Uzbekistan Journal of Mathematics and Computer Science
Volume-1, Issue-2, Page 12–19 (2025)
DOI: https://doi.org/10.56143/ujmcs.v1i2.2
Research article

Негиперболическая траектория квазиневольтерровского кубического стохастического оператора

А. Ю. Хамраев,* Ф.А.Юсупов, А. Р. Дониёров

Аннотация

В данной работе рассматривается динамика квазиневольтерровского кубического стохастического оператора, определённого на двумерном симплексе. Найдено инвариантное множество данного оператора и показано, что он имеет единственную негиперболическую неподвижную точку. Кроме того, построена и использована функция Ляпунова для доказательства того, что множество предельных точек траектории для любой начальной точки является единственным.

Ключевые слова: *кубический стохастический оператор, квазиневольтерровский кубический стохастический оператор, функция Ляпунова, траектория, предельное множество.*

Предметная классификацие AMS (2020): *Основная: 37B25 ; Дополнительная: 37C25, 37C27*

1. Введение

Пусть $E = \{1, 2, ..., m\}$. Под $(m-1)$-мерным симплексом понимается множество

$$S^{m-1} = \left\{ x \in R^m : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \right\}$$

Каждый элемент $x \in S^{m-1}$ является вероятностной мерой на множестве E и, следовательно, может рассматриваться как состояние биологической (физической и иной) системы, состоящей из m элементов.

Кубическим стохастическим оператором называется отображение $V : S^{m-1} \to S^{m-1}$ вида

$$V : x'_l = \sum_{i,j,k=1}^{m} p_{ijk,l} x_i x_j x_k, \quad l \in E \tag{1.1}$$

где $p_{ijk,l}$ — коэффициенты наследственности, удовлетворяющие условиям

$$p_{ijk,l} \geq 0, \text{ для всех} \sum_{l=1}^{m} p_{ijk,l} = 1, \text{ для всех } i, j, k \in E \tag{1.2}$$

и не изменяются при перестановках индексов i, j, k (в случае отсутствия половой дифференциации).

Для заданной начальной точки $x^{(0)}$ траектория $\{x^{(n)}\}_{n \geq 0}$ определяется итерацией:

$$x^{(n+1)} = V(x^{(n)}), \; n = 0, 1, 2, ...$$

Received : *15–june–2025,* ***Accepted :*** *17–november–2025*
**** Corresponding author***

Одной из основных задач математической биологии является изучение асимптотического поведения таких траекторий. Следует отметить, что даже в двумерном случае эта задача в общем виде остаётся открытой.

Авторы работ [7, 8, 14, 15, 16, 18, 19, 20] предложили различные модели популяционной динамики. В работе [16] данная задача была рассмотрена для класса вольтерровских кубических стохастических операторов (CSO). Невольтерровский кубический стохастический оператор определяется соотношениями (1.1), (1.2) и дополнительным предположением

$$p_{ij,k} = 0,\ l \in \{i, j, k\},\ \text{для всех } i, j, k \in E.$$

В работе [18] был введён и исследован кубический стохастический оператор (CSO). Кубический стохастический оператор, являющийся выпуклой комбинацией регулярных и неэргодических операторов, был изучен в [11]. Случайная динамика вольтерровских кубических стохастических операторов рассматривалась в [5]. В работе [17] авторами был построен кубический стохастический оператор. Класс невольтерровских кубических стохастических операторов, называемый классом условных кубических стохастических операторов, был исследован в [2]. Если для заданных коэффициентов оператора выполняется следующее условие:

$$p_{iii,i} > 0,\ \text{для всех } i \in E$$

то оператор такого вида называется квазивольтерровским кубическим стохастическим оператором.

В настоящей работе рассматриваются квазиневольтерровские кубические стохастические операторы, заданные на двумерном симплексе.

