Uzbekistan Journal of Mathematics and Computer Science
Volume-1, Issue-2, Page 136–145 (2025)
DOI: https://doi.org/10.56143/ujmcs.v1i2.15
Research article

p-Конвексификация симметричных пространств Банаха-Канторовича

Чилин В.И., Закирова Г.Б.*

Аннотация

Пусть B произвольная полная булева алгебра, $Q(B)$ стоуновский компакт, соответствующий булевой алгебре B, и $C_\infty(Q(B))$ алгебра всех непрерывных функций $x : Q(B) \to [-\infty, +\infty]$, определенных на $Q(B)$ и принимающих значения $\pm\infty$ лишь на нигде не плотных множествах из $Q(B)$. Пусть $(E, \|\cdot\|_E) \subset C_\infty(Q(B))$ решеточно нормированное пространство над алгеброй $L^0(\Omega)$ всех классов равных почти всюду действительных измеримых функций, заданных на измеримом пространстве (Ω, Σ, μ) с σ-конечной числовой мерой μ. В работе рассматривается p-конвексификация решеточно нормированных пространств и доказывается, что p-конвексификация $(E^p, \|\cdot\|_{E^p})$ симметричного пространства Банаха-Канторовича $(E, \|\cdot\|_E)$ над $L^0(\Omega)$ является симметричным пространством Банаха-Канторовича над $L^0(\Omega)$. Устанавливается, что $L^0(\Omega)$-значная норма в пространстве $(E^p, \|\cdot\|_{E^p})$ обладает свойством Фату или свойством порядковой непрерывности, в том случае, когда этим свойством обладает $L^0(\Omega)$-значная норма в пространстве $(E, \|\cdot\|_E)$.

Ключевые слова: *p-конвексификация, мера Магарам, пространство Банаха-Канторовича, симметричные пространства.*

Предметная классификаце AMS (2020): *Основная: 00A00 ; Дополнительная: 00B00; 00C00; 00D00; 00E00; 00F00.*

Введение

Одним из важных инструментов в изучении изоморфных свойств банаховых решеток играют понятия p-выпуклости и q-вогнутости этих решеток. В частности, эти понятия активно используются при изучении равномерной выпуклости банаховых решеток, а также при исследовании свойств симметричных функциональных пространств (см. например,[1]). В работе [1] дана общая процедура построения p-выпуклых и q-вогнутых решеток, отправляясь от произвольной банаховой решетки, а именно, для заданной банаховой решетки X определяется ее p-конвекцификация X^p. В случае когда X является банаховой решеткой функций, множество X^p можно отождествить с пространством всех функций f, для которых $|f|^p \in X$, снабженным нормой $\|f\|_{X^p} = \||f|\|_X^{\frac{1}{p}}$. Известно, что для банаховой решетки $(X, \|\cdot\|_X)$ ее p-конвекцификация $(X^p, \|\cdot\|_{X^p})$ также является банаховой решеткой. Кроме того, такие свойства как порядковая непрерывность нормы и свойство Фату переходят от X к X^p.

Развитие теории пространств Банаха-Канторовича естественно предполагает введение и изучение свойств p-выпуклости и q-вогнутости этих пространств.

Received : *9–сентябрь–2025,* ***Accepted :*** *30–ноябрь–2025*
**** Corresponding author***

Пусть B произвольная полная булева алгебра и $Q(B)$ стоуновский компакт, соответствующий булевой алгебре B. Обозначим через $L^0(B)$ алгебру $C_\infty(Q(B))$ всех непрерывных функций $x : Q(B) \to [-\infty, +\infty]$, определенных на $Q(B)$ и принимающих значения $\pm\infty$ лишь на нигде не плотных множествах из $Q(B)$.

Пусть $(E, \|\cdot\|_E) \subset L^0(B)$ решеточно нормированное пространство над алгеброй $L^0(\Omega)$ всех классов равных почти всюду действительных измеримых функций, заданных на измеримом пространстве (Ω, Σ, μ) с σ-конечной числовой мерой μ. В работе [7] была определена p-конвексификация решеточно нормированного пространства $(E, \|\cdot\|_E)$ и было доказано, что, если $(E, \|\cdot\|_E)$ является решеткой Банаха-Канторовича над $L^0(\Omega)$, то его p-конвексификация $(E^p, \|\cdot\|_{E^p})$ также является решеткой Банаха-Канторовича над $L^0(\Omega)$. В настоящей работе продолжается изучение свойств p-конвексификации решеточно нормированных пространств над $L^0(\Omega)$. Доказывается, что если $(E, \|\cdot\|_E)$ является симметричным пространством Банаха-Канторовича над $L^0(\Omega)$, тогда его p-конвексификация $(E^p, \|\cdot\|_{E^p})$ также является симметричным пространством Банаха-Канторовича над $L^0(\Omega)$. Устанавливается, что $L^0(\Omega)$-норма в пространстве $(E^p, \|\cdot\|_{E^p})$ обладает свойством Фату или свойством порядковой непрерывности, в том случае, когда этим свойством обладает $L^0(\Omega)$-норма в пространстве $(E, \|\cdot\|_E)$.

Используются терминология и обозначения теории булевых алгебр из [8], теории векторных решеток из [9], теории векторного интегрирования и теории пространств Банаха-Канторовича из [5], а также терминология общей теории банаховых решеток из [1], [10].

