Uzbekistan Journal of Mathematics and Computer Science
Volume-2, Issue-1, Page 43–59 (2026)
DOI: https://doi.org/10.56143/ujmcs.v2i1.5
Research article

Задача с Неполным Условием Бицадзе-Самарского для Уравнения Смешанного Типа

М. Мирсабуров,* З.Ф.Рузиева

Аннотация

В работе, в некоторой неограниченной области для уравнения смешанного типа с особыми коэффициентами исследована задача с неполным условием типа условия Бицадзе-Самарского на части граничной характеристики и на части отрезка вырождения и дополненное аналогом условия Франкля на отрезке вырождения. Единственность решения задачи доказана с помошью принципа екстремума А.В.Бицадзе. При доказательстве существования решения задачи используется теория сингулярных интегральных уравнений и теория уравнений Винера-Хопфа.

Ключевые слова: *Уравнение смешанного типа, сингулярный коэффициент, условие Бицадзе-Самарского, единственность решения, существование решения, сингулярное интегральное уравнение, задача о скачке, уравнение Винера-Хопфа, индекс.*

Предметная классификацие AMS (2020): *Основная: 35M10 ; Дополнительная: 45E05; 30E25.*

Введение.

Первая нелокальная задача в некоторой смешанной области для уравнения Чаплыгина: $K(y)u_{xx} + u_{yy} = 0$, где $yK(y) > 0$ при $y > 0, K(0) = 0$ была сформулирована австрийским математиком Ф.И.Франклем [1], который заложил основы теории нелокальных задач для уравнений смешанного типа. В работе Ю.В.Девинталя [2], в случае когда $K(y) = (signy)|y|^m$, здесь постоянная $m > 0$ доказаны теоремы единственности и существования решения задачи Франкля, где единственность решения задачи доказывается методом вспомогательных функций а при доказательстве существования решения задачи используется метод интегральных уравнений с применением теории сингулярных интегральных уравнений. Большим импульсом в развитие теории нелокальных задач явилась совместная работа А.В.Бицадзе и А.А.Самарского [3], для равномерно эллиптического уравнения Лапласа в прямоугольной области, где была сформулирована и исследована задача с нелокальным условием, связывающим значения искомого решения на части границы области со значением на отрезке внутренней прямой, в точках которой искомая функция $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению. Первая нелокальная задача для уравнения смешанного типа с аналогом условия Бицадзе-Самарского на характеристике и на отрезке вырождения была исследована в работе Смирнова М.М [4, с.223]. Доказательству корректности задач для уравнений смешанного типа с условием Бицадзе-Самарского на части граничной характеристике и параллельной ей внутренней характеристике посвящена работа [5]. Задачи с условием Бицадзе-Самарского исследованы в работих [6]-[10].

Настоящая работа посвящена исследованию в неограниченной области, задачи с неполным условием Бицадзе-Самарского на части граничной характеристики и на части отрезка вырождения и дополненное аналогом условия Франкля на отрезке линии вырождения для уравнение смешанного типа с особыми коэффициентами.

1. Постановка задачи BSF (Бицадзе, Самарского, Франкля)

Пусть $D = D^+ \bigcup D^- \bigcup J$ -неограниченная смешанная область комплексной плоскости $\mathbb{C} = \{z = x + iy\}$, где D^+ -полуплоскость $y > 0$,D^- -конечная область полуплоскости $y < 0$, ограниченная характеристиками уравнения

$$(signy)|y|^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\alpha_0}{|y|^{1-\frac{m}{2}}} u_x + \frac{\beta_0}{y} u_y = 0, \tag{1.1}$$

Received : *01–февраля–2026,* ***Accepted :*** *30–мая–2026*
**** Corresponding author***

исходяшими из точек $A(-1,0),\ B(1,0)$ прямой $y=0$, где J=(-1,1)-интервал оси $y=0$. В уравнение (1.1) предполагается, что m,α_0 и β_0 некоторые действительные числа, удовлетворяюшие условиям $m>0$, $|\alpha_0|<(m+2)/2,\ -m/2<\beta_0<1$.

Заметим, что конструктивные, функциональные и дифференциальные свойства решений уравнения (1.1) существенно зависять от числовых параметров α_0 и β_0 при младших членах уравнения.Например одно из частных решений уравнения (1.1) зависящееся только от y имеет вид $u(x,y)=|y|^{1-\beta_0}$, из которого следует,что оно ограничене при $\beta_0<1$ и неограничено при $\beta_0>1$ На плоскости параметров α_0 и β_0 рассматривается треугольник $A_0^*B_0^*C_0^*$ ограниченный прямыми

$$A_0^*C_0^*:\beta_0+\alpha_0=-m/2,\ B_0^*C_0^*:\beta_0-\alpha_0=-m/2,\ A_0^*B_0^*:\beta_0=1,$$

и в зависимости от местонахождения точки $P(\alpha_0,\beta_0)$ в этом треугольнике формулируются и исследуются задачи для уравнения (1.1).