В разделе 2 приводятся необходимые определения. В разделе 3 проводится анализ квазиневольтерровского кубического стохастического оператора путём нахождения его инвариантного множества, неподвижных точек и исследования типов этих неподвижных точек. Показано, что любая траектория, начинающаяся в симплексе, сходится к неподвижной точке, что, в свою очередь, означает регулярность данного оператора.

2. Предварительные сведения

Точка $x \in S^{m-1}$ называется неподвижной точкой КСО V, если $V(x) = x$. Множество всех неподвижных точек обозначается через $Fix\{V\}$.

Определение 2.1. Кубический стохастический оператор V называется регулярным, если для любой начальной точки $x \in S^{m-1}$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty} V^n(x).$$

Пусть $DV(x^*) = (\partial V_i/\partial x_j)(x^*)$— якобиан оператора V в точке x^*.

Определение 2.2. Неподвижная точка x^* называется гиперболической, если якобиан $DV(x^*)$ не имеет собственных значений на единичной окружности.

Определение 2.3. Гиперболическая неподвижная точка называется:
i) притягивающей, если все собственные значения лежат внутри единичного круга;
ii) отталкивающей, если все лежат вне замкнутого единичного круга;
iii) седловой — в противном случае.

Определение 2.4. Непрерывная функция $\varphi : S^{m-1} \to R$ называется функцией Ляпунова для оператора V, если существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(x^{(n)}), \forall x \in S^{m-1}.$$

Если $\varphi(x^{(n)}) \to c$ то ω-предельное множество траектории содержится в уровне $\varphi^{-1}(c)$.

Внутренность симплекса S^2 определяется как

$$intS^2 = \{x \in S^2 : x_1x_2x_3 > 0\},$$

а его граница – как $\partial S^2 = S^2 \backslash intS^2$.

3. Основные результаты

Рассматривается следующий квазиневольтерровский кубический стохастический оператор на двумерном симплексе:

$$V: \begin{cases} x' = \frac{x^3+y^3+z^3}{3} + 3x^2y + 3y^2z + 2xyz; \\ y' = \frac{x^3+y^3+z^3}{3} + 3xy^2 + 3x^2z + 2xyz; \\ z' = \frac{x^3+y^3+z^3}{3} + 3z^2y + 3z^2x + 2xyz. \end{cases} \tag{3.1}$$

Нетрудно видеть, что оператор V является квазиневольтерровским кубическим стохастическим оператором.

Рассмотрим разность

$$x' - y' = 3(x-y)(xy - z(x+y)) \tag{3.2}$$

Из этого следует, что множество

$$M = \{x \in S^2 : x = y\}$$

является инвариантным относительно оператора (3.1).

Сначала найдём неподвижные точки данного оператора. Неподвижные точки оператора V определяются следующим образом:

$$\begin{cases} x = \frac{x^3+y^3+z^3}{3} + 3x^2y + 3y^2z + 2xyz; \\ y = \frac{x^3+y^3+z^3}{3} + 3xy^2 + 3x^2z + 2xyz; \\ z = \frac{x^3+y^3+z^3}{3} + 3z^2y + 3z^2x + 2xyz; \end{cases} \tag{3.3}$$

что означает решение данной системы уравнений.

Полученное уравнение проанализируем, разбив его на два случая:

$$x - y = 0, 3xy - 3z(x+y) - 1 \neq 0, \tag{3.4a}$$

$$x - y \neq 0, 3xy - 3z(x+y) - 1 = 0, \tag{3.4b}$$

Сначала рассмотрим случай (3.4a). Используя условие $x = y$ ервом уравнении оператора (3.1), получаем следующую функцию:

$$x' = f(x) = -\frac{1}{3}(3x-1)^3 + x, x \in [0;1].$$

Неподвижная точка функции $f(x)$ равна $x^* = \frac{1}{3}$, что легко проверить. Нетрудно также убедиться, что $|f'(x^*)| = 1$. Следовательно, точка x^* является негиперболической неподвижной точкой.

