



# Влияние Инерционной Силы на Процесс stick-slip Двух Тел с Сухим Трением

Мирзаев И. \*, Турдиев М.С., Джумаев Х.Ж. и Турдиев С.С.

## Аннотация

При решении трибологических задач с использованием модели сухого трения часто используется функция SIGNUM для определения направления действия силы трения. Состояние прилипания двух тел определяется равенством скоростей. Однако при численном решении задач скорости двух соприкасающихся тел в процессе их колебания на самом деле не будут точно равны. Поэтому необходимо использовать дополнительное условие прилипания. Также необходимо разработать алгоритм определения начала скольжения двух соприкасающихся тел с сухим трением. Авторами разработан численный алгоритм решения динамических задач для двух абсолютно жестких тел, взаимодействующих по закону сухого трения. В данной статье на основе результатов решения четырех задач показано, что использование функции SIGNUM без дополнительных условий не всегда дает достоверные результаты. Результаты лабораторного эксперимента по свободным колебаниям двух тел с сухим трением сравниваются с решением соответствующей задачи по алгоритму авторов, а также с решением задачи по алгоритму с прямым использованием функции SIGNUM. Сравниваются решения трех задач, полученные по алгоритмам авторов и с прямым использованием функции SIGNUM. Показано, что ошибки в расчете ускорения приводят к неверным значениям силы инерции, что влияет на процесс stick-slip.

*Ключевые слова:* Сухое трение; функция SIGNUM; движение «прилипание-скольжение»; условие адгезии; численный алгоритм; динамика твердого тела; колебания, вызванные трением; ошибка ускорения.

*Предметная классификация AMS (2020):* Основная: 74-XX; Дополнительная: 74Jxx; 74Kxx; 74K10; 70F35; 74Pxx; 86A15.

## 1. Введение

Для моделирования трения на контакте двух абсолютно твердых тел часто используется модель сухого трения. При решении задач трибологии по модели сухого трения часто используют функцию SIGNUM для определения направления действия силы трения [1 – 15].

В работе [1, 2] исследовано влияние частот возмущающих внешних сил на процесс колебания одно массовой системы с режимом stick-slip.

В статье [3] представлена разработка скользящего режима управления для отслеживания скорости пьезоэлектрического привода в режиме stick-slip.

В исследованиях [4, 5] рассматриваются, влияние значений параметров трения в двух контактных поверхностях изменяются при наличии двух внешних возмущающих сил. Среди используемых характеристик вибрации амплитуда вибрации особенно важна, поскольку она может напрямую влиять на напряжения и, следовательно,

на срок службы системы. Модель трения представляет собой знаковую функцию плюс линейную и кубическую функцию относительной скорости.

В статье [6] отмечено, что природа динамических сил трения, возникающих между соприкасающимися телами, чрезвычайно сложна и зависит от множества факторов: строения интерфейса, временных масштабов и частоты контакта, реакции интерфейса на нормальные силы, инерции и тепловых эффектов шероховатости контактирующих поверхностей.

В статье [7] исследован при ударном воздействии осциллятор с двумя степенями свободы с трением и периодическим принудительным возбуждением с использованием теории переключаемости потока в прерывистых динамических системах. На основе разрывов, вызванных трением и ударом между двумя массами, фазовое пространство разбивается на различные границы и домены.

В работе [8] обсуждено несколько моделей контактных сил для динамики многих тел с использованием различных численных методов и алгоритмов негладких методологий.

В работе [9] исследуется непрерывное динамическое поведение нескольких типов колебательных систем SDOF или 2-DOF с законом удара, трения или перехода, а также исследуются численные модели периодических движений или переходных движений на непрерывных границах.

В статье [10] использована модель сухого трения для исследования вибрации тела, имеющего упругое звено с неподвижной опорой, при воздействии на тело силы трения другого тела, движущегося по заданному закону и под внешней приложенной вертикальной нагрузкой.

В статье [11] построена термодинамическая модель на основе теории фазовых переходов Ландау, описывающая поведение данной системы в режиме граничного трения. Кинетика системы изучена на основе модели, описывающей фазовые переходы первого рода между кинетическими режимами трения.

При наличии сил взаимодействия между трущимися поверхностями двух блоков при движении верхнего будет двигаться и нижний, причем его траектория будет принципиально зависеть от режима трения. Подобная установка экспериментально исследована в работе [12], где в качестве трущихся поверхностей используется стальная пара трения, а как смазка — парафиновое масло ISO 32, непрерывно подающееся в зону контакта с фиксированной скоростью.

В статье [13] рассмотрена второстепенный пластический ударный осциллятор. Определены границы разрыва фазового пространства системы, а также локальные карты и карта Пуанкаре. Четыре случая скользящей бифуркации предельных циклов в ударной системе схематически описаны.

В статье [14] выведено аналитическое выражение для упругопластического отклика модели с одной степенью свободы (SDOF) с нелинейным вязким демпфированием, подвергнутой «критическому мультиимпульсу», который максимизирует отклик. Показано, что нелинейность в вязком демпфировании в некоторых случаях оказывает заметное влияние на реакцию системы.

В работе [17] исследована прерывистая динамика класса 3-DOF (три степени свободы) фрикционных ударных колебательных систем с жесткой рамой и подвижными щеками с использованием теории переключения потока высокой размерности. Для лучшего понимания сложности динамики 3-DOF системы численно моделируются несколько типичных движений.

Изучена комбинированная расчетная модель с одной степенью свободы [18], состоящая из элементов с различными механизмами неупругого деформирования. Анализируются различные сценарии условий совместного деформирования разнородных элементов.

В статье [19] рассмотрены примеры нерегулярного поведения динамических систем с сухим трением. Предложена классификация фрикционных контактов по размерности, ассоциативности и возможности прерываний, сформулированы основные модели, показывающие типичные черты. В частности, получены условия бифуркации семейств равновесий и построены формулы для матрицы монодромии для систем с трением. Показано, что системы с неассоциированными контактами обладают особенностями, приводящими к несуществованию или неединственности фазовых траекторий; эти результаты обобщают парадоксы Пенлеве и Джеллетта. Из-за такого

поведения ряд более ранних результатов, в том числе задача о движении твердого тела по шероховатой плоскости, требуют уточнения.

Изучение решений задач с сухим трением при наличии вынуждающей силы дают приемлемые результаты в отдельных случаях, из их графиков можно увидеть осцилляции скоростей с малыми амплитудами [7]. Влияние инерционной силы трущихся тел сильно заметно, при их свободных колебаниях [20]. Авторами разработан численный подход решения задач с сухим трением с дополнительным использованием логического алгоритма [20 – 23].

В данной работе по результатам решения четырех задач по алгоритму авторов [20 – 23] и прямым использованием функции SIGNUM показано, что использование функции SIGNUM не всегда дает достоверные результаты.

## 2. Материалы и методы

В данном разделе рассмотрены решения известных, опубликованных статей, четыре задачи по колебаниям твердых тел при наличии силы сухого трения. Каждая из этих задач решена с помощью алгоритма авторов и прямого использования функции SIGNUM.

Рассмотрим задачу из статьи [20]. На рисунке 1 представлена имитационная модель, для которой построено решение задачи и имеются результаты лабораторного эксперимента.

Когда две массы движутся вместе без скольжения, то уравнение движения является уравнением движения системы

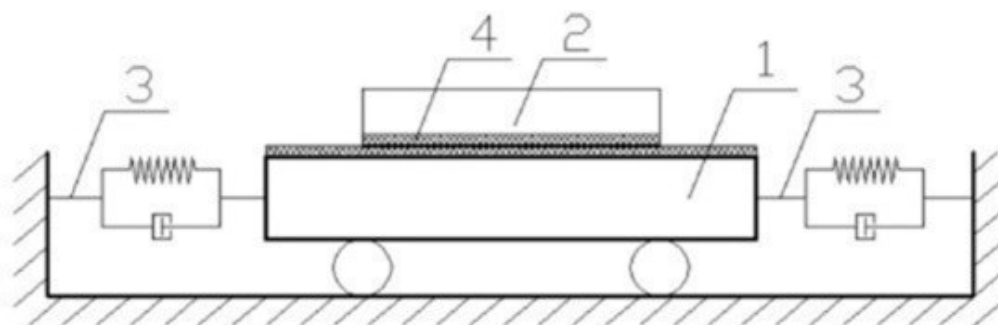


Рис. 1. Схема моделирования установки: 1 – подвижная часть вибрационного стенда, 2 – пластина из листовой стали для исследования динамического коэффициента сухого трения, 3 – стальные пластины с вязкоупругими свойствами, 4 – слой фторопласта.