Рассмотрим случай $P(\alpha_0,\beta_0)\in\Delta A_0^*B_0^*C_0^*$,.Обозначим через C_0 и C_1 точки пресечения граничних характеристик AC и BC с характеристиками уравнения (1.1), выходяшими из точки $E(c,0)$,где c -некоторое число,принадлежашее интервалу J=(-1,1) оси $y=0$. Пусть $p(x)\in C^1[-1,c]$-диффеоморфизм из множества точек отрезка $[-1,c]$ во множества точек отрезка $[c,1]$,причем $p'(x)$<0, $p(-1)=1,\ p(c)=c$. В качестве примера такой функции приведем линейную функцию $p(x)=d-kx$, где $k=\frac{1-c}{1+c},\ d=\frac{2c}{1+c}$. В задачах типа задачи Бицадзе-Самарского [4.с.223] нелокальное условие связывает значения дробной производной искомий функции на характеристике AC со значением искомий функции на отрезке вырождения AB. В настояшей работе в неограниченной области D для уравнения (1.1) исследуется корректность задачи, где граничная характеристика AC произвольним образом делится на две части: AC_0 и C_0C и на первой части $AC_0\subset AC$ и на части отрезка вырожления $AE\subset AB$ задается нелокальное условие типа условия Бицадзе-Самарского [4.с.223]. Здесь вторая часть C_0C характеристики AC освобождена от краевых условия и это недостаюшее нелокальное условие дополненно аналогом условия Франкля [1],[2],[5] на отрезке вырождения AB. Исследованию задачи Франкля для различных видов уравнений смешанного типа исследованы работы [11]-[15]

Пусть D_R^+ -конечная область, отсекаемая от области D^+ дугой нормальной кривой σ_R с концами в точках $A_R=A_R(-R,0),\ B_R=B_R(R,0)$,

$$\sigma_R: x^2+4(m+2)^{-2}y^{m+2}=R^2,\ -R\le x\le R,\ 0\le y\le((m+2)R/2)^{2/(m+2)}.$$

Введем обозначения: $J_1=\{(x,y):-\infty<x<-1,\ y=0\},\ J_2=\{(x,y):1<x<+\infty,\ y=0\},\ D_R=D_R^+\cup D^-\cup J$,$D_R$ -подобласть неограниченной области D.

Задача BSF. Определить в области D функцию $u(x,y)$ удовлетворяющее условиям:

1) функция $u(x,y)$ непрерывна в любой подобласти $\overline{D}_R$ неограниченной области D;

2) $u(x,y)$ принадлежит пространству $C^2(D^+)$ и удовлетворяет уравнению (1.1) в этой области;

3) $u(x,y)$ является обобшенным решением класса R_1 [4.с.104], [5.с.35] в области D^-;

4) на интервале вырождения J имеет место следуюшее условие сопряжения

$$\lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}=\lim_{y\to+0}y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y},x\in J/\{c\},\tag{1.2}$$

причем эти пределы при $x\to\pm1,\ x\to\ c$, могут иметь особенности порядка ниже $1-\alpha-\beta$, где $\alpha=(m+2(\beta_0+\alpha_0))/(2(m+2)),\ \beta=(m+2(\beta_0-\alpha_0))/(2(m+2)),\alpha>0,\ \beta>0,\ \alpha+\beta<1$;

5) в области D^+ выполняется равенство

$$\lim_{R\to+\infty}u(x,y)=0,\tag{1.3}$$

где $R^2=x^2+4(m+2)^{-2}y^{m+2}$;

6) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,0)=\varphi_1(x)\ \ x\in\overline{J}_1,u(x,0)=\varphi_2(x)\ \ x\in\overline{J}_2,\tag{1.4}$$

$$D^{\alpha}_{-1,x}(1+x)^{\alpha+\beta-1}u\left[\theta_0\left((x)\right)\right]=a(x)u(x,0)+b(x)\ \ x\in(-1,c), \tag{1.5}$$

$$u\left(p(x),0\right)-\mu(x)u\left(x,0\right)=f(x),\ x\in(-1,c), \tag{1.6}$$

где $D^{l}_{-1,x}$, – оператор дифференцирования дробного порядка Римана-Лиувилля.[4. с.16]

$$\theta_0(x)=\frac{x_0-1}{2}-i\left[\frac{(x_0+1)(m+2)}{4}\right]^{2/(m+2)},$$

$\theta_0(x)$-аффикс точки пересечения граничной характеристики AC с характеристикой исходяшей из точки $(x_0,0)$, $x\in(-1,c)$, где, $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\ a(x),b(x),\ f(x)$ -заданные непрерывно дифференцируемие функции, в замыкании множества их определения, причем $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi_1(x)=0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi_2(x)=0$.