Теорема 3.1. *Пусть x^* — неподвижная точка разностного уравнения $x_{n+1} = f(x_n)$ где $f \in C^3(R)$ и $f'(x^*) = 1$. Тогда справедливы следующие утверждения:*
(i) Если $f''(x^*) \neq 0$ то точка x^* является неустойчивой;
(ii) Если $f''(x^*) = 0$ и $f'''(x^*) > 0$, то точка x^* является неустойчивой;
(iii) Если $f''(x^*) = 0$ и $f'''(x^*) < 0$ то точка x^* является асимптотически устойчивой.

Согласно Теореме 3.1, точка x^* является асимптотически устойчивой неподвижной точкой.

Теперь проанализируем уравнение (3.4b):

$$3xy - 3z(x+y) - 1 = 0 \Rightarrow 3xy - 3(1-(x+y))(x+y) - 1 = 0$$

Отсюда получаем

$$3y^2 + 3(3x-1)y + 3x^2 - 3x - 1 = 0$$

Решая это квадратное уравнение относительно y, получаем два решения:

$$y_1 = \frac{3(1-3x) + \sqrt{45x^2 - 18x + 21}}{6}, y_2 = \frac{3(1-3x) - \sqrt{45x^2 - 18x + 21}}{6} \tag{3.5}$$

Поскольку $y_2 < 0$ это решение не принадлежит симплексу, а так как $x + y_1 > 1$ то и первое решение также не принадлежит симплексу. Следовательно, уравнение (3.4b) не имеет решений в симплексе.

Из случая (3.4a) и условия $x = \frac{1}{3}$ получаем, что точка $c = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ является единственной неподвижной точкой оператора.

Для определения типа неподвижной точки перепишем оператор (3.1) в виде двумерного отображения:

$$f(x,y) = \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + (1-x-y)^3) + 3x^2y + 3y^2(1-x-y) + 2xy(1-x-y) \tag{3.6a}$$

$$g(x,y) = \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + (1-x-y)^3) + 3xy^2 + 3x^2(1-x-y) + 2xy(1-x-y) \tag{3.6b}$$

Найдём частные производные функций (3.6a) и (3.6b):

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{3}(3x^2 - 3(1-x-y)^2) + 6xy - 3y^2 + 2y(1-x-y) - 2xy,$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{3}(3y^2 - 3(1-x-y)^2) + 3x^2 + 6y(1-x-y) - 3y^2 + 2x(1-x-y) - 2xy,$$

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{3}(3x^2 - 3(1-x-y)^2) + 3y^2 + 6x(1-x-y) - 3x^2 + 2y(1-x-y) - 2xy,$$

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{3}(3y^2 - 3(1-x-y)^2) + 6xy - 3x^2 + 2x(1-x-y) - 2xy.$$

В неподвижной точке $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ эти производные принимают следующие значения:

$$\frac{\partial f(x;y)}{\partial x}\Big|_{\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{3}, \frac{\partial f(x;y)}{\partial y}\Big|_{\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)} = \frac{2}{3}, \frac{\partial g(x;y)}{\partial x}\Big|_{\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)} = \frac{2}{3}, \frac{\partial g(x;y)}{\partial x}\Big|_{\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{3} \tag{3.7}$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} - \lambda & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{3.8}$$

Из последнего равенства получаем собственные значения: $|\lambda_1| = \frac{1}{3}, |\lambda_2| = 1$ Следовательно, точка c является негиперболической.

Лемма 3.1. *Пусть* $\varphi : S^2 \to R$ *задано формулой* $\varphi(x) = 3xy - 3z(x+y)$. *Тогда выполняется неравенство* $|\varphi(x)| < \frac{3}{4}$.