с одной степенью свободы

$$(m_1 + m_2)\ddot{u} + \mu\dot{u} + cu = 0 \quad (1)$$

Если происходит скольжение масс, то для каждой массы существует другое уравнение движения.

$$\begin{aligned} m_1\ddot{u}_1 + \mu\dot{u}_1 + cu_1 &= F_{fr}, \\ m_2\ddot{u}_2 &= -F_{fr}, \\ F_{fr} &= \text{sign}(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) m_2 g f_d, \end{aligned} \quad (1')$$

где  $m_1, m_2$  — соответствуют массам вибрационного стола (платформы с учетом половины масс гибких вертикальных пластин) и верхней стальной пластины,  $c$  — общая жесткость вертикальных пластин,  $\mu$  — это коэффициент ослабления колебаний системы из-за потерь энергии,  $u, u_1, \dot{u}, \dot{u}_1, \ddot{u}, \ddot{u}_1$  — движение, скорость и ускорение платформы. Знак силы трения при скольжении определяется разностью массовых скоростей, мы обозначаем  $f = \text{sign}(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) f_d g$ , где  $f_d$  — является динамическим коэффициентом сухого трения между массами. Вторая задача взята из статьи [7], имитационная модель которой показана на рисунке 2.

Для системы 2-DOF учитываются следующие четыре типа движений для двух масс  $M_1$  и  $M_2$ : если масса  $M_1$  не

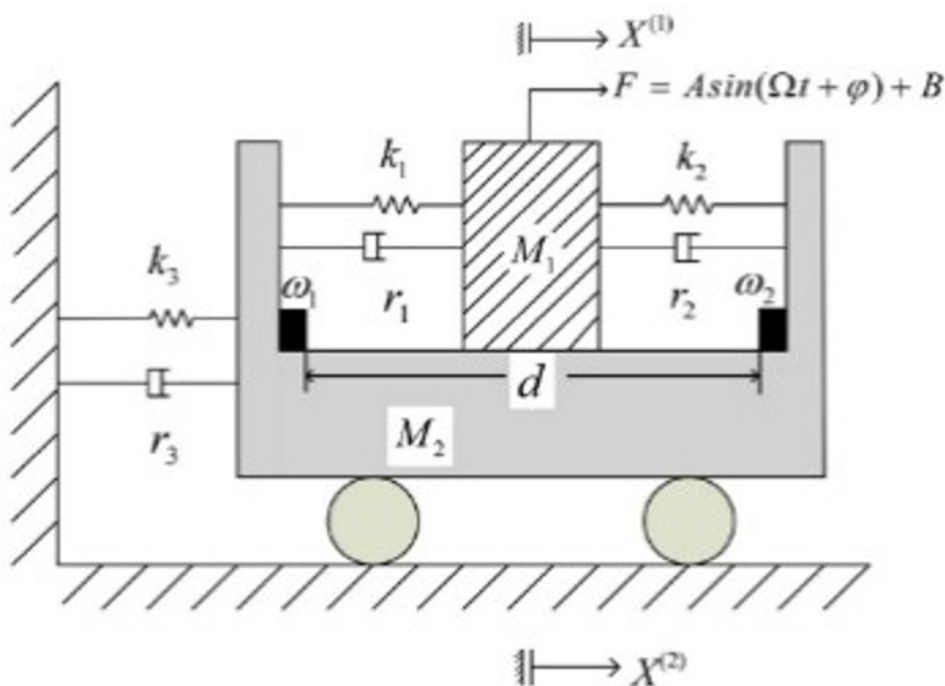


Рис. 2. Физическая модель

движется вместе с массой  $M_2$ , это движение называется свободным или несскользящим движением; если масса  $M_1$  достигает левого или правого ограничения с ненулевой относительной скоростью, это движение называется ударным движением; если масса  $M_1$  движется вместе с массой  $M_2$  в зазоре, это движение называется скользящим движением; если масса  $M_1$  достигает соответствующего ограничения с нулевой относительной скоростью, а затем они движутся вместе, это движение называется движением стержня или боковым движением для простоты.

Для неупругого движения уравнения движения для масс  $M_i$  ( $i = 1, 2$ ) можно получить по [7]:

$$\begin{aligned} \ddot{X}^{(1)} + C^{(1)}\dot{X}^{(1)} + D^{(1)}X^{(1)} &= A^{(1)}\sin(\Omega t + \varphi) + B^{(1)} + C^{(1)}\dot{X}^{(2)} + D^{(1)}X^{(2)} - F_{\mu}^{(1)}\operatorname{sgn}(\dot{X}^{(1)} - \dot{X}^{(2)}), \\ \ddot{X}^{(2)} + (C^{(2)} + H^{(2)})\dot{X}^{(2)} + (D^{(2)} + L^{(2)})X^{(2)} &= C^{(2)}\dot{X}^{(1)} + D^{(2)}X^{(1)} - F_{\mu}^{(2)}\operatorname{sgn}(\dot{X}^{(2)} - \dot{X}^{(1)}), \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} A^{(1)} &= \frac{A}{M_1}, & B^{(1)} &= \frac{B}{M_1}, & C^{(i)} &= \frac{r_1 + r_2}{M_i}, & D^{(i)} &= \frac{k_1 + k_2}{M_i}, \\ H^{(2)} &= \frac{r_3}{M_2}, & L^{(2)} &= \frac{k_3}{M_2}, & F_{\mu} &= \mu_k M_1 g, & F_{\mu}^{(i)} &= \frac{F_{\mu}}{M_i}. \end{aligned}$$

Две массы  $M_1$  и  $M_2$  соединены двумя пружинами постоянных  $k_i$  ( $i = 1, 2$ ) и двумя демпферами коэффициентов  $r_i$  ( $i = 1, 2$ ). Здесь  $A$ ,  $\Omega$ ,  $\varphi$  и  $B$  — соответственно амплитуда возбуждения, частота, фазовый угол и константа. Расстояние между жесткими ограничениями  $\omega_1$  и  $\omega_2$  равно  $d$ .

Третья задача взята из статьи [10], имитационная модель которой показана на рисунке 3. Дифференциальное уравнение движения тела массой  $M$  на рисунке 3 имеет вид

$$M\ddot{x} + 2Kx - F = 0, \quad (3)$$

где  $F$  — сила трения, две пружины с коэффициентом жесткости  $K$ , блок массой  $M$ . Четвертая задача взята из статьи [1], имитационная модель которой показана на рисунке 4.

Исследуемая система показана на рисунке 4, где масса  $m$  соединена с неподвижной опорой посредством линейной

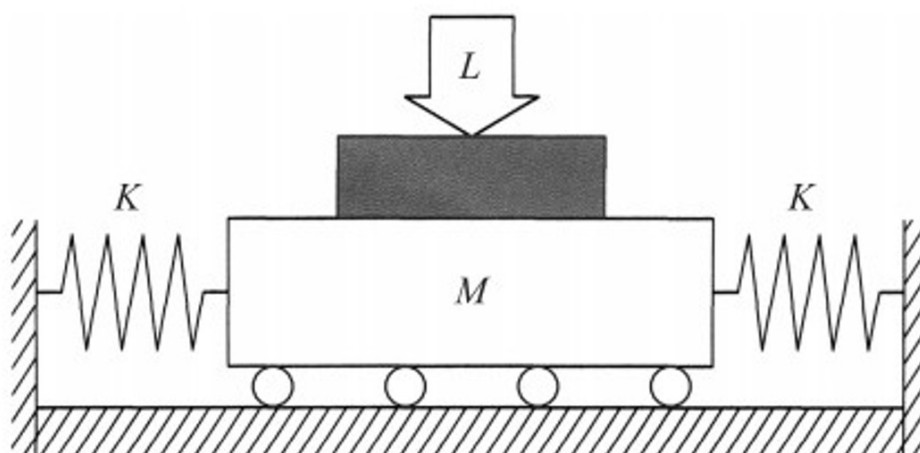


Рис. 3. Схема трибологической системы.