Введя обозначение $u(x,0)=\tau(x),\ x\in\bar{J}$, условие (1.6) запишем в виде

$$\tau(p(x))-\mu(x)\tau(x)=f(x),\ x\in(-1,c),. \tag{1.6*}$$

Заметим, что условие (1.5) является непольным условием Бицадзе-Самарского [4. с.223], на характеристике AC_0 и на отрезке AE, условие (1.6) есть аналог условия Франкля на отрезке вырождения AB [5,с.200]. Различные задача с условиями типа (1.5) и (1.6) исследованы в работах [16]-[22].Новизной задачи BSF является условие (1.5) которая задается на части AC_0 граничной характеристике AC и аналог условия Франкля (1.6) на отрезке вырождения AB. В задаче работе М.М Смирнова [4,с209] условие (1.5) задается на всей граничной характеристике AC и условие (1.6) отсутствует.

1.1 Вывод первого функционального соотношения между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$.

Формула Дарбу, определяюшая в области D^{-} решение, для уравнения (1.1), видоизмененной задачи Коши с начальными данными

$$u(x,-0)=\tau(x),\ x\in\bar{J};\ \lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}=\nu(x),\ x\in J,$$

имеет вид [5, с.34]

$$u(x,y)=\gamma_1\int_{-1}^{1}\tau\left[x+\frac{2t}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\right](1-t)^{\alpha-1}(1+t)^{\beta-1}dt+$$

$$+\gamma_2(-y)^{1-\beta_0}\int_{-1}^{1}\nu\left[x+\frac{2t}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\right](1-t)^{-\beta}(1+t)^{-\alpha}dt, \tag{1.7}$$

где

$$\gamma_1=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}2^{1-\alpha-\beta},\ \gamma_2=-\frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)2^{1-\alpha-\beta}}{(1-\beta_0)\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}$$

В силу (1.7) нетрудно вычислить, что

$$u\left[\theta_0(x)\right]=u\left(Re\theta_0(x),Im\theta_0(x)\right)=\gamma_1\Gamma(\alpha)\left(\frac{1+x}{2}\right)^{1-\alpha-\beta}D^{-\alpha}_{-1,x}(1+x)^{\beta-1}\tau(x)+$$

$$+\gamma_2\Gamma(1-\beta)\left(\frac{m+2}{2}\right)^{1-\alpha-\beta}D^{\beta-1}_{-1,x}(1+x)^{-\alpha}\nu(x). \tag{1.8}$$

К соотношению (1.8) применяя оператор дифференцирования дробного порядка $D^{\alpha}_{-1,x}$ с учетом тождеств имеем

$$D^{\alpha}_{-1,x}(1+x)^{\alpha+\beta-1}u\left[\theta_0(x)\right]=\frac{\gamma_1\Gamma(\alpha)(1+x)^{-\alpha}}{2^{1-\alpha-\beta}}\tau(x)+\frac{\gamma_2\Gamma(1-\beta)(1+x)^{\beta-1}}{((m+2)/2)^{\alpha+\beta-1}}D^{\alpha+\beta-1}_{-1,x}\nu(x). \tag{1.9}$$

В силу (1.9) из краевого условия (1.5) имеем

$$\frac{\gamma_1\Gamma(\alpha)(1+x)^{\beta-1}}{2^{1-\alpha-\beta}}\tau(x)+\frac{\gamma_2\Gamma(1-\beta)(1+x)^{\beta-1}}{((m+2)/2)^{\alpha+\beta-1}}D_{-1,x}^{\alpha+\beta-1}\nu(x)=a(x)\tau(x)+b(x). \tag{1.10}$$

Для нахождения $\nu(x)$ к соотношению (1.10) применяя оператор дифференцирования дробного порядка $D_{-1,x}^{1-\alpha-\beta}$ получим

$$\nu(x)=D_{-1,x}^{1-\alpha-\beta}a_1(x)\tau(x)+b_1(x), x\in(-1,c), \tag{1.11}$$

где

$$a_1(x)=\frac{2^{1-\alpha-\beta}(1+x)^{1-\beta}a(x)}{\gamma_2\Gamma(1-\beta)}-\frac{\gamma_1\Gamma(\alpha)}{\gamma_2\Gamma(1-\beta)},$$

$$b_1(x)=\left(\frac{2}{m+2}\right)^{1-\alpha-\beta}\frac{(1+x)^{1-\beta}}{\gamma_2\Gamma(1-\beta)}D_{-1,x}^{1-\alpha-\beta}b(x),$$

соотношение (1.11) является первым функциональным соотношением между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$ привнесенным на интервал $(-1,1)$ оси $y=0$ из области D^-.

2. Единственность решения задачи BSF.