1. Предварительные сведения

Пусть (Ω, Σ, μ) измеримое пространство с σ-конечной мерой, $L^0(\Omega) = L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ алгебра всех классов равных почти всюду действительных измеримых функций на (Ω, Σ, μ). Относительно естественного частичного порядка $f \le g \Leftrightarrow g - f \ge 0$ почти всюду, алгебра $L^0(\Omega)$ является порядково полной векторной решеткой (K-пространством) со слабой единицей $\mathbf{1}(\omega) \equiv 1$, а множество $B(\Omega)$ всех идемпотентов из $L^0(\Omega)$ образует полную булеву алгебру относительного частичного порядка, индуцируемого из $L^0(\Omega)$.

Пусть X векторное пространство над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел. Отображение $\|\cdot\| : X \to L^0(\Omega)$ называют $L^0(\Omega)$-значной нормой на X, если для любых $x, y \in X,\ \lambda \in \mathbb{R}$, верны обычные свойства нормы: $\|x\| \ge 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$; $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$.

Пара $(X, \|\cdot\|)$ называется решеточно нормированным пространством (сокращенно, РНП) над $L^0(\Omega)$. РНП X над $L^0(\Omega)$ называется разложимым (d-разложимым), если для любого $x \in X$ и для любого разложения $\|x\| = f_1 + f_2$ в сумму неотрицательных (соответственно дизъюнктных) элементов $f_1, f_2 \in L^0(\Omega)$ существуют $x_1, x_2 \in X$ такие, что $x = x_1 + x_2$ и $\|x_k\| = f_k,\ k = 1, 2$.

Предположим, что X является векторной решеткой. Говорят, что $L^0(\Omega)$-значная норма $\|\cdot\|$ на X монотонна, если из условий $|x| \le |y|,\ x,\ y \in X$, следует, что $\|x\| \le \|y\|$. Если РНП $(X, \|\cdot\|)$ одновременно является векторной решеткой и норма $\|\cdot\|$ монотонна, то его называют решеточно нормированной векторной решеткой над $L^0(\Omega)$.

Говорят, что сеть $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ (bo)-сходится к элементу $x \in X$, если сеть $(\|x_\alpha - x\|)_{\alpha \in A}$ (o)-сходится к нулю в решетке $L^0(\Omega)$ (напомним, что (o)-сходимость сети из $L^0(\Omega)$ равносильна ее сходимости почти всюду). Сеть $(x_\alpha)_{\alpha \in A} \subset X$ называют (bo)-фундаментальной, если сеть $(x_\alpha - x_\beta)_{(\alpha,\beta) \in A \times A}$ (bo)-сходится к нулю. РНП называют (bo)-полным, если всякая (bo)-фундаментальная сеть в нем (bo)-сходится к элементу этого пространства.

Пространством Банаха-Канторовича (ПБК) над $L^0(\Omega)$ называется (bo)-полное d-разложимое решеточно нормированное пространство над $L^0(\Omega)$. Если ПБК $(X, \|\cdot\|)$ одновременно является векторной решеткой и норма $\|\cdot\|$ монотонна, то его называют решеткой Банаха-Канторовича. Отметим, что в ПБК норма всегда разложима (см. [5],[**?**]).

Теория интегрирования для элементов расширенного K_σ-пространства по σ-аддитивной мере со значениями в (bo)-полном решеточно нормированном пространстве оказалась весьма эффективной для построения полезных примеров пространств Банаха-Канторовича. Напомним основные понятия, относящиеся к теории векторного интегрирования (см. [5],[3]).

Пусть B произвольная полная булева алгебра. Отображение $m : B \to L^0(\Omega)$ называется $L^0(\Omega)$-*значной мерой* на B, если оно удовлетворяет следующим условиям: $m(e) \geq 0$ для всех $e \in B$; $m(e \vee g) = m(e) + m(g)$, для каждой пары дизъюнктных элементов $e, g \in B$; $m(e_\alpha) \downarrow 0$ для любой сети $e_\alpha \downarrow \mathbf{0}$, $\{e_\alpha\} \subset B$.

Говорят, что мера m *строго положительна*, если из условия $m(e) = 0$ следует, что $e = \mathbf{0}$. Строго положительная $L^0(\Omega)$-значная мера m называется *разложимой*, если для любых $e \in B$ и разложения $m(e) = f_1 + f_2$, в сумму неотрицательных элементов $f_1, f_2 \in L^0(\Omega)$ существуют такие $e_1, e_2 \in B$, что $e = e_1 \vee e_2$, и $m(e_i) = f_i$, $i = 1, 2$. Мера m разложима в том и только в том случае, когда она является мерой Магарам, т.е. мера m строго положительна и для любых $e \in B$, $0 \leq f \leq m(e)$, $f \in L^0(\Omega)$, существует такое $q \in B$, $q \leq e$, что $m(q) = f$ [11].

Следующее утверждение показывает, что в случае меры Магарам m существует естественное вложение булевой алгебры $B(\Omega)$ в булеву алгебру B.

Предложение 1.1. *[12, Proposition 3.2] Пусть m – $L^0(\Omega)$-значная мера Магарам на полной булевой алгебре B. Тогда существует единственный инъективный булев гомоморфизм $\varphi : B(\Omega) \to B$, такой, что $\varphi(B(\Omega))$ является правильной подалгеброй в B, и $m(\varphi(q)e) = qm(e)$ для всех $q \in B(\Omega)$, $e \in B$.*

Пусть $Q(B)$ стоуновский компакт, соответствующий полной булевой алгебре B, и пусть $L^0(B) := C_\infty(Q(B))$ алгебра всех непрерывных функций $x : Q(B) \to \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$, принимающих значения $\pm\infty$ лишь на нигде не плотных множествах из $Q(B)$. Через $C(Q(B))$ обозначается банахова алгебра всех непрерывных действительных функций на $Q(B)$ с равномерной нормой $\|x\|_\infty = \sup\limits_{t \in Q(B)} |x(t)|$.