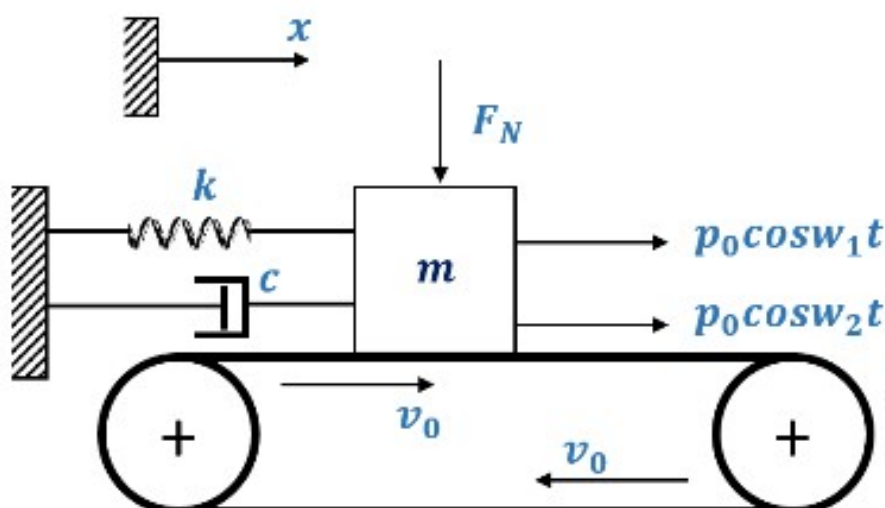


Рис. 4. Модель одностепенного фрикционного осциллятора, возбуждаемого движущимся основанием и двумя движущими силами.

пружины с жесткостью  $k$  и коэффициентом вязкого демпфирования  $c$ . Этот осциллятор скользит или опирается на поверхность горизонтального ремня, движущегося с постоянной скоростью  $v_0$ . Рассмотрим две гармонические движущие силы, действующие на массу с одинаковой амплитудой  $p_0$ , но разными частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ ; эти силы определяются как

$$F_e(t) = p_0 \cos \omega_1 t + p_0 \cos \omega_2 t.$$

Сухое трение между поверхностями может следовать закону Кулона (характеризуемому статическим коэффициентом  $\mu_s$  и меньшим кинетическим коэффициентом  $\mu_k$ ) или другим законам трения. Уравнение движения [1] для такого фрикционного осциллятора:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = -F + F_e(t). \quad (4)$$

Все дифференциальные уравнения (1)–(4) решаются методом Рунге–Кутты. Чтобы сравнить результаты с результатами, полученными другими исследователями, временные шаги в трех случаях были получены соответственно по-разному.

В этих четырех задачах для определения направления силы трения использовалась функция SIGNUM, а в [20–23] был представлен логический алгоритм без использования функции SIGNUM для определения направления силы трения, а также моментов времени начала *stick–slip*. Если перемещения, скорость и ускорение в состоянии прилипания определяются с достаточной точностью, тогда силу трения между трущимися телами, как внутреннюю силу, можно вычислить из уравнения движения для одного из этих тел.

### 3. Результаты и обсуждение

На рисунке 5 показано сравнение результатов лабораторного эксперимента по свободным колебаниям двух тел с сухим трением с решением соответствующей задачи алгоритмом, разработанным авторами [20 – 23]. На рисунке 6 показано сравнение решения задачи, полученные алгоритмом авторов с прямым использованием функции SIGNUM, где виден сдвиг решения, полученного с использованием функции знака относительной скорости тел, относительно правильного решения задачи. При прямом использовании функции знака относительной скорости двух тел состояние их прилипания в процессе движений учитывается неверно, точнее не учитывается. При численном решении задачи величины скоростей представляются числом с плавающей запятой, поэтому фактически скорости двух тел в рассматриваемой задаче не будут равны между собой, и переход к состоянию прилипания должно определяться близостью скоростей с некоторой точностью. Однако, при этом отсутствует условие выхода из состояния прилипания. Во время скольжения система имеет две степени свободы, а при прилипании она переходит в систему с одной степенью свободы. При прилипании тел частота колебаний системы будет другая, потому значение силы инерции также будет другой. В алгоритме решения задачи с прямым использованием функции SIGNUM изменение частоты собственных колебаний системы не учитывается, поэтому и получается искаженное решение. Следовательно, при численном решении задачи необходимо правильно учесть смену состояний прилипания и скольжения [20].

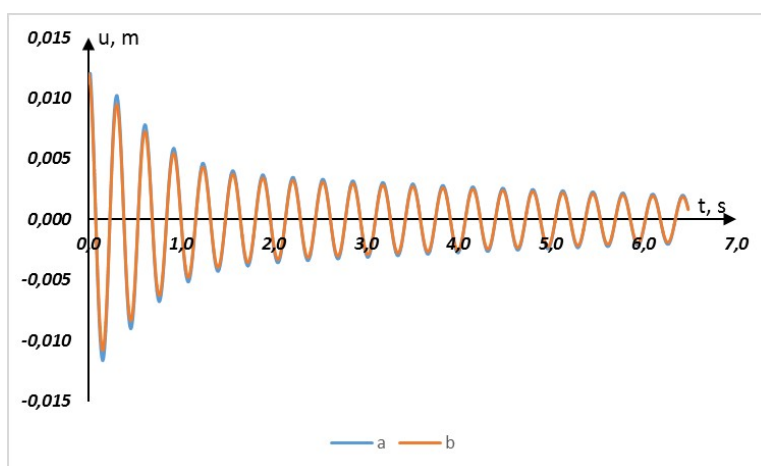


Рис. 5. Сравнение экспериментального перемещения (а) с решением по алгоритму авторов (б).

Сравнение скоростей и ускорений в рассмотренной задаче, полученные этими двумя алгоритмами, так же показал относительный сдвиг решений. Следовательно, величина силы инерции зависит от метода решения задачи, поэтому результаты, полученные разными алгоритмами, будут отличаться. При этом ускорение, вычисленное с

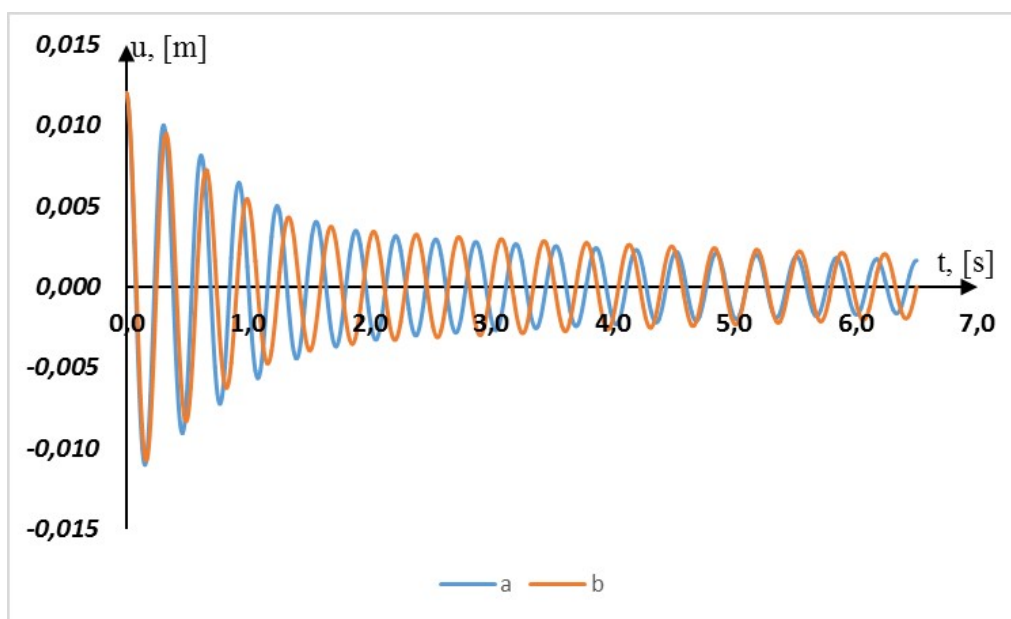


Рис. 6. Сравнение решения задачи использованием функции SIGNUM (a) с решением по алгоритму авторов (b).