Единственность решения задачи BSF приведено в работе [23, с.675-683] для полносты и непрерывности изложения текста статьи мы приведем здесь и доказательство единственности решения задачи BSF.

Теорема 2.1. *Пусть* $\varphi_1(x)\equiv 0,\ \varphi_2(x)\equiv 0,\ b(x)\equiv 0,\ f(x)\equiv 0,$

$$a_1(x)>0, a_1^{'}(x)>0,\ 0<\mu(x)<1, \tag{2.1}$$

тогда если существует решение задачи BSF в области $D^+\bigcup J_1\bigcup J\bigcup J_2$ *то оно тождественно равно нулю.*

Доказательство. Рассмотрим конечную область $D_R=D_R^+\bigcup D^-\bigcup J$ Решение $u(x,y)$ задачи BSF рассмотрим в области D_R и покажем, что функция $u(x,y)$ удовлетворяющее условиям теоремы 2.1 своего наибольшего положительного значения (НПЗ) и наименьшего отрицательного значения (НОЗ) в области $\overline{D_R^+}$ достигает в точках кривой $\overline{\sigma_R}$. Пусть (x_0,y_0) -точка НПЗ функции $u(x,y)$ в области $\overline{D_R^+}$. В силу принципа Хопфа [4.с.51] функция $u(x,y)$ своего НПЗ во внутренних точках области D_R^+ не достигает, следовательно $(x_0,y_0)\notin D_R^+$. Допустим, что функция $u(x,y)$ своего НПЗ в области $\overline{D_R^+}$ достигает на отрезке $[-R,R]$ -оси $y=0$.

Здесь расмотрим четыре случая возможного расположения точка $(x_0,0)$ на отрезке $[-R,R]$ -оси $y=0$.

1. Пусть $x_0\in[-R,-1]\bigcup[1,R]$, так как на этих отрезках $\varphi_1(x)\equiv 0,\ \varphi_2(x)\equiv 0$, тогда функция $u(x,y)$ своего НПЗ не достигает в этих точких т.е. $x_0\notin[-R,-1]\bigcup[1,R]$;

2. Пусть $x_0,\in(-1,c)$. В этом случае в силу принципа экстремума для операторов дифференцирования дробного порядка $D_{a,x}^l$, $D_{x,b}^l$, где $l>0$, [4,с16]т.е, в точке x_0- наибольшего положительного значения НПЗ функции $\tau(x)$ имеем $D_{-1,x}^{1-\alpha-\beta}a_1(x)\tau(x)\mid_{x=x_0}>0$ [4,с.19] отсюда следуют, что правая часть равенства (1.11) (с $b(x)\equiv 0$) также строго положительна, следовательно его и левая часть также положительна при $x=x_0$, что в силу условия сопряжения (1.2) противоречить принципу Заремба - Жиро : $\nu(x_0)>0$ [5.с.74].

3. Пусть $x_0\in(c,1)$. Тогда в силу (1.6)(с $f(x)\equiv 0$), $\tau(p(x))=\mu(x)\tau(x)<\tau(x)$ где, $x\in(-1,c)$, $p(x)\in(c,1)$, $0<\mu(x)<1$ т.е значение функции $\tau(p(x))$ на EB меньше чем значение функции $\tau(x)$ на AE, следовательно функции $u(x,y)$ своего НПЗ не достигает и на интервале EB, т.е $x_0\notin(c,1)$.

4. Пусть $x_0=c$. С учетом $p(c)=c$ в силу (1.6^*) $(c\ f(x)\equiv 0)$ имеем $\tau(c)=\mu(c)\tau(c)$, отсюда в силу неравенства $0<\mu(c)<1$ имеем $\tau(c)=0$ следовательно, точка $(c,0)$ не является точкой НПЗ функции $u(x,y)$ в области $\overline{D_R^+}$.

Таким образом, из рассмотренных случаев возможного расположения точки $(x_0,0)$ на отрезке AB и принципа Хопфа заключаем, что решение $u(x,y)$ удовлетворяюших условиям (2.1) теоремы 2.1 своего НПЗ в области $\overline{D_R^+}$ достигает только на нормальной кривой $\overline{\sigma_R}$.

Аналогичным методом как в случае НПЗ функции $u(x,y)$ доказывается, что функция $u(x,y)$ при выполнений условиям (2.1) теоремы 2.1 своего НОЗ также достигает на нормальной кривой $\overline{\sigma_R}$.