Отождествляя B с полной булевой алгеброй всех идемпотентов из $L^0(B)$, считаем, что $B \subset L^0(B)$. Согласно Предложению 1.1 для меры Магарам $m : B \to L^0(\Omega)$ существуют правильная булева подалгебра $\nabla(m)$ в B и булев изоморфизм φ из $B(\Omega)$ на $\nabla(m)$ такие, что $m(\varphi(q)e) = qm(e)$ для всех $q \in B(\Omega)$, $e \in B$. Продолжая φ по линейности и непрерывности, получим действие $\varphi : L^0(\Omega) \to L^0(B)$, при этом, алгебра $L^0(\Omega)$ отождествляется с алгеброй $L^0(\nabla(m)) = C_\infty(Q(\nabla(m)))$, которую можно рассматривать как подалгебру и как правильную векторную подрешетку в $L^0(B)$ (это означает, что точные верхние и нижние границы для ограниченных подмножеств из $L^0(\nabla(m))$ совпадают в $L^0(B)$ и в $L^0(\nabla(m))$.

Обозначим через N множество всех натуральных чисел, и для каждого элемента $x \in L^0(B)$ определим его носитель $s(x) := \sup\limits_{n \in N}\{|x| > n^{-1}\}$, где $\{|x| > \lambda\} \in B$ есть характеристическая функция χ_{E_λ} множества E_λ, являющегося замыканием в $Q(B)$ множества $\{t \in Q(B) : |x(t)| > \lambda\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

В настоящей работе рассматривается интеграл от элементов K-пространства, определенный в работе [5]. В качестве расширенного K-пространства берется алгебра $L^0(B)$. Рассмотрим в $L^0(B)$ векторную подрешетку $S(B)$ всех простых элементов $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $e_i \in B$, $e_i \cdot e_j = \mathbf{0}$, $i, j = 1, \ldots, n$. Пусть m – $L^0(\Omega)$-значная мера на B. Если $x \in S(B)$, то полагаем по определению

$$I_m(x) := \int x dm := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m(e_i).$$

Как было показано в работе [5], интеграл I_m продолжается на пространство m-интегрируемых элементов $\mathcal{L}^1(B, m)$. Отождествив эквивалентные элементы из $\mathcal{L}^1(B, m)$, получим K_σ-пространство $L^1(B, m)$. Для каждого $x \in L^1(B, m)$ (запись $x \in L^1(B, m)$ означает, что рассматривается класс эквивалентности с представителем x) формула

$$\|x\|_{1,m} := \int |x| dm$$

определяет $L^0(\Omega)$-значную норму, т.е. $(L^1(B, m), \|x\|_{1,m})$ есть решеточно нормированное пространство над $L^0(\Omega)$ [5, 6.1.3]. При этом, в случае, когда $m : B \to L^0(\Omega)$ есть мера Магарам, пара $(L^1(B, m), \|x\|_{1,m})$

является пространством Банаха-Канторовича над $L^0(\Omega)$, для которого выполняются следующие соотношения $L^0(\nabla(m))\cdot L^1(B,m)\subset L^1(B,m)$, $\int(\varphi(\alpha)x)dm=\alpha\int xdm$, $|\int(\varphi(\alpha)x)dm|\leq|\alpha|\int|x|dm$ для всех $x\in L^1(B,m)$, $\alpha\in L^0(\Omega)$ [5, теорема 6.1.10].

Для каждого $p\geq 1$ положим

$$L^p(B,m)=\{x\in L^0(B):|x|^p\in L^1(B,m)\},$$

$$\|x\|_{p,m}:=\Big[\int|x|^p dm\Big]^{\frac{1}{p}},\quad x\in L^p(B,m).$$

Известно, что для меры Магарам m пара $(L^p(B,m),\|x\|_{p,m})$ является пространством Банаха-Канторовича [3]. Кроме того,

$$\varphi(\alpha)x\in L^p(B,m)\ \forall\ x\in L^p(B,m),\ \alpha\in L^0(\Omega),\ 1\leq p<\infty,$$

и $\|\varphi(\alpha)x\|_{p,m}=|\alpha|\|x\|_{p,m}$.

Пусть $(X,\|\cdot\|_X)$ решеточно нормированное пространство над $L^0(\Omega)$. Линейный оператор $T:X\to L^0(\Omega)$ называется $L^0(\Omega)$-*ограниченным,* если существует такой элемент $\alpha\in L^0(\Omega)_+$, что $|T(x)|\leq\alpha\|x\|_X$ для всех $x\in X$. Через $X^*:=L_b(X,L^0(\Omega))$ обозначим множество всех $L^0(\Omega)$-ограниченных операторов из X в $L^0(\Omega)$. Для всякого $L^0(\Omega)$-ограниченного оператора T определен элемент

$$\|T\|_{X^*}=\inf\{\alpha\in L^0(\Omega)_+:|T(x)|\leq\alpha\|x\|_X,\ x\in X\}.$$

Отображение $T\mapsto\|T\|_{X^*}$ является $L^0(\Omega)$-значной нормой в X^*, при этом $|T(x)|\leq\|T\|_{X^*}\|x\|_X$ для всех $x\in X$ ([5, 2.2.4]). Кроме, того верно следующее равенство:

$$\|T\|_{X^*}=\sup\{|T(x)|:\ x\in B_X\},$$

где $B_X=\{x\in X:\|x\|_X\leq\mathbf{1}\}$ – единичный шар в $(X,\|\cdot\|_X)$.