использованием функции знака относительной скорости тел, имеет высокочастотное изменение с небольшой амплитудой и периодом  $710^{-4} \text{ s}$ . Построенные по вычисленным результатам, полученных алгоритмом авторов, график ускорения не имеет высокочастотных составляющих. Теперь рассмотрим систему с двумя степенями свободы, симуляционная трибологическая схема которой показана на рис. 2. Построим численные результаты методом Рунге-Кутты для системы уравнений (2) по названным выше двум алгоритмам. Расчеты выполнены для приведенных ниже значений:  $M_1 = 10 \text{ kg}$ ,  $M_2 = 30 \text{ kg}$ ,  $r_1 = r_2 = 1 \text{ Ns/m}$ ,  $r_3 = 3 \text{ Ns/m}$ ,  $k_1 = k_2 = 2 \text{ N/m}$ ,  $k_3 = 6 \text{ N/m}$ ,  $A = 40 \text{ N}$ ,  $\Omega = 3.1 \text{ rad/s}$ ,  $B = \pi \text{ N}$ ,  $\varphi = \pi/6$ ,  $d = 3 \text{ m}$ ,  $t = 0.0001 \text{ s}$ ,  $\mu_k = 0.05$ .

На рис. 7 показаны графики результатов вычислений по приведенным выше двум алгоритмам. Как и для задачи (1), результаты отличаются. Это видно также из рисунков 8 и 9. По алгоритму авторов происходит прилипание двух тел в промежутках времени  $1.5 \text{ s} - 7 \text{ s}$  и далее после  $13 \text{ s}$  (рисунки 7а, 8а и 9а). В остальные промежутки времени происходит скольжение между телами.

В случае использования функции знака относительной скорости двух тел получается несколько другой график (рисунки 7б, 8б и 9б). Очень сильное различие получается для ускорений, вычисленных разными алгоритмами. На рисунке 9б видны высокочастотные составляющие ускорения, которые отсутствуют на рисунке 9а. Изменение величин масс тел приводит к изменению промежутков времени прилипания и скольжения тел. Ошибки вычисления ускорения приводят к неправильным значениям инерционной силы, а это влияет на процесс колебаний системы. Далее рассмотрены движения одномассовой системы из рисунка 3. Для задачи из рисунка 3 при численном решении по заданным в статье [10] исходным данным дополнительное использование логического алгоритма не дает существенных изменений для перемещения и скорости тела, а ускорение, как и в предыдущих задачах, содержит высокочастотные составляющие. Однако такого совпадения для всех значений параметров задачи достичь не удастся без дополнительного использования логического алгоритма. Ниже приведены сравнения численных результатов, полученных по выше приведенным двум алгоритмам при других исходных данных. Ниже, на рисунке 10, приведены графики перемещения и скорости тела при значении  $A = 0.01 \text{ m}$ , при этом остальные исходные данные остались без изменения.

На рисунке 10а видны промежутки времени прилипания и скольжения двух тел. Перемещения и скорости, вычисленные по двум алгоритмам, практически совпадают. Однако, как и в рассмотренных выше задачах, при

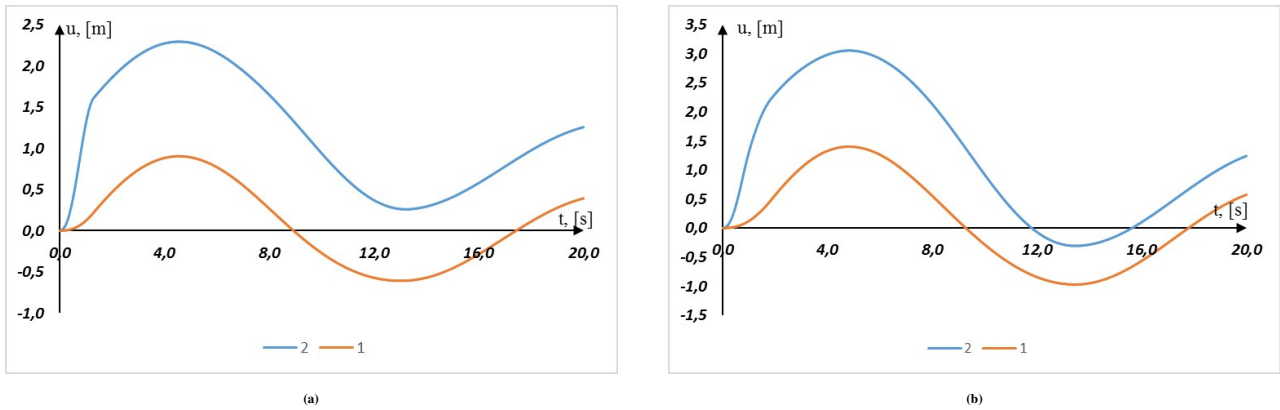


Рис. 7. Сравнение графиков перемещений нижнего тела (1) и верхнего тела (2), полученных: (а) – алгоритмом авторов, (б) – при использовании функции SIGNUM.

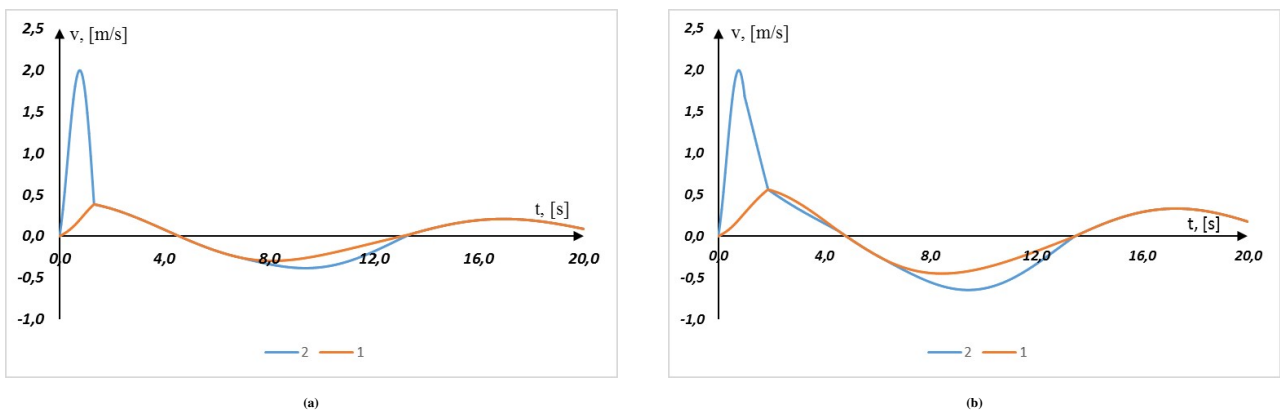


Рис. 8. Сравнение графиков скоростей нижнего тела (1) и верхнего тела (2), полученных: (а) – алгоритмом авторов, (б) – при использовании функции SIGNUM.

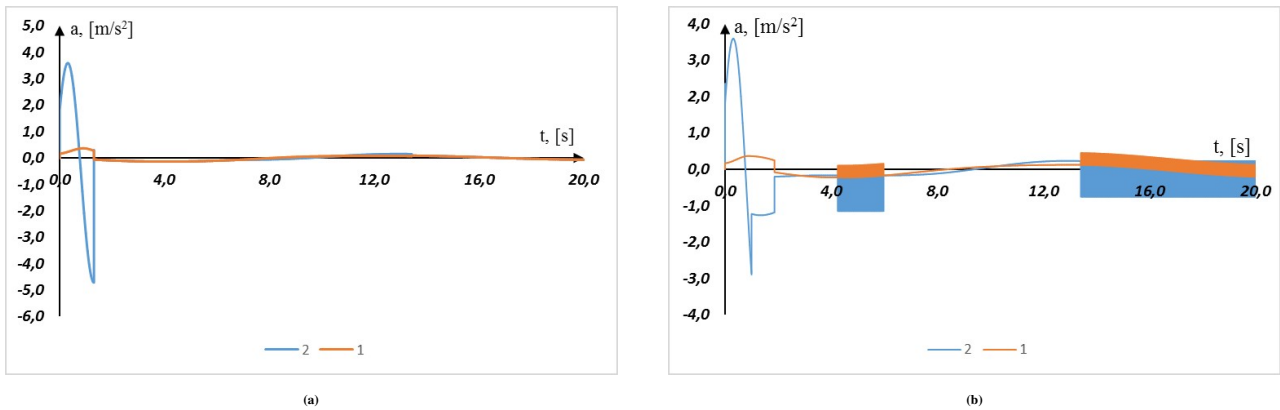


Рис. 9. Сравнение графиков ускорений нижнего тела (1) и верхнего тела (2), полученных: (а) – алгоритмом авторов, (б) – при использовании функции SIGNUM.