Таким образом, решение $u(x,y)$ задачи BSF удовлетворяюшее условиям (2.1) теоремы 2.1 в области D_R^+ своего НПЗ и НОЗ достигает только в точках нормальной кривой $\overline{\sigma_R}$. Отсюда и в силу (1.3), для $\forall \varepsilon > 0$ существует такое $R_0(\varepsilon)$, что при $R > R_0(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$|u(x,y)| < \varepsilon,\ (x,y) \in \overline{\sigma_R},$$

следовательно, это неравенство выполняется и в области $\overline{D_R^+}$. В силу произвольности R неравенство $-\varepsilon \le u(x,y) \le \varepsilon$ имеет место всюду на $D^+ \bigcup J_1 \bigcup J \bigcup J_2$. Следовательно в силу произвольности $\varepsilon > 0$, при $R \to +\infty$ заключаем, что $u(x,y) \equiv 0$ в области $D^+ \bigcup J_1 \bigcup J \bigcup J_2$. Теорема 2.1 доказана.

Следствие. Задача BSF может иметь не более одного решения. Действительно из теоремы 2.1 следует, что $u(x,y) \equiv 0$ в $D^+ \bigcup J_1 \bigcup J \bigcup J_2$ отсюда

$$\lim_{y \to +0} u(x,y) \equiv 0,\ x \in (-\infty, +\infty),\ \lim_{y \to +0} y^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0,\ x \in (-\infty, +\infty).$$

Тогда в силу непрерывности искомого решения и условия сопражения (1.2) имеем

$$\lim_{y \to -0} u(x,y) \equiv 0,\ \forall x \in \bar{J},\ \lim_{y \to -0} (-y)^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0,\ \forall x \in J. \tag{2.2}$$

Теперь в области D^- восстанавливая решение $u(x,y)$ с помошью формулы Дарбу (1.7) с нулевыми данными (2.2) получим, что $u(x,y) \equiv 0$ и в области $\overline{D^-}$, следовательно $u(x,y) \equiv 0$ в $\overline{D}$. Следствие доказано.

3. Существование решения задачи BSF.

3.1 Вывод второго функционального соотношения между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$.

Решение задачи Дирихле для уравнения (1.1) в полуплоскости $y > 0$ удовлетворяюшее условию

$$u(x,+0) = \tau(x),\ x \in (-\infty, +\infty), \tag{3.1}$$

дается формулой,

$$u(x,y) = k_2(1-\beta_0) y^{1-\beta_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \tau(t) \left(r_0^2\right)^{a_0 - 1} \exp\left(2b_0 \arcsin \frac{t-x}{r_0}\right) dt, \tag{3.2}$$

$$-\infty < x < +\infty,\ y \ge 0,$$

где

$$k_2 = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{4}{m+2}\right)^{1-2a_0} \frac{\Gamma(1-\delta)\Gamma(1-\bar{\delta})}{\Gamma(2-\delta-\bar{\delta})},\ 2a_0 = \alpha + \beta,\ \delta = a_0 + b_0 i,\ b_0 = \frac{\alpha_0}{m+2},$$

$$r_0^2 = (x-t)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2}.$$

В силу краевого условия (1.4), в промежутках $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$ значения для функции $\tau(x)$ известные величины с учетом этого замечания в формулу (3.2) промежуток интегрирования $(-\infty, +\infty)$ разбивая на три промежутка : $(-\infty, -1), (-1, 1), (1 + \infty)$ запишем его в виде

$$u(x,y) = k_2(1-\beta_0) y^{1-\beta_0} \int_{-1}^{1} \tau(t) \left(r_0^2\right)^{a_0 - 1} \exp\left(2b_0 \arcsin \frac{t-x}{r_0}\right) dt +$$

$$+F(x,y),\ -\infty < x < +\infty,\ y \ge 0, \tag{3.3}$$

где

$$F(x,y)=k_2(1-\beta_0)y^{1-\beta_0}\left\{\int\limits_{-\infty}^{-1}\varphi_1(t)\left(r_0^2\right)^{a_0-1}\exp\left(2b_0\arcsin\frac{t-x}{r_0}\right)dt+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{1}^{+\infty}\varphi_2(t)\left(r_0^2\right)^{a_0-1}\exp\left(2b_0\arcsin\frac{t-x}{r_0}\right)dt\right\}.$$

-известная функция.

Из формула (3.3) нетрудно получить соотношение

$$\nu(x)=-k_2(1-\beta_0)\frac{m+2}{2}\int\limits_{-1}^{1}\tau'(t)\left[(x-t)|x-t|^{2a_0-2}\exp\left(2b_0\arcsin\frac{t-x}{|t-x|}\right)\right]dt+$$

$$+\Phi(x),\ x\in(-1,1),\tag{3.4}$$

где

$$\Phi(x)=\lim_{y\to+0}y^{\beta_0}\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=-k_2(1-\beta_0)\frac{m+2}{2}\left(e^{b_0\pi}\int\limits_{-\infty}^{-1}\frac{\tau'(t)dt}{(x-t)^{1-2a_0}}-e^{-b_0\pi}\int\limits_{1}^{\infty}\frac{\tau'(t)dt}{(x-t)^{1-2a_0}}\right).$$

Соотношение (3.4) является вторым функциональным соотношением между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$ привнесённое на интервал $J=(-1,1)$ оси $y=0$ из области D^+.