Доказательство. По неравенству $AM - GM$ имеем

$$0 < z(x+y) \leq \left(\frac{3(x+y+z)}{3 \cdot 2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

откуда

$$xy - \frac{1}{4} \le xy - z(x+y) < xy < \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \left(\frac{1-z}{2}\right)^2$$

и, следовательно

$$3\left(xy - \frac{1}{4}\right) \le 3(xy - 3z(x+y)) < \frac{3}{4}.$$

Лемма доказана.

Рассмотрим непрерывную функцию $\varphi : intS^2 \to R$, определённую как $\varphi(x) = |x-y|$. Так как $V(\partial S^2) \subset intS^2$ далее рассматривается только внутренняя часть симплекса.

Из Леммы 3.1 получаем

$$\varphi(x') = |x' - y'| = |x-y| \cdot |3xy - 3z(x+y)| = \varphi(x) \cdot |3xy - 3z(x+y)| < \frac{3}{4} \cdot \varphi(x). \tag{3.9}$$

Следовательно, функция $\varphi(x)$ является функцией Ляпунова.

Лемма 3.2. *Для любой начальной точки $x^{(0)} \in S^2$, если определить последовательность $\varphi(x^{(n+1)}) = \varphi(V^n(x^{(n)}))$, то*

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(x^{(n)}) = 0. \tag{3.10}$$

Доказательство. Из (3.9) следует

$$\varphi(x^{(n+1)}) < \frac{3}{4}\varphi(x^{(n)}) < ... < \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \varphi(x^{(0)}),$$

откуда и вытекает предел (3.10).

Из этого следует, что траектория любой точки сходится к медиане симплекса, которая является инвариантной.

Инвариантное множество можно записать в виде

$$M = \left\{x \in S^2 : x = y\right\} = \left\{(x;x;1-2x) : x \in \left[0;\frac{1}{2}\right]\right\}.$$

Лемма 3.3. *Для любой начальной точки $x \in [0, \frac{1}{2}]$ выполняется*

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = \frac{1}{3}. \tag{3.11}$$

Доказательство. Найдём точки экстремума функции $f(x)$.

$$f'(x) = -3(3x-1)^2 + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{3\sqrt{3}},\ x_2 = \frac{\sqrt{3}+1}{3\sqrt{3}}.$$

Поскольку $x_2 > \frac{1}{2}$ эта точка не принадлежит отрезку $\left[0; \frac{1}{2}\right]$. Функция $f(x)$ убывает на отрезке $[0; x_1]$ и возрастает на $[x_1; 0.5]$. Разобьём отрезок $[0; 0.5]$ на три части:

$$I_1 = [0; x_1], I_2 = [x_1; x^*), I_3 = (x^*; 0.5]$$

где $x^* = \frac{1}{3}$.

1) Случай $x \in I_2$ Легко проверить, что $f(x) - x = -\frac{1}{3}(3x-1)^3 > 0, \forall x \in I_2$. Следовательно,

$$f^{(n+1)}(x) > f^n(x), n = 0, 1, 2, ...$$

то есть последовательность $\{f^n(x)\}$ монотонно возрастает. Так как она ограничена, существует предел, и потому

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = \frac{1}{3}, \forall x \in I_2.$$

2) Случай $x \in I_1$. Так как $f(0) = \frac{1}{3}$ и функция $f(x)$ убывает на данном интервале, имеем

$$f(x_1) < f(x) < f(0) = \frac{1}{3}.$$

Следовательно, для любого $x \in I_1$ его образ $f(x)$ попадает в интервал I_2 и потому по предыдущему пункту $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x) = \frac{1}{3}$.

3) Случай $x \in I_3$. На этом интервале функция $f(x)$ убывает и ограничена снизу. Из неравенства

$$f(x) - x = -\frac{1}{3}(3x-1)^3 < 0$$

следует, что

$$f^{n+1}(x) < f^n(x), n = 0, 1, 2, ...$$

то есть последовательность $\{f^n(x)\}$ монотонно убывает. Поскольку она ограничена, существует предел, и потому

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = \frac{1}{3}, \forall x \in I_3.$$

Таким образом, для любого $x \in [0; \frac{1}{2}]$ выполняется

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = \frac{1}{3}.$$

Лемма доказана.