использовании различных алгоритмов решения задачи ускорения тел существенно отличаются. Использование функции знака разности скоростей (рисунок 11) приводит к появлению высокочастотных и больших по величине ускорений.

На рисунках 12 и 13а приведены сравнения графиков перемещений, скоростей и ускорений тела, вычисленных по двум алгоритмам при  $A = 0.02 \text{ m}$ . В этом случае на указанных рисунках наблюдаются существенные различия

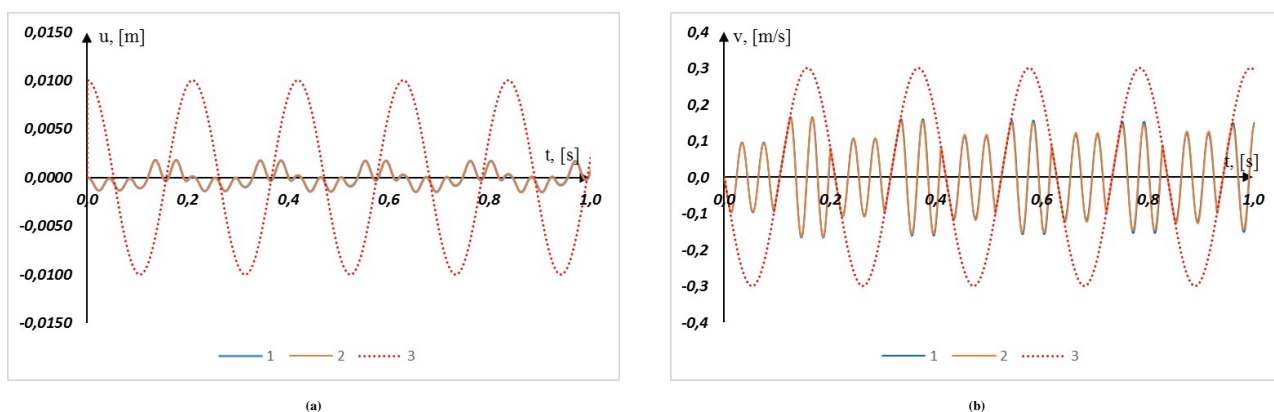


Рис. 10. Сравнение графиков перемещений (а) и скоростей (b) при  $A = 0.01$  м: 1 — с использованием функции SIGNUM; 2 — с использованием алгоритма авторов; 3 — заданные значения для индентора.

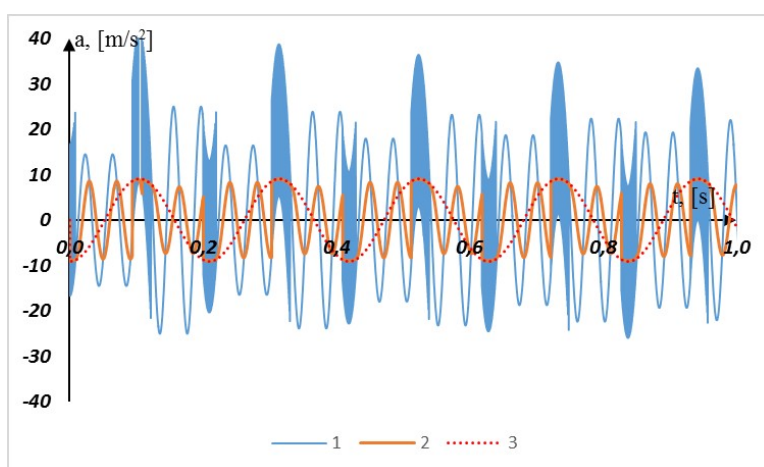


Рис. 11. Сравнение графиков ускорений при  $A = 0.01$  м: 1 — с использованием функции SIGNUM; 2 — с использованием алгоритма авторов; 3 — заданные значения для ускорения индентора.

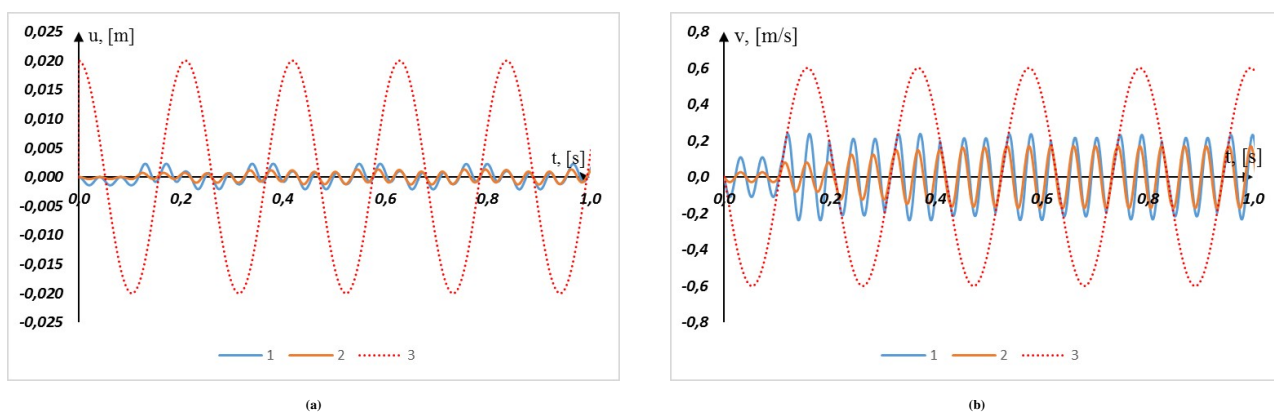


Рис. 12. Сравнение графиков перемещений (а) и скоростей (b) при  $A = 0.02$  м: 1 — с использованием функции SIGNUM; 2 — с использованием алгоритма авторов; 3 — заданные значения для индентора.

полученных результатов. На рисунке 13b приведены сравнения графиков ускорений тела, вычисленных по двум алгоритмам при  $A = 0.02$  м и  $L = 5$  N. В этом случае соотношения ускорений для двух алгоритмов увеличиваются.

На рисунках 14 и 15 приведены сравнения графиков скоростей и ускорений тела при использовании двух

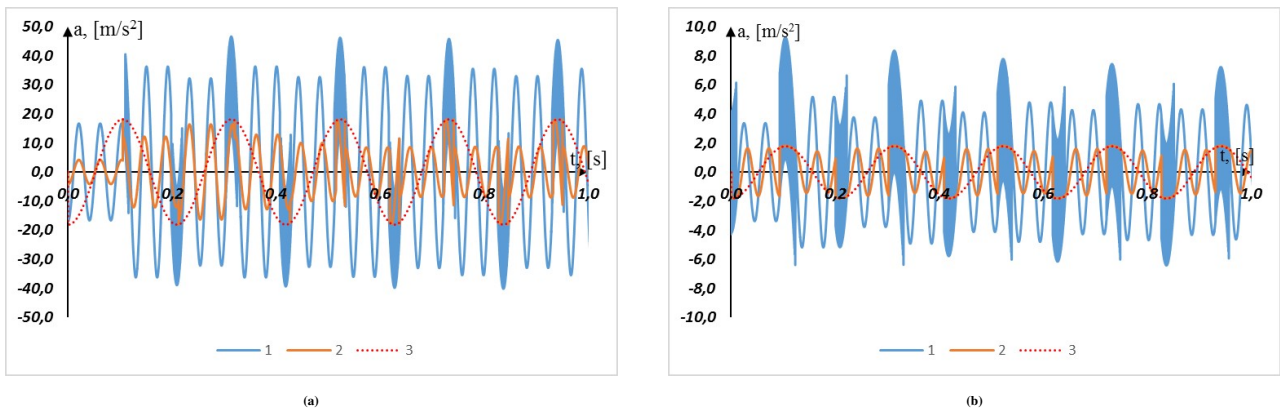


Рис. 13. Сравнение графиков ускорений: (а) — при  $A = 0.02 \text{ m}$ ,  $L = 20 \text{ N}$  и (б) — при  $A = 0.02 \text{ m}$ ,  $L = 5 \text{ N}$ : 1 — с использованием функции SIGNUM; 2 — с использованием алгоритма авторов; 3 — заданные значения для ускорения индентера.

