. 3242–3258.
[16] А. М. Нахушев. Нагруженные уравнения и их приложения. 2012. Москва: Наука.
[17] Ж.-Л. Лионс, Э. Маженес. Неоднородные краевые задачи и их приложения. 1971. Москва: Мир.
[18] С. Л. Соболев. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. 1988. Москва: Наука.
[19] О. А. Ладыженская. Краевые задачи математической физики. 1973. Москва: Наука.
[20] С. З. Джамалов. Линейная обратная задача для уравнения Трикоми в трехмерном пространстве. Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2016. Т. 13, № 2, С. 10–15.
[21] С. З. Джамалов. Нелокальные краевые и обратные задачи для уравнений смешанного типа (монография). 2021. Ташкент: Fan ziyosi.
[22] В. Н. Врагов. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. 1983. Новосибирск: НГУ.
[23] Р. Латтес, Ж.-Л. Лионс. Метод квазиобращения и его приложения. 1970. Москва: Мир.
[24] В. А. Треногин. Функциональный анализ. 2007. Москва: Физматлит.

On a coefficient inverse problem with nonlocal boundary conditions for the three-dimensional Tricomi equation in an unbounded parallelepiped

Shokirov Abduvosiq A.

Abstract

The paper studies a coefficient inverse problem with nonlocal boundary conditions for the three-dimensional Tricomi equation in an unbounded parallelepiped. To prove the solvability of the problem, the Fourier transform, the $\varepsilon-$regularization method, a priori estimates, and the method of successive approximations are employed.

Keywords

three-dimensional Tricomi equation, coefficient-inverse problem with semi-nonlocal conditions, Fourier and "$\varepsilon-$ regularization" methods, a priori estimates and successive approximations.

Affiliations

Shokirov Abduvosiq A.

Address: 1. Scientific Laboratory of Differential Equations and Their Applications, V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics Uzbekistan Academy of Sciences, University street 9, 100174, Tashkent, Uzbekistan.

2. Branch of Gubkin Russian State University of Oil and Gas (National Research University) in Tashkent, 100125, Durmon Yuli Street, 34, Mirzo-Ulugbek District, Tashkent, Uzbekistan

e-mail: shokirov.abduvosiq96@gmail.com

ORCID ID: https://orcid.org/0009-0001-5262-4718