Принимая во внимание, что доказательство приведённой ниже теоремы непосредственно следует из вышеуказанных лемм, приводим формулировку теоремы без доказательства.

Теорема 3.2. *Для любой начальной точки* $x^{(0)} \in S^2 \backslash Fix\{V\}$ *справедливо*

$$\lim_{n\to\infty} V^n\left(x^{(0)}\right) = c = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right).$$

4. Заключение

В настоящей работе исследовано динамическое поведение квазиневольтерровского кубического стохастического оператора, действующего на двумерном симплексе. Установлено, что данный оператор обладает единственной негиперболической неподвижной точкой. Посредством построения функции Ляпунова и анализа глобальных динамических свойств оператора доказано, что траектория, порождённая любой начальной точкой, сходится к центру симплекса.

В целом полученные результаты вносят вклад в более глубокое понимание стохастических моделей более высокого порядка в теории динамики популяций, в особенности моделей, отклоняющихся от классической вольтерровской схемы. В дальнейшем представляется целесообразным исследовать бифуркационные явления, а также глобальный фазовый портрет подобных операторов с целью получения более полного и всестороннего представления об их динамических свойствах.

Настоящее исследование выполнено в рамках фундаментального и прикладного научно-исследовательского проекта № AL-9224093956-R5 «Dynamics and Applications of Cubic Stochastic Operators» («Динамика и приложения кубических стохастических операторов»).

Благодарность

Авторы выражают искреннюю благодарность академику У. А. Розикову, доктору физико-математических наук, академику Академии наук Республики Узбекистан, за ценные рекомендации и консультации, оказанные при подготовке настоящей статьи.

Список литературы

[1] Kouichi Murakami, Stability for non-hybrbolic fixed points of scalar differense equations, *J. Math Anal. Appl.* 310(2005) 492-505

[2] Davronov R. R., Jamilov (Zhamilov) U. U. and Ladra M. Conditional cubic stochastic operator. *J. Difference Equ. Appl.*, 2015, vol. 21, no. 12, pp. 1163–1170. DOI: 10.1080/10236198.2015.1062481.

[3] Devaney R.L., An introduction to chaotic dynamical systems, (Studies in Nonlinearity), Westview Press, Boulder, 2003, reprint of the second (1989) edition.

[4] Freedman H. I. and Waltman P. Persistence in models of three interacting predator-prey populations. *Math. Biosci.*, 1984, vol. 68, no. 2, pp. 1 213–231. DOI: 10.1016/0025-5564(84)90032-4

[5] Homburg A. J., Jamilov U. U. and Scheutzow M. Asymptotics for a class of iterated random cubic operators. *Nonlinearity*, 2019, vol. 32, no. 10. pp. 3646–3660. DOI: 10.1088/1361-6544/ab1f24.

[6] Jamilov U. U. Khamraev A. Yu. and Ladra M. On a Volterra cubic stochastic operator. *Bull. Math. Biol.*, 2018, vol. 80, no. 2, pp. 319–334. DOI: 10.1007/s11538-017-0376-0.

[7] Jamilov U. U. Khamraev A. Yu. On dynamics of Volterra and non-Volterra cubic stochastic operators. *Bull. Math. Biol.*, 2022, vol. 37, no. 1, pp. 66–82. DOI: 10.1080/14689367.2021.2006150

[8] Khamraev A. Yu. Makhmatkobilov N. P. On the dynamics of a quasi-strictly non-Volterra cubic stochastic operator *Bull. Math. Biol.*, 2025, vol. 15, no. 1, DOI: 10.62476/jcam.151.1

[9] Jamilov U. U. and Ladra M. On identically distributed non-Volterra cubic stochastic operator. *Jour. Appl. Nonlin. Dyn.*, 2017, vol. 6, no. 1, pp. 79–90. DOI: 10.5890/JAND.2017.03.006.