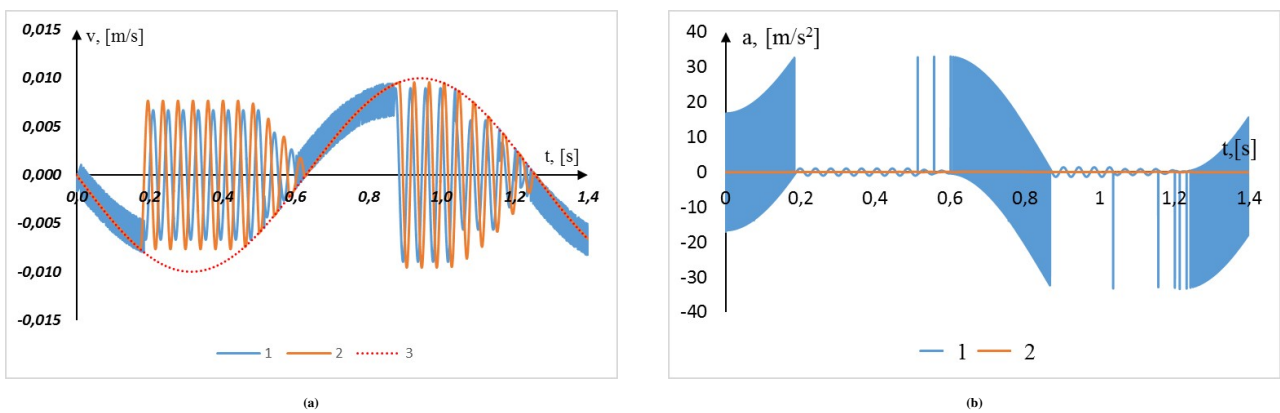
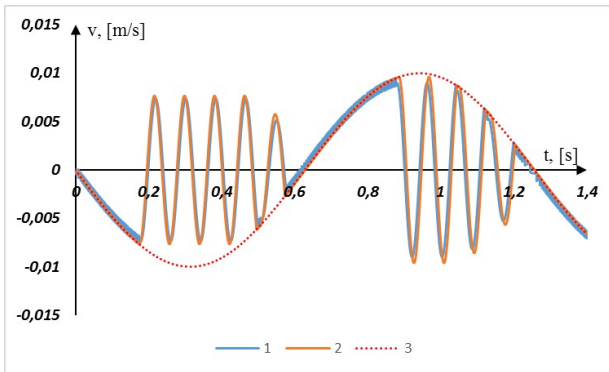
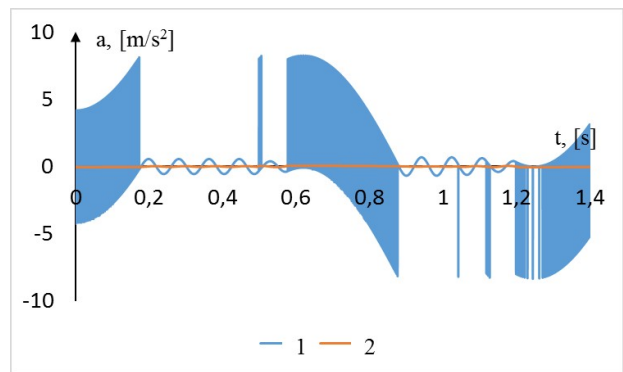


Рис. 14. Сравнение графиков скоростей (а) и ускорений (б) при  $M = 0.6 \text{ kg}$ ,  $A = 0.002 \text{ m}$ ,  $L = 20 \text{ N}$ ,  $\omega = 5 \text{ rad/s}$ : 1 — с использованием функции SIGNUM; 2 — с использованием алгоритма авторов; 3 — заданные значения для индентера.

алгоритмов численного решения задачи. При этом были изменены значения исходных данных для внешней силы, массы тела и частоты движения индентера. На рисунках 14а и 15а видны интервалы времени прилипания и скольжения тела относительно индентера. Из-за малости частоты колебаний индентера величина его ускорения в начале процесса взаимодействия недостаточна для преодоления силы трения на контакте с телом. На этих рисунках видно сильное влияние алгоритма численного решения задачи на результаты. На рисунке 14б максимальное значение ускорения, вычисленное алгоритмом авторов, равно  $0.06 \text{ m/s}^2$ , а при использовании функции относительной скорости равно  $34 \text{ m/s}^2$ . На рис. 15б эти значения соответственно равны  $0.05 \text{ m/s}^2$  и  $8 \text{ m/s}^2$ .

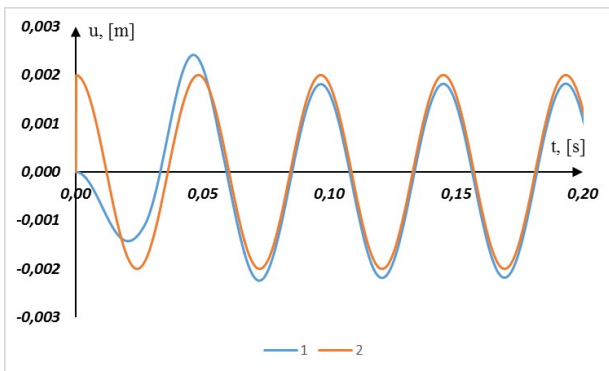


(a)

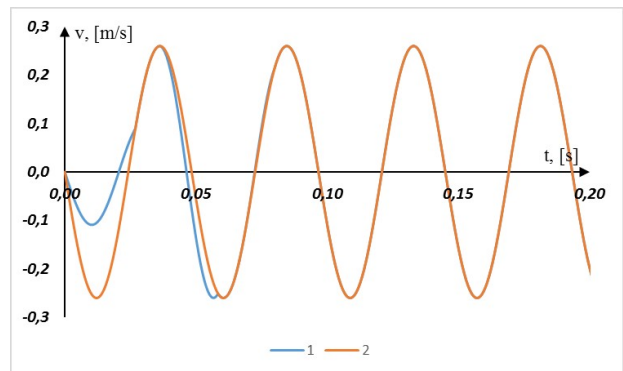


(b)

Рис. 15. Сравнение графиков скоростей (a) и ускорений (b) при  $M = 2.4 \text{ kg}$ ,  $A = 0.002 \text{ m}$ ,  $L = 20 \text{ N}$ ,  $\omega = 5 \text{ rad/s}$ : 1 — с использованием функции SIGNUM; 2 — с использованием алгоритма авторов; 3 — заданные значения для индентора.



(a)



(b)

Рис. 16. Сравнение графиков перемещений (a) и скоростей (b) при  $M = 0.6 \text{ kg}$ ,  $A = 0.002 \text{ m}$ ,  $L = 20 \text{ N}$ ,  $\omega = 130 \text{ rad/s}$ : 1 — перемещение и скорость тела; 2 — перемещение и скорость индентора.