3.2. Вывод нестандартного сингулярного интегрального уравнения. Из равенства (1.11) в силу (3.4) исключая $\nu(x)$, т.е выражение для $\nu(x)$ из (3.4) подставляя в правую часть равенства (1.11) имеем

$$-k_2(1-\beta_0)\frac{m+2}{2}\int\limits_{-1}^{1}\tau'(t)\left[(x-t)|x-t|^{2a_0-2}\exp\left(2b_0\arcsin\frac{t-x}{|t-x|}\right)\right]dt=$$

$$=D_{-1,x}^{1-2_0}a_1(x)\tau(x)+b_2(x),x\in(-1,c),\tag{3.5}$$

где $b_2(x)=b_1(x)-\Phi(x)$ Имеет место тождество

$$A(x)=\int\limits_{-1}^{1}\tau'(t)\left[(x-t)|x-t|^{2a_0-2}\exp\left(2b_0\arcsin\frac{t-x}{|t-x|}\right)\right]dt=$$

$$=e^{-\pi b_0}D_{-1,x}^{1-2a_0}\tau(x)+e^{\pi b_0}D_{x,1}^{1-2a_0}\tau(x),\ x\in(-1,c).\tag{3.6}$$

Дейсвительно, преобразуем выражение (3.6) т.е промежуток интегрирования (-1,1) разбивая на промежутки $(-1,x]$ и $[x,1)$ имеем

$$A(x)=\int\limits_{-1}^{x}\tau'(t)\left[(x-t)|x-t|^{2a_0-2}\exp\left(2b_0\arcsin\frac{t-x}{|t-x|}\right)\right]dt+$$

$$+\int\limits_{x}^{1}\tau'(t)\left[(x-t)|x-t|^{2a_0-2}\exp\left(2b_0\arcsin\frac{t-x}{|t-x|}\right)\right]dt=$$

$$=e^{-\pi b_0}D_{-1,x}^{1-2\alpha}\tau(x)+e^{\pi b_0}D_{x,1}^{1-2\beta}\tau(x),\ x\in(-1,c).\tag{3.7}$$

Отсюда в силу определения несобственных интегралов от неограниченной функции имеем

$$A(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[e^{-\pi b_0}\int_{-1}^{x-\varepsilon}\frac{\tau'(t)dt}{(x-t)^{1-2a_0}}-e^{\pi b_0}\int_{x+\varepsilon}^{1}\frac{\tau'(t)dt}{(t-x)^{1-2a_0}}\right].$$

Здесь выполнив операцию интегрирования по частям получим

$$A(x)=e^{-2b_0}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\varepsilon^{2b_0-1}\tau(x-\varepsilon)+(2a_0-1)\int_{-1}^{x-\varepsilon}\frac{\tau(t)dt}{(x-t)^{1-2a_0}}\right]+$$

$$+e^{\pi b_0}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\varepsilon^{2b_0-1}\tau(x+\varepsilon)+(2a_0-1)\int_{x+\varepsilon}^{1}\frac{\tau(t)dt}{(t-x)^{1-2a_0}}\right],\ x\in(-1,c),\tag{3.8}$$

с учетом тождеств

$$(2a_0-1)\int_{-1}^{x-\varepsilon}\frac{\tau(t)dt}{(x-t)^{2-2a_0}}=\frac{d}{dx}\int_{-1}^{x-\varepsilon}\frac{\tau(t)dt}{(x-t)^{1-2a_0}}-\varepsilon^{2a_0-1}\tau\left(x-\varepsilon\right),$$

$$(2a_0-1)\int_{x+\varepsilon}^{1}\frac{\tau(t)dt}{(t-x)^{2-2a_0}}=-\frac{d}{dx}\int_{x+\varepsilon}^{1}\frac{\tau(t)dt}{(t-x)^{1-2a_0}}-\varepsilon^{2a_0-1}\tau\left(x+\varepsilon\right),$$

соотношение (3.8) запишем в виде

$$A(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[e^{-\pi b_0}\frac{d}{dx}\int_{-1}^{x-\varepsilon}\frac{\tau(t)dt}{(x-t)^{1-2a_0}}-e^{\pi b_0}\frac{d}{dx}\int_{x+\varepsilon}^{1}\frac{\tau(t)dt}{(t-x)^{1-2a_0}}\right].\tag{3.9}$$

В (3.9) здесь переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$, получим

$$A(x)=e^{-\pi b_0}\frac{d}{dx}\int_{-1}^{x}\frac{\tau(t)dt}{(x-t)^{1-2a_0}}-e^{\pi b_0}\frac{d}{dx}\int_{x}^{1}\frac{\tau(t)dt}{(t-x)^{1-2a_0}}=$$

$$=e^{-\pi b_0}D_{-1,x}^{1-2\alpha}\tau(x)+e^{\pi b_0}D_{x,1}^{1-2\beta}\tau(x),\ x\in(-1,c).\tag{3.10}$$

Тождество (3.7) доказана.