[10] Jamilov U. U. and Reinfelds A. On constrained Volterra cubic stochastic operators. *J. Difference Equ. Appl.*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 261–274. DOI: 10.1080/10236198.2020.1720664.

[11] Jamilov U. U. and Reinfelds A. A family of Volterra cubic stochastic operators. *Journal Convex Analysis*, 2021, vol. 28, no. 1, pp. 19–30. DOI: https://www.heldermann.de/JCA/JCA28/JCA281/jca28003.html

[12] Mukhamedov F. M., Embong A. F. and Rosli A. Orthogonal preserving and surjective cubic stochastic operators. *Ann. Funs. Anal.* 2017, vol. 8, no. 4, pp. 490–501. DOI: 10.1215/20088752-2017-0013.

[13] Mukhamedov F. M., Pah C. H. and Rosli A. On non-ergodic Volterra cubic stochastic operators. *Qual. Theory Dyn. Syst.* 2019, vol. 18, no. 3, pp. 1225–1235. DOI: 10.1007/s12346-019-00334-8.

[14] Mukhamedov F., Embong A.F., Rosli A. Orthogonal-preserving and surjective cubic stochastic operators *Ann. Funct. Anal.* 2019, vol. 8, no. 4, pp. 490–501. DOI: 10.1215/20088752-2017-0013.

[15] Rozikov U. A. Population dynamics: algebraic and probabilistic approach. *World Sci Publ.*, p. 460., Singapore (2020)

[16] Rozikov U. A. and Khamraev A. Yu. On cubic operators defined on finite-dimensional simplices. *Ukrainian Math. J.*, 2004, vol. 56, no. 10, pp. 1699–1711. DOI: 10.1007/s11253-005-0145-3.

[17] Rozikov U. A. and Khamraev A. Yu. On construction and a class of non-Volterra cubic stochastic operators. *Nonlinear Dyn. Syst. Theory.*, 2014, vol. 14, no. 1, pp. 92–100.

[18] Khamraev A. Yu. On cubic operators of Volterra type. *Uzbek. Math. Zh.*, 2004, no. 2, pp. 79–84. (in Russian)

[19] Khamraev A. Yu. A condition for the uniqueness of a fixed point for cubic operators. *Uzbek. Math. Zh.*, 2005, no. 1, pp. 79–87. (in Russian)

[20] Khamraev A. Yu. On a Volterra-type cubic operator. *Uzbek. Math. Zh.*, 2009, no. 3. pp. 65–71. (in Russian)

[21] Khamraev A. Yu. and Tursunova A. Kh. *Prob. Comp. App. Math.* Full description of the behavior of trajectories of a cubic operator. 2020, vol. 2, no. 26, pp. 32–38. (in Russian)

Non-hyperbolic trajectory of a quasi-non-Volterra cubic stochastic operator

A. Y. Khamrayev, F.A.Yusupov and A.R. Doniyorov

Abstract

In this paper, we consider the dynamics of a quasi-non-Volterra cubic stochastic operator defined on the 2D simplex. We find the invariant set of this operator and show that it has a unique non-hyperbolic fixed point. Furthermore, we construct and use the Lyapunov function to prove that the set of limit points of a trajectory for any initial point is unique.

Affiliations

A. Y. KHAMRAYEV
Address: Karshi State University, Karshi. Uzbekistan.
e-mail: khamrayev-ay@yandex.ru
ORCID ID:0009-0005-4858-9285

F.A.YUSUPOV
Address: Tashkent State Transport University, Tashkent. Uzbekistan
e-mail: farrukhyusupovchambil@mail.ru
ORCID ID: 0000-0003-1909-6420

A. R. DONIYOROV
Address: Karshi State University, Karshi. Uzbekistan.
ORCID ID:0009-0005-5310-1256