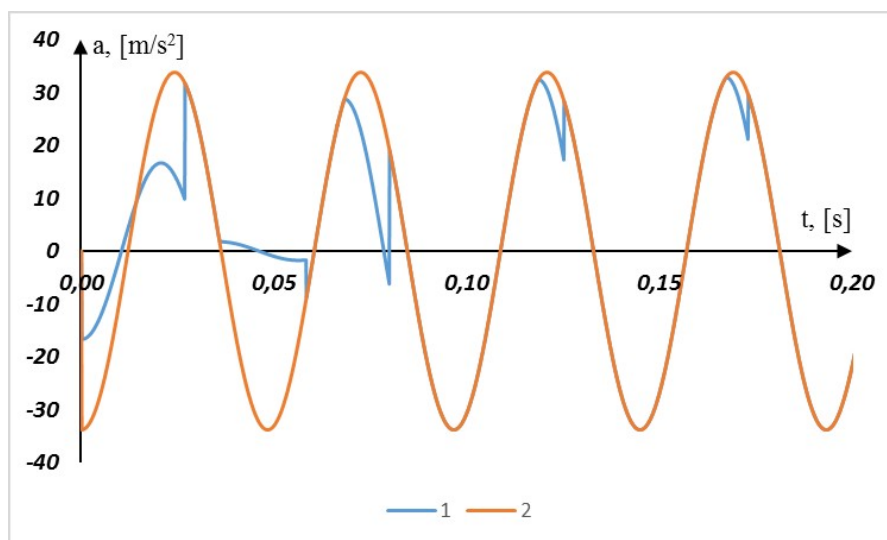


Рис. 17. Сравнение графиков ускорений при  $M = 0.6 \text{ kg}$ ,  $A = 0.002 \text{ m}$ ,  $L = 20 \text{ N}$ ,  $\omega = 130 \text{ rad/s}$ : 1 — ускорение тела; 2 — ускорение индентора.

На рисунках 16 и 17 приведены сравнения графиков перемещений, скоростей и ускорений тела и индентора

при исходных данных из статьи [10] с величиной частоты движения индентора  $\omega = 130 \text{ rad/s}$ . Из рисунков 16b и 17 можно увидеть промежутки времени скольжения и прилипания между индентором и телом. После 0.4 с колебаний система выходит на стационарный режим колебаний в прилиппшем состоянии. Вычисления проводились алгоритмом авторов.

На рисунках 18 и 19 приведены те же сравнения графиков перемещений, скоростей и ускорений тела и индентора при частоте  $\omega = 190 \text{ rad/s}$ . На этой частоте происходит в основном процесс скольжения, а прилипания совершаются в короткие моменты времени. Собственная частота колебаний тела равна  $152.7 \text{ rad/s}$ . Поэтому по достижении стационарного режима колебаний в окрестности этой частоты движение происходит в состоянии прилипания, то есть когда заданная частота движения индентора находится в промежутке  $130 \text{ rad/s} < \omega < 175 \text{ rad/s}$ . Это связано с тем, что тело не успевает получить достаточную инерцию, так как частоты собственных колебаний системы и частота движения индентора близки. При значениях частоты  $\omega > 175 \text{ rad/s}$  имеет место режим *stick-slip*.

Наконец, рассмотрим решение задачи из статьи [1] при безразмерных исходных данных  $\lambda = 0.5$ ,  $\eta = 0.6$ ,

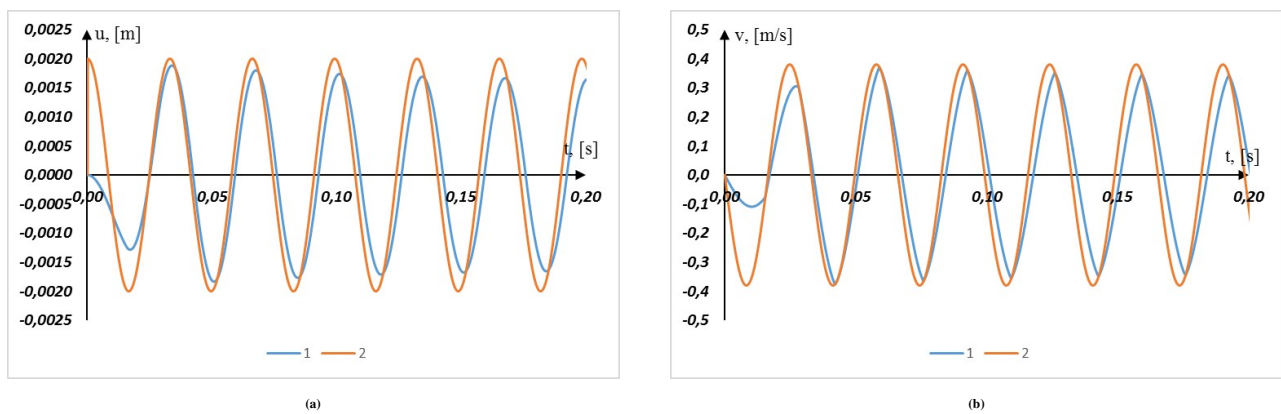


Рис. 18. Сравнение графиков перемещений (a) и скоростей (b) при  $M = 0.6 \text{ kg}$ ,  $A = 0.002 \text{ m}$ ,  $L = 20 \text{ N}$ ,  $\omega = 190 \text{ rad/s}$ : 1 — перемещение и скорость тела; 2 — перемещение и скорость индентора.

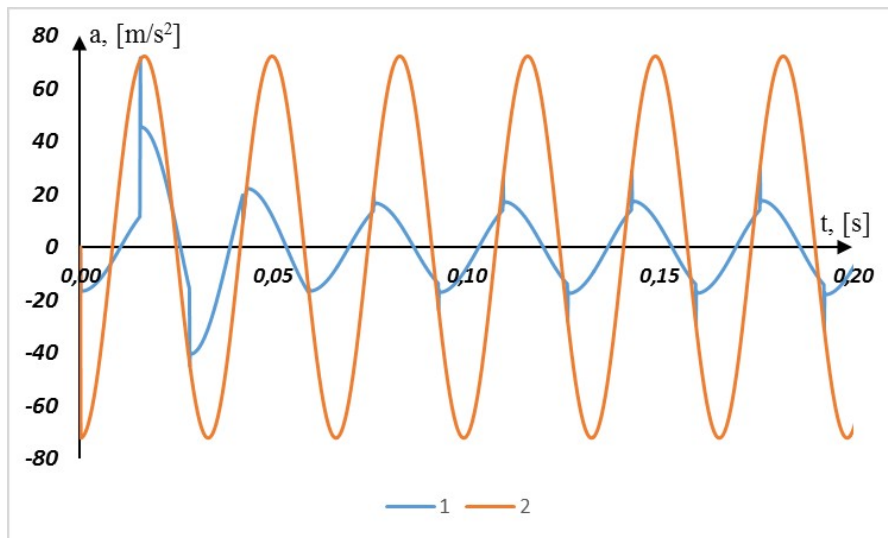


Рис. 19. Сравнение графиков ускорений при  $M = 0.6 \text{ kg}$ ,  $A = 0.002 \text{ m}$ ,  $L = 20 \text{ N}$ ,  $\omega = 190 \text{ rad/s}$ : 1 — ускорение тела; 2 — ускорение индентора.

$V_\nu = 1$ ,  $X_{fk} = 2.5$ ,  $X_{fs} = 4.0$ ,  $b_1 = b_3 = 0$ . Здесь, как и в предыдущих задачах, сравним результаты, полученные двумя разными алгоритмами. На рис. 20 показано изменение скорости тела в зависимости от безразмерного времени, вычисленное по двум алгоритмам. Алгоритм авторов дает хороший результат при  $\tau = 0.04$ , а алгоритм

с использованием функции SIGNUM — только при очень маленьком шаге безразмерного времени.

Графики ускорений, полученные двумя разными алгоритмами, очень сильно различаются. Так, для разных

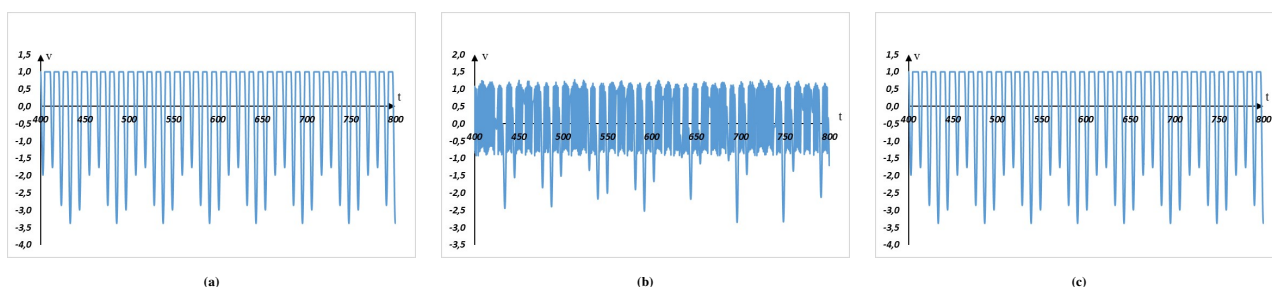


Рис. 20. Скорость движения тела по времени: (а) – алгоритм авторов при  $\tau = 0.04$ , (б) – при использовании функции SIGNUM  $\tau = 0.04$ , (с) – при использовании функции SIGNUM  $\tau = 0.0001$ , для значений  $\nu = 0.2$ ,  $u_0 = 3.05$ .