Для $T,S\in X^*$ положим $(T+S)(x)=T(x)+S(x)$, $(\lambda T)(x)=\lambda T(x)$, где $x\in X,\lambda\in\mathbb{R}$. Ясно, что $T+S,\lambda T\in X^*$, и относительно введенных алгебраических операций X^* является векторным пространством над полем $\mathbb{R}$. Более того, X^* рассматриваемое с $L^0(\Omega)$-значной нормой $\|T\|_{X^*},T\in X^*$, является пространством Банаха-Канторовича над $L^0(\Omega)$ ([5, 2.2.4 (3)]). ПБК $(X^*,\|\cdot\|_{X^*})$ называется $L^0(\Omega)$-*сопряженным пространством* к РНП $(X,\|\cdot\|_X)$.

Пусть $(X,\|\cdot\|_X)$ и $(Y,\|\cdot\|_Y)$ решеточно нормированные пространства над $L^0(\Omega)$. Линейный оператор $\imath:X\to Y$ называется изометрическим вложением, если $\|\imath(x)\|_Y=\|x\|_X$ для всех $x\in X$. Если $\imath(X)=Y$, то изометрическое вложение $\imath$ называют линейной изометрией. Будем говорить, что РНП X и Y линейно изометричны, если существует линейная изометрия из X на Y.

Пусть $(X,\|\cdot\|_X)$ есть РНП над $L^0(\Omega)$ и $(X^*,\|\cdot\|_{X^*})$ его $L^0(\Omega)$-сопряженное пространство. Для произвольных $x\in X$, $T\in X^*$ положим $p_T(x)=|T(x)|$. Ясно, что $p_T(\lambda x)=|\lambda|p_T(x),\lambda\in\mathbb{R}$, и $p_T(x+y)\leq p_T(x)+p_T(y),x,y\in X$. В этом случае говорят, что $p_T:X\to L^0(\Omega)$ есть $L^0(\Omega)$-значная полунорма на X.

Будем говорить, что последовательность $\{x_n\}$ из X $\sigma(X,X^*)$-сходится к $x\in X$, если $p_T(x_n-x)=|T(x_n-x)|$ (o)-сходится к нулю в решетке $L^0(\Omega)$ для всех $T\in X^*$, т.е. последовательность $\{T(x_n)\}$ (o)-сходится к $T(x)$ для всех $T\in X^*$.

Рассмотрим второе $L^0(\Omega)$-сопряженное пространство $X^{**}=(X^*)^*$ для решеточно нормированного пространства X над $L^0(\Omega)$. Для любого $x\in X$ положим $\varphi_x(T)=T(x),T\in X^*$. Отображение $\varphi_x:X^*\to L^0(\Omega)$ является $L^0(\Omega)$-линейным $L^0(\Omega)$-ограниченным оператором на X^* и $\|\varphi_x\|_{X^{**}}=\|x\|_X$, т.е. каноническое вложение $\iota:X\to X^{**}$ является линейным изометрическим вложением (см.[5, 2.2.5]).

Будем говорить, что пространство Банаха-Канторовича $(X,\|\cdot\|_X)$ над $L^0(\Omega)$ *рефлексивно*, если X и X^{**} совпадают, точнее $\iota(X)=X^{**}$.

2. Порядковая непрерывность $L^0(\Omega)$-значной нормы.

В этом разделе рассматриваются порядковые свойства $L^0(\Omega)$-значной нормы в решетке Банах-Канторовича. Используя свойства дизъюнктных последовательностей, устанавливаются несколько характеристик для порядковой непрерывности $L^0(\Omega)$-значной нормы решетки Банаха-Канторовича.

Пусть $L^0(\Omega)_{++}$ множество всех тех $\mathbf{0} \leq \lambda \in L^0(\Omega)$, для которых носитель $s(\lambda) := \sup_{n\geq 1}\{|\lambda| > n^{-1}\} = \mathbf{1}$. Ясно, что для каждого $\lambda \in L^0(\Omega)_{++}$ существует $\lambda^{-1} \in L^0(\Omega)_{++}$ такой, что $\lambda \cdot \lambda^{-1} = \mathbf{1}$.

Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ решеточно нормированная решетка над $L^0(\Omega)$. Говорят, что $L^0(\Omega)$-значная норма $\|\cdot\|_X$ порядково непрерывна, если для любой последовательности $(x_n) \subset X$ из $x_n \downarrow \mathbf{0}$ следует $\|x_n\|_X \downarrow \mathbf{0}$. Ясно, что в этом случае, для любой последовательности $(x_n) \subset X$, для которой $x_n \uparrow x \in X$, имеем, что $\|x - x_n\|_X \downarrow \mathbf{0}$.

Говорят, что $(X, \|\cdot\|_X)$ имеет свойство Фату, если для любой возрастающей последовательности $\{x_n\}$ положительных элементов из X, для которой $\|x_n\|_X \leq \lambda$ при всех $n \in N$ и некотором $\mathbf{0} \leq \lambda \in L^0(\Omega)$, существует такое $0 \leq x \in X$, для которого $x_n \uparrow x$ и $\sup_{n\in N} \|x_n\|_X = \|x\|_X$.

Верна следующая характеризация порядковой непрерывности $L^0(\Omega)$-значной нормы в решетке Банаха-Канторовича над $L^0(\Omega)$.