В силу (3.7) уравнении (3.5) запишем в виде

$$-k_2(1-\beta_0)\frac{m+2}{2}\left[e^{-\pi b_0}D_{-1,x}^{1-2a_0}\tau(x)+e^{\pi b_0}D_{x,1}^{1-2a_0}\tau(x)\right]=$$

$$=D_{-1,x}^{1-2a_0}a_1(x)\tau(x)+b_2(x),\ x\in(-1,c).\tag{3.11}$$

Применяя оператор интегрирования дробного порядка: $D_{-1,x}^{2a_0-1}$ к равенству (3.11), с учетом $\tau(-1)=0$ и тождеств [4,с.8,с.24]

$$D_{-1,x}^{2a_0-1}D_{-1,x}^{1-2a_0}\tau(x)=\tau(x),$$

$$D_{-1,x}^{2a_0-1}D_{x,1}^{1-2a_0}\tau(x)=cos(2a_0\pi)\tau(x)-\frac{sin(2a_0\pi)}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{1-2a_0}\frac{\tau(t)dt}{t-x},$$

уравнение (3.11) запишем в виде

$$\tau(x)+A_0(x)\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{1-2a_0}\frac{\tau(t)dt}{t-x}=b_4(x),\ x\in(-1,c),\tag{3.12}$$

$$\mu_0=-k_2(1-\beta_0)\frac{m+2}{2}e^{-\pi b_0},\ \mu_1=-k_2(1-\beta_0)\frac{m+2}{2}e^{\pi b_0},$$

где

$$A_0(x)=\frac{sin(2a_0\pi)}{\pi(\mu_0-\mu_1cos(2a_0\pi)-a_1(x))},\ b_4(x)=\frac{b_3(x)}{\mu_0-\mu_1cos(2a_0\pi)-a_1(x)}$$

$$b_3(x) = D_{-1,x}^{2a_0-1} b_2(x).$$

-известные функции.

Заметим,что в (3.12) $x \in (-1, c)$ поэтому уравнение (3.12) имеет сингулярную особенность только тогда, когда переменная интегрирования $t \in (-1, c)$. С целью выделения сингулярной части уравнения (3.12) промежуток интегрирования (-1,1) разобьем на два интервала $(-1, c)$, и $(c, 1)$ и уравнение (3.12) запишем в виде

$$\tau(x) + A_0(x) \int_{-1}^{c} \left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{1-2a_0} \frac{\tau(t)dt}{t-x} + A_0(x) \int_{c}^{1} \left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{1-2a_0} \frac{\tau(t)dt}{t-x} = \\ = b_4(x),\ x \in (-1, c). \tag{3.13}$$

Во втором интеграле левой части (3.13),сделав замену переменного интегрирования $t = p(s)$ получим, уравнение

$$\tau(x) + A_0(x) \int_{-1}^{c} \left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{1-2a_0} \frac{\tau(t)dt}{t-x} + kA_0(x) \int_{-1}^{c} \left(\frac{1+x}{1+p(s)}\right)^{1-2a_0} \frac{\tau(p(s))ds}{p(s)-x} = \\ = b_4(x),\ x \in (-1, c). \tag{3.14}$$

В силу аналога условия Франкля (1.6^*) уравнения (3.14) имеет вид

$$\tau(x) + A_0(x) \int_{-1}^{c} \left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{1-2a_0} \frac{\tau(t)dt}{t-x} = -kA_0(x) \int_{-1}^{c} \left(\frac{1+x}{1+p(s)}\right)^{1-2a_0} \frac{\mu(s)\tau(s)ds}{p(s)-x} + \\ + b_5(x),\ x \in (-1, c), \tag{3.15}$$

где

$$b_5(x) = -kA_0(x) \int_{-1}^{c} \left(\frac{1+x}{1+p(s)}\right)^{1-2a_0} \frac{f(s)ds}{p(s)-x} + b_4(x)$$

-известная функция

Сингулярное интегральное уравнение (3.15) характерно тем, что с учетом $p(c) = c$ ядро интегрального оператора правой части уравнения (3.15) имеет изолированную особенность первого порядка в точке $(x, s) = (c, c)$ следовательно интегральный оператор правой части (3.15) не является фредгольмовым оператором и поэтому оно выделено отдельно.

3.3. Регуляризация нестандартного сингулярного интегрального уравнения (3.15).