значений  $\tau$  максимальное безразмерное ускорение, вычисленное алгоритмом авторов, равно 2.5, а по алгоритму с использованием функции SIGNUM – 48. Так же вычисления, проведенные по алгоритму с использованием функции SIGNUM, при разных значениях параметров задачи может привести к ошибочным результатам. Отличие статического и динамического коэффициентов сухого трения [1, 20, 24], а также зависимость коэффициента сухого трения от относительной скорости [1, 24] трущихся тел можно учитывать при использовании алгоритма [20] решения задач. По нашему мнению, статическое значение коэффициента необходимо применять только в начале динамического процесса, а после начала скольжения и последующих прилипания использовать динамическое значение этого коэффициента.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Когда скорости двух трущихся тел равны между собой, тогда эти два тела движутся вместе без скольжения, а сила трения меньше ее предельного значения. В этом случае их надо рассматривать как одно тело до тех пор, пока они не начнут скользить одно тело относительно другого. Однако, при прямом использовании функции SIGNUM без дополнительного анализа механизма возникновения начала скольжения от состояния совместного их движения без скольжения истинного решения задач невозможно найти. Многие исследователи при решении задач с сухим трением обходят этот вопрос, так как функция SIGNUM от идентификатора реальной переменной возвращает ноль, только в том случае если значение реальной переменной точно равно нулю. Во время движения двух тел разность их скоростей в очень редких случаях может быть точно равной нулю, поэтому в процессе слипания-скольжения при численном решении задачи значение силы сухого трения будет равно ее предельного значения. Поэтому такой алгоритм решения нелинейной задачи неправильно сводит решению линейной задачи. Из результатов численного решения различных задач видно, что не всегда прямое использование функции SIGNUM приводит к правильному решению. Неверные значения вычисленных ускорений приводит к неверным значениям силы инерции и в некоторых случаях к ошибочным результатам решения задач.

#### Список литературы

- [1] Ndy Von Kluge, P., Djuidjé Kenmoé, G., Kofané, T. C.: *Modern Mechanical Engineering*. **5**, 28–40 (2015).
- [2] Ndy Von Kluge, P., Djuidjé Kenmoé, G., Kofané, T. C.: *SN Applied Sciences*. **1**, No. 1140 (2019).
- [3] Cao, Y., Chen, X. B.: *Modern Mechanical Engineering*. **5**, 10–19 (2015).
- [4] Awrejcewicz, J., Dzyubak, L.: Thermoelastic contact of a rotating shaft with a rigid bush in conditions of bush wear and stick-slip movements, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*. **4**, 155–160 (2003).
- [5] Awrejcewicz, J., Pyryev, Yu.: *International Journal of Engineering Science*. **40**, 1113–1130 (2002).

- [6] Voldrich, J.: *Applied and Computational Mechanics*. **3**, 241–252 (2009).
- [7] Li, C., Fan, J., Yang, Z., Xue, S.: *Mechanism and Machine Theory*. **135**, 81–108 (2019).
- [8] Flores, P., Lankarani, H. M.: *Contact Force Models for Multibody Dynamics*. Solid Mechanics and Its Applications, Vol. 226, Springer (2016).
- [9] Fan, J., Li, S., Chen, G.: *Mathematical Problems in Engineering*. Article ID 2017 (2017).
- [10] Lyashenko, I. A.: *Technical Physics*. **56**(5), 701–707 (2011).
- [11] Lyashenko, I. A., Zaskoka, A., Khomenko, A. V.: *Tribology Transactions*. **56**, 1019–1026 (2013).
- [12] Yang, C. R., Chiou, Y. C., Lee, R. T.: *Tribology International*. **32**, 443–453 (1999).
- [13] Lyu, X., Shi, Y., Luo, G.: *International Journal of Non-Linear Mechanics*. **138** (2022).
- [14] Tamura, G., Kojima, K., Takewaki, I.: *Heliyon*. **5** (2019).
- [15] Gao, H., Hu, Z., Yin, Z., Lin, G.: *Engineering Analysis with Boundary Elements*. **155**, 351–370 (2023).
- [16] Kim, S.-Y., Lee, C.-H.: *Engineering Structures*. **209**, 110011 (2020).
- [17] Peng, Y., Fan, J.: *Mechanism and Machine Theory*. **175**, 104931 (2022).
- [18] Kabantsev, O. V., Perelmutter, A. V.: *Magazine of Civil Engineering*. **105**(5) (2021).
- [19] Ivanov, A. P.: *Regular and Chaotic Dynamics*. **14**(6), 656–672 (2009).
- [20] Mirzaev, I., Sagdiev, Kh., Yuvmitov, A., Turdiev, M., Egamberdiev, B.: *Facta Universitatis Series: Mechanical Engineering*. **22**(3), 503–512 (2024).
- [21] Mirzaev, I., Turdiev, M.: *AIP Conference Proceedings*. **2432**, 030050 (2022).
- [22] Mirzaev, I. M.: *Soviet Mining Science*. **11**(1), 70–73 (1975).
- [23] Mirzaev, I., Turdiev, M.: *Lecture Notes in Civil Engineering*. Vol. 335, 53–67 (2024).
- [24] Popov, V. L.: *Contact Mechanics and Friction*. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 352 pp. (2017).

## Inertial Effects on the Stick-Slip Behavior of Contacting Bodies Under Dry Friction

Mirzaev I.\*, Turdiev M.S., Djumaev X.J. and Turdiev S.S.

### Abstract

When solving tribological problems using a dry friction model, the SIGNUM function is commonly employed to ascertain the direction of the friction force. The state of adhesion between two bodies is determined by equality of velocities. However, when solving problems numerically, the velocities of the two bodies in contact during oscillation will not actually be exactly equal. Therefore, an additional adhesion condition is necessary. An algorithm must also be developed to determine the onset of sliding of two bodies in dry friction contact. The authors have developed a numerical algorithm for solving dynamic problems involving two absolutely rigid bodies interacting according to the law of dry friction. Based on the results of solving four problems, this article shows that using the SIGNUM function without additional conditions does not always produce reliable results. The results of a laboratory experiment on the free oscillations of two bodies with dry friction are compared with the solutions to the corresponding problems obtained using the authors' algorithms and using algorithms with direct application of the SIGNUM function. The solutions to three problems obtained using the authors' algorithms and the SIGNUM function are compared. It is demonstrated that errors in acceleration calculations lead to inaccurate inertia values, thereby affecting the stick-slip process.

### Keywords

Dry friction; SIGNUM function; stick-slip motion; adhesion condition; numerical algorithm; rigid body dynamics; friction-induced oscillations; acceleration error.

### Affiliations

Mirzayev I.

**Address:** Doctor of physical and mathematical sciences, Professor, Professor of the Department of Applied Mechanics,

Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan.

**e-mail:** [ibrakhim.mirzaev@gmail.com](mailto:ibrakhim.mirzaev@gmail.com)

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0002-8616-9717>

Turdiyev M.S.

**Address:** Associate Professor of the Department of Applied Mechanics, Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan.

**e-mail:** [malikjon..ts@mail.ru](mailto:malikjon..ts@mail.ru)

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0002-2499-0243>

Djumaev X.J.

**Address:** Associate Professor of the Department of Applied Mechanics, Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan.

**e-mail:** [djumaev1959@mail.ru](mailto:djumaev1959@mail.ru)

**ORCID ID:** <https://orcid.org/>

Turdiyev S.S.

**Address:** Assistant of the department of higher mathematics, Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan.

**e-mail:** [s.turdiyev@alumni.nsu.ru](mailto:s.turdiyev@alumni.nsu.ru)

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0003-3599-1716>