Теорема 2.1. . *Следующие условия эквивалентны для решетки Банаха-Канторовича $(X, \|\cdot\|_X)$ над $L^0(\Omega)$:*

(1). *X есть порядково полная векторная решетка и $L^0(\Omega)$-значная норма в пространстве $(X, \|\cdot\|_X)$ порядкова непрерывна.*

(2). *Каждая порядково ограниченная дизъюнктная последовательность положительных элементов из X (bo)-сходится к нулю.*

(3). *$\{T_n\}$ $\sigma(X, X^*)$-сходится к $\mathbf{0}$ при $n \to \infty$ для каждой положительной дизъюнктной последовательности $\{T_n\} \subset B_{X^*}$, где B_{X^*} – единичный шар в сопряженном пространстве $(X^*, \|\cdot\|_{X^*})$.*

Доказательство. Эквивалентность условий (1) and (2) доказана в работе [13, Следствие 3.7].

(2) $\Leftrightarrow$ (3). Пусть $0 \leq x \in X$, $A = [-x, x]$ and $B = B_{X^*}$. Положим

$$p_B(y) := \sup\{|T(y)| : T \in B\} \ (y \in A);$$

$$p_A(T) := \sup\{|T(y)| : y \in A\} \ (T \in B).$$

Поскольку каноническое вложение $\iota : X \to X^{**}$ является линейным изометрическим вложением, то отсюда вытекает $p_B(y) = \|i(y)\|_{X^{**}} = \|y\|_X$.

Теперь эквивалентность условий (2) and (3) следует из эквивалентности следующих утверждений:

(a). Последовательность $p_A(T_n)$ (o)-сходится к нулю в $L^0(\Omega)$ при $n \to \infty$, для каждой положительной дизъюнктной последовательности $\{T_n\} \subset B$.

(b). Последовательность $p_B(x_n)$ (o)-сходится к нулю в $L^0(\Omega)$ при $n \to \infty$, для каждой положительной дизъюнктной последовательности $\{x_n\} \subset A$.

$\triangleright$

В следующей теореме дана характеризация порядковой непрерывности $L^0(\Omega)$-значной нормы в $L^0(\Omega)$-сопряженном пространстве $(X^*, \|\cdot\|_{X^*})$.

Теорема 2.2. *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ решетка Банаха-Канторовича над $L^0(\Omega)$. Следующие условия эквивалентны:*

(1). *$L^0(\Omega)$-значная норма в $(X^*, \|\cdot\|_{X^*})$ порядково непрерывна.*

(2). *$\{x_n\}$ $\sigma(X, X^*)$-сходится к $\mathbf{0}$ при $n \to \infty$ для каждой положительной дизъюнктной последовательности $\{x_n\} \subset B_X$.*

Доказательство . (1) $\Rightarrow$ (2). Поскольку $L^0(\Omega)$ является K-пространством, то множество $X^* = L_b(X, L^0(\Omega))$ всех $L^0(\Omega)$-ограниченных операторов из X в $L^0(\Omega)$, упорядоченное конусом положительных операторов X^*_+, является K-пространством (см. [5, Теорема 3.1.2]). В частности, каноническое вложение $\iota : X \to X^{**}$ является решеточным изоморфизмом, и $X = \iota(X) \subset X^{**}$ есть подрешетка в X^{**}. Теперь, справедливость импликации (1) $\Rightarrow$ (2) вытекает из теоремы 2.1 .

(2) $\Rightarrow$ (1). Пусть $T \in X^*_+$, $A = B_X$ и $B = [-T, T]$. Поскольку любая дизъюнктная последовательность $\{x_n\} \subset A$ (o)-сходится к нулю в X, то последовательность $p_T(x_n) = T(|x_n|)$ (o)-сходится к нулю в $L^0(\Omega)$ при $n \to \infty$ для каждой дизъюнктой последовательности $\{x_n\} \subset A$. Кроме того, для всех последовательностей $\{T_n\} \subset B$ имеем

$$p_A(T_n) = \sup\{|T_n(y)| : y \in A\} = \|T_n\|_{X^*}.$$

Следовательно, из эквивалентности импликаций (2) $\Leftrightarrow$ (3) о дизъюнктных последовательностях (см. доказательство теоремы 2.1) получим, что последовательность $\|T_n\|_{X^*}$ (o)-сходится к нулю в $L^0(\Omega)$ при $n \to \infty$ для каждой положительной дизъюнктной последовательности $\{T_n\} \subset B$. Опять используя теорему 2.1, получим, что $L^0(\Omega)$-значная норма в $(X^*, \|\cdot\|_{X^*})$ порядково непрерывна. $\triangleright$

3. p-Конвексификация пространств Банаха-Канторовича над кольцом измеримых функций.

Пусть m — $L^0(\Omega)$-значная мера Магарам на полной булевой алгебре B. Всюду в дальнейшем, предполагается, что $m(\mathbf{1}_B) = \mathbf{1}_{B(\Omega)}$.

Пусть E – ненулевой $L^0(\nabla(m))$-подмодуль в $L^0(B)$, и пусть $\|\cdot\|_E$ есть $L^0(\Omega)$-значная норма на E, наделяющая E структурой решеточно нормированного прост -ранства над $L^0(\Omega)$. Пусть $0 < p, q < \infty$. РНП E называется p-выпуклым (соответственно q-вогнутым), если существует такое число $M > 0$, что для любого конечного набора $\{x_k\}_{k=1}^n \subset E$ верно неравенство

$$\Big\|\Big(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\Big)^{1/p}\Big\|_E \le M\Big(\sum_{k=1}^n \|x_k\|_E^p\Big)^{1/p}, \tag{3.1}$$

(соответственно,

$$\Big(\sum_{k=1}^n \|x_k\|_E^q\Big)^{1/q} \le M\Big\|\Big(\sum_{k=1}^n |x_k|^q\Big)^{1/q}\Big\|_E.) \tag{3.2}$$

Наименьшее число $M > 0$, удовлетворяющее неравенству (3.1) (соответственно (3.2)), называется константой p-выпуклости (соответственно, q-вогнутости) РНП E и обозначается через $M^{(p)}(E)$ (соответственно, $M_{(q)}(E)$). Ясно, что РНП E над $L^0(\Omega)$ является 1-выпуклым с константой 1-выпуклости равной 1. Если $E = L^p(B, m), 1 \le p < \infty$, то для любого конечного набора $\{x_k\}_{k=1}^n \subset L^p(B, m)$ верно равенство

$$\Big\|\Big(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\Big)^{1/p}\Big\|_{p,m} = \Big(\sum_{k=1}^n \|x_k\|_{p,m}\Big)^{1/p}.$$

Следовательно, $L^p(B, m)$ является p-выпуклым и p-вогнутым РНП, при этом

$$M^{(p)}(L^p(B, m)) = M_{(p)}(L^p(B, m)) = 1.$$

Для РНП E и $1 \le p < \infty$ рассмотрим множество $E^{(p)} = \{x \in L^0(B) : |x|^p \in E\}$, и для $x \in E^{(p)}$ положим $\|x\|_{E^{(p)}} = \||x|^p\|_E^{\frac{1}{p}}$.

Ясно, что в случае $E = (L^1(B, m), \|\cdot\|_{L^1(B,m)})$ верны равенства

$$L^1(B, m)^{(p)} = L^p(B, m) := \{x \in L^0(B) : |x|^p \in L^1(B, m)\},$$

$$\|x\|_{L^1(B,m)^{(p)}} = \||x|^p\|_{1,m}^{\frac{1}{p}} = \|x\|_{p,m}.$$

Известно, что $(E^{(p)}, \|\cdot\|_{E^{(p)}})$ является решеточно нормированным пространством над $L^0(\Omega)$ и оно называется *p-конвексификацией* решеточно нормированного пространства $(E, \|\cdot\|_E)$ (см. [7]). p-Конвексификация $E^{(p)}$ решеточно нормированного пространства E является p-выпуклым РНП с константой выпуклости равной 1, т.е. $M^{(p)}(E^{(p)}) = 1$. Верна следующая

Теорема 3.1. *[7, Теорема 3.7]. Если $(E, \|\cdot\|_E)$ является решеткой Банаха-Канторовича над $L^0(\Omega)$, то ее p-конвексификация $(E^{(p)}, \|\cdot\|_{E^{(p)}})$ также является решеткой Банаха-Канторовича над $L^0(\Omega)$.*

Следующее предложение устанавливает некоторые свойства, которые переходят от E к $E^{(p)}$.

Предложение 3.1. . *Пусть $(E, \|\cdot\|_E)$ решеточно нормированная решетка над $L^0(\Omega)$ и $p \geq 1$.*
(i). Если $L^0(\Omega)$-значная норма в $(E, \|\cdot\|_E)$ порядково непрерывна, то $L^0(\Omega)$-значная норма в $(E^{(p)}, \|\cdot\|_{E^{(p)}})$ также порядково непрерывна.
(ii). Если $(E, \|\cdot\|_E)$ имеет свойство Фату, то $(E^{(p)}, \|\cdot\|_{E^{(p)}})$ также имеет свойство Фату.

Доказательство. (i). Пусть $\{x_n\} \subset (E^{(p)}, \|\cdot\|_{E^{(p)}})$ и $x_n \downarrow \mathbf{0}$. Поскольку $\mathbf{0} \leq x_n \in E^{(p)}$, то из этого следует, что $x_n^p \in E$ для всех n, и, используя сходимость $x_n^p \downarrow \mathbf{0}$, мы получаем, что $\|x_n^p\|_E \downarrow \mathbf{0}$. Следовательно, $\|x_n\|_{E^{(p)}}^p = \|x_n^p\|_E \downarrow \mathbf{0}$, и поэтому $\|x_n\|_{E^{(p)}} = \|x_n^p\|_E^{1/p} \downarrow \mathbf{0}$.

(ii). Пусть $\{x_n\} \subset (E^{(p)}, \|\cdot\|_{E^{(p)}})$. Чтобы показать, что $(E^{(p)}, \|\cdot\|_{E^{(p)}})$ имеет свойство Фату, предположим, что $\{x_n\}_{n\in N}$ является такой последовательностью из $E^{(p)}$, что $0 \leq x_n \uparrow$ и $\|x_n\|_{E^{(p)}} < \lambda$ для всех $n \in N$, где $\lambda \in L^0(\Omega)_{++}$. Тогда $0 \leq x_n^p \uparrow$ и $\|x_n^p\|_E = \|x_n\|_{E^{(p)}}^p < \lambda^p$ для всех $n \in N$. Следовательно, согласно свойству Фату для $(E, \|\cdot\|_E)$, существует такой элемент $y \in E$, что $x_n^p \uparrow y$ и $\sup\limits_{n\in N} \|x_n^p\|_E = \|y\|_E$. Положим $x = y^{1/p}$. Тогда $x \in E^{(p)}$ и $x_n \uparrow y^{1/p} = x$. Кроме того, $\sup\limits_{n\in N} \|x_n\|_{E^{(p)}} = \sup\limits_{n\in N} \|x_n^p\|_E^{1/p} = \|y\|_E^{1/p} = \|x^p\|_E^{1/p} = \|x\|_{E^{(p)}}$. $\triangleright$

Если $(E, \|\cdot\|_E)$ является решеткой Банаха-Канторовича над $L^0(\Omega)$, то $(E^{(p)}, \|\cdot\|_{E^{(p)}})$ также является решеткой Банаха-Канторовича над $L^0(\Omega)$ (Теорема 2.1), и следовательно, $L^0(\Omega)$-сопряженное $(E^{(p)})^*$ является решеткой Банаха-Канторовича над $L^0(\Omega)$. Верно следующее

Предложение 3.2. . *Если $(E, \|\cdot\|_E)$ есть решетка Банаха-Канторовича над $L^0(\Omega)$ и $p > 1$, то $L^0(\Omega)$-значная норма в $(E^{(p)})^*$ порядково непрерывна.*

Доказательство . Пусть $\{x_n\}$ произвольная дизъюнктная последовательность положительных элементов в замкнутом единичном шаре пространства $E^{(p)}$. Согласно теоремы 2.2, мы должны показать, что последовательность $T(x_n)$ (o)-сходится к нулю в $L^0(\Omega)$ для всех $T \in (E^{(p)})^*$. Предположим, что существует такой оператор $0 \leq T \in (E^{(p)})^*$, что последовательность $T(x_n)$ не является (o)-сходящейся к нулю в $L^0(\Omega)$. Это означает, что последовательность $T(x_n)$ не сходится к нулю почти всюду при $n \to \infty$. Следовательно, переходя если нужно к подпоследовательности, найдутся такие $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ и $\mathbf{0} \neq e \in B(\Omega)$, что $eT(x_n) \geq \varepsilon e$ для всех n. Поскольку $\{x_n\}$ является дизъюнктной последовательностью, то верно равенство

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\Big)^{1/p} = \sum_{k=1}^{n} x_k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Как было отмечено выше, пространство $E^{(p)}$ является p-выпуклым с константой выпуклости равной 1. Следовательно,

$$n\varepsilon e \leq \sum_{k=1}^{n} T(x_k)e = eT\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\Big) = eT\Big[\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\Big)^{1/p}\Big] \leq e\Big\|\Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\Big)^{1/p}\Big\|_{E^{(p)}} \|T\|_{(E^{(p)})^*}$$

$$\le e\Big(\sum_{k=1}^{n}\|x_k\|^p_{E^{(p)}}\Big)^{1/p}\|T\|_{(E^{(p)})^*} \le n^{1/p}e\|T\|_{(E^{(p)})^*}$$

для всех $n = 1, 2, ...$, что невозможно. Следовательно последовательность $T(x_n)$ (o)-сходится к нулю в $L^0(\Omega)$ для всех $T \in (E^{(p)})^*$, и в силу теоремы 2.2, $L^0(\Omega)$-значная норма в $(E^{(p)})^*$ порядково непрерывна. $\triangleright$

Дадим теперь определение симметричных пространств Банаха- Канторовича над $L^0(\Omega)$ (см. [14], [15]).

Два положительных элемента x и y из $L^0(B)$ называются m-равноизмеримыми, если $m\{x > h\} = m\{y > h\}$ для любого $h \in L^0(\Omega)_{++}$, где $\{x > h\} \in B$ есть характеристическая функция замыкания открытого множества $\{s \in Q(B) : x(s) > h(s)\}$.

Пусть $(E, \|\cdot\|_E) \subset L^0(B)$ – решетка Банаха-Канторовича над $L^0(\Omega)$ со свойством идеальности, т.е. для $x \in L^0(B)$ и $y \in E$, из $|x| \le |y|$ следует, что $x \in E$. Говорят, что E есть симметричное пространство Банаха-Канторовича над $L^0(\Omega)$, если из m-равноизмеримости элементов x и y, где $0 \le x \in L^0(B)$, $0 \le y \in E$, следует, что $x \in E$ и $\|x\|_E = \|y\|_E$.

Примерами симметричных пространств Банаха- Канторовича являются пространства $(L^p(B, m), \|\cdot\|_{p,m})$, $1 \le p < \infty$, and $(L^\infty(B, L^0(\Omega)), \|\cdot\|_{\infty,L^0(\Omega)})$ [14, Theorem 4], где $L^\infty(B, L^0(\Omega)) = \big\{x \in L^0(B) : |x| \le f$ для некоторого $f \in L^0(\Omega)_+\big\}$ пространство Банаха-Канторовича с $L^0(\Omega)$-значной нормой

$$\|x\|_{\infty,L^0(\Omega)} = \inf\{f \in L^0(\Omega)_+ : |x| \le f\},\ \ x \in L^\infty(B, L^0(\Omega)).$$

Следующая теорема есть версия теоремы 3.1 для симметричных пространств Банаха-Канторовича над $L^0(\Omega)$.

Теорема 3.2. . *Если $(E, \|\cdot\|_E)$ является симметричным пространством Банаха-Канторовича над $L^0(\Omega)$, то его p-конвексификация $(E^{(p)}, \|\cdot\|_{E^{(p)}})$ также является симметричным пространством Банаха-Канторовича над $L^0(\Omega)$.*

Доказательство. Согласно теоремы 2.1, $(E^{(p)}, \|\cdot\|_{E^{(p)}})$ является решеткой Банаха-Канторовича над $L^0(\Omega)$. Кроме того, если $|x| \le |y|$, $x \in L^0(B)$ и $y \in E^{(p)}$, то из неравенства $|x|^p \le |y|^p \in E$, следует, что $|x|^p \in E$, т.е. $x \in E^{(p)}$. Это означает, что $E^{(p)}$ имеет свойство идеальности.

Пусть теперь $0 \le x \in L^0(B), 0 \le y \in E^{(p)}$, x и y – m-равноизмеримы. Тогда для любого $h \in L^0(\Omega)_{++}$, имеем

$$m\{y^p > h\} = m\{y > h^{1/p}\} = m\{x > h^{1/p}\} = m\{x^p > h\}.$$

Это означает, что элементы x^p и y^p – m-равноизмеримы, при этом $y^p \in E$ и $x^p \in L^0(B)$. Следовательно, $x^p \in E$ и $\|x^p\|_E = \|y^p\|_E$. Отсюда, заключаем, что $x \in E^{(p)}$ и

$$\|x\|_{E^{(p)}} = \|x^p\|_E^{\frac{1}{p}} = \|y^p\|_E^{\frac{1}{p}} = \|y\|_{E^{(p)}}.$$

Следовательно, $(E^{(p)}, \|\cdot\|_{E^{(p)}})$ является симметричным пространством Банаха-Канторовича над $L^0(\Omega)$. $\triangleright$

Заключение

В работе вводятся понятия p-выпуклости и q-вогнутости в решеточно нормированных решетках $(E, \|\cdot\|_E)$ над кольцом измеримых функций и рассматривается свойства связанные с этими понятиями. Доказывается, что p-конвексификация $(E^p, \|\cdot\|_{E^p})$ симметричного пространства Банаха-Канторовича $(E, \|\cdot\|_E)$ также является симметричным пространством Банаха-Канторовича. Устанавливается, что свойство Фату и свойство порядковой непрерывности также переходят от $(E, \|\cdot\|_E)$ к $(E^p, \|\cdot\|_{E^p})$.

Список литературы

[1] Lindenstrauss J., Tzafriri L. *Classical Banach Spaces II*. Springer-Verlag, Berlin, 243 p. (1979).

[2] Канторович Л.В. *Об одном классе функциональных уравнений*, Докл. Акад. Наук СССР. **5(4)**. p. 211–216. (1936).
[3] Кусраев А.Г., *Векторная двойственность и ее приложения*. - Новосибирск: Наука. 256 с. (1985).
[4] Гутман А.Е. *Банаховы расслоения в теории решеточно нормированных пространств. Линейные операторы, согласованные с порядком*. - Новосибирск: изд-во ИМ СО РАН, С. 63 – 211. (1995).
[5] Кусраев А.Г., *Мажорируемые операторы*. - М.: Наука. 619 с. (2003).
[6] Кусраев А.Г., Кутателадзе С.С. *Введение в булевозначный анализ*. - М.: Наука. 525 с. (2005).
[7] Zakirova G.B. *On p-convexification of the Banach-Kantorovich lattice*, e-Journal of Analysis and Applied Mathematics. p. 21–32. (2024). https://doi.org/10.62780/ejaam/2024-004
[8] Владимиров Д.А. *Булевы алгебры*. - М.: Наука. 318 с. (1969).
[9] Вулих Б.З. *Введение в теорию полуупорядоченных пространств*. - М.: ГИФМЛ. 407 с. (1961).
[10] Meyer-Nieberg P. *Banach Lattices*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, p. 395 (1961)
[11] Закиров Б.С., Чилин В.И. *Разложимые меры со значениями в порядково полных векторных решетках*, Владикавказский матем. журн. - Владикавказ, **4(10)**. С. 31–38. (2008).
[12] Chilin V., Zakirov B. *Decomposable L_0- valued measures as measurable bundles*, Positivity, **14(3)**. p. 395-405.
[13] Закиров Б.С., *Теорема Амемия для L^0-нормированных векторных решоток*, Узбекский мат. журн. **5**. с. 23–33. (2008).
[14] Chilin V.I., Zakirova G.B. *Symmetric spaces of Banach-Kantorovich*, Al-Farabi Kazakh National University Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science. **2(126)**. p. 80–90. (2025).
[15] Chilin V., Zakirova G. *The decreasing rearrangements of functions for vector-valued measures*, Uzbek Mathematical Journal. **Vol. 69, Issue 4.** p. 70–82. (2025).

On p-convexification of Symmetric Banach-Kantorovich Spaces

Chilin V.I., Zakirova G.B.

Abstract

Let B be a complete Boolean algebra, $Q(B)$ the Stone compact of B, and let $C_\infty(Q(B))$ be the commutative unital algebra of all continuous functions $x : Q(B) \to [-\infty, +\infty]$, assuming possibly the values $\pm\infty$ on nowhere-dense subsets of $Q(B)$. Let $(E, \|\cdot\|_E) \subset C_\infty(Q(B))$ be a Banach-Kantorovich lattice over the algebra $L^0(\Omega)$ of equivalence classes of almost everywhere finite real-valued measurable functions on a measurable space (Ω, Σ, μ) with σ-finite measure μ. The paper considers the p-convexification of lattice-normed spaces and proves that p-convexification of $(E^p, \|\cdot\|_{E^p})$ symmetric Banach-Kantorovich space $(E, \|\cdot\|_E)$ over $L^0(\Omega)$ is a symmetric Banach-Kantorovich space over $L^0(\Omega)$. It is established that an $L^0(\Omega)$-valued norm in the space of $(E^p, \|\cdot\|_{E^p})$ has the Fatou property or the property of order continuity, in the case when this property is possessed by an $L^0(\Omega)$-valued norm in the space of $(E, \|\cdot\|_E)$.

Keywords

p-convexification, Maharam measure, Banach-Kantorovich space, symmetric spaces.

Affiliations

Vladimir Chilin
Address: Doctor of physical and mathematical sciences, professor of the department of Higher Mathematics, Tashkent State Transport University , Tashkent, Uzbekistan.
e-mail: vladimirchil@gmail.com
ORCID ID: https://orcid.org/0000-0002-7936-9649

Gavhar Zakirova
Address: Assistant in department of Higher Mathematics, Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan.
e-mail: zg1090@list.ru
ORCID ID: https://orcid.org/0000-0002-4663-0919