Временно считая правую часть уравнения (3.15) известной функцией запишем его в виде

$$\tau(x) + A_0(x) \int_{-1}^{c} \left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{1-2a_0} \frac{\tau(t)dt}{t-x} = g_0(x),\ x \in (-1, c), \tag{3.16}$$

где

$$g_0(x) = -kA_0(x) \int_{-1}^{c} \left(\frac{1+x}{1+p(s)}\right)^{1-2a_0} \frac{\mu(s)\tau(s)ds}{p(s)-x} + F(x),\ x \in (-1, c), \tag{3.17}$$

$F(x) = b_5(x)$-известная функция.

Решение уравнения (3.16) будем искать в классе функций Гелдера, где функция $(1+x)^{2a_0-1}\tau(x)$ может быть неограниченной при $x = -1$ и ограниченной при $x = c$. т.е. в классе $h(c)$ [4.с.43].

Теорема 3.1. *Если $g_0(x)$ удовлетворяет условию Гельдера при $x \in (-1, c)$ то решение уравнения (3.16) в классе функций H, в котором функция $(1+x)^{2a_0-1}\tau(x)$ может быть неограниченной в точке $x = -1$, и ограниченной на правом конце интервала $(-1, c)$ т.е. в классе $h(c)$ [4.с.43]. выражается формулой*

$$\tau(x) = \frac{g_0(x)}{1+\pi^2 A_0^2(x)} - \frac{A_0(x)}{1+\pi^2 A_0^2(x)} \int_{-1}^{c} \left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{1-2a_0+\delta_0} \left(\frac{c-t}{c-x}\right)^{\delta_1} \times \\ \times \frac{\delta_1^*(x)}{\delta_1^*(t)} \frac{1+\pi A_0(x)i}{1+\pi A_0(t)i} \cdot \frac{g_0(t)dt}{t-x},\ x \in (-1, c), \tag{3.18}$$

где $\delta_0 = (arctg\pi A_0(-1))/\pi, \delta_1 = (arctg\pi A_0(c))/\pi, \delta_1^*(x) = e^{\pi\delta_0 i}\exp(\Psi_0(x)), \delta_0 < 2a_0$
$\Psi_0(x) = \int\limits_{-1}^{c} \frac{A_0'(t)ln|t-x|dt}{1+\pi^2 A_0^2(t)}$.

Доказательство. Доказательства Теоремы 3.1 проведем в три этапа.

1. Сведение вопроса о решении уравнение (3.16) к краевой задаче Римана. Введя обозначения

$$\rho(x) = (1+x)^{2a_0-1}\tau(x),\ g(x) = (1+x)^{2a_0-1}g_0(x), \tag{3.19}$$

уравнение (3.16) запишем в виде

$$\rho(x) - A_0(x)\int\limits_{-1}^{c}\frac{\rho(s)ds}{s-x} = g(x),\ x\in(-1,c). \tag{3.20}$$

Для решения уравнения (3.20) применим метод Карлемана, для этого в комплексной плоскости $\mathbb{C} = \{z = x+iy\}$ введем функцию

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-1}^{c}\frac{\rho(t)dt}{t-z}, \tag{3.21}$$

которая голоморфна вне отрезка [-1,c] действительной оси и исчезает на бесконечности. В силу формул Сохоцкого- Племеля [4.с.42], для (3.21) имеем

$$\Phi^+(x) = \frac{\rho(x)}{2} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-1}^{c}\frac{\rho(t)dt}{t-x},\ \ \Phi^-(x) = -\frac{\rho(x)}{2} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-1}^{c}\frac{\rho(t)dt}{t-x}, \tag{3.22}$$

где $\Phi^+(x)(\Phi^-(x))$ предельные значения функции $\Phi(z)$ когда z стремиться к точке $(x,0)$ действительной оси из верхней (нижней) полуплоскости. Из (3.22) имеем

$$\Phi^+(x) + \Phi^-(x) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\rho(t)dt}{t-x}, \tag{3.23}$$

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = \rho(x). \tag{3.24}$$

В силу (3.23) и (3.24) уравнение (3.20) примет вид

$$(1+\pi A_0(x)i)\Phi^+(x) - (1-\pi A_0(x)i)\Phi^-(x) = g(x),$$

или

$$\Phi^+(x) - \frac{1-\pi A_0(x)i}{1+\pi A_0(x)i}\Phi^-(x) = \frac{g(x)}{1+\pi A_0(x)i},\ x\in(-1,c). \tag{3.25}$$

Чтобы получить задачу Римана, мы должны условие (3.25) продолжит на промежуток $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$, для этого введем функции

$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\pi A_0(x)i}{1+\pi A_0(x)i} & -1<x<c, \\ 1,\ x\notin(-1,c); \end{cases} \tag{3.26}$$

$$H(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)}{1+\pi A_0(x)i}, & -1<x<c, \\ 0, \quad x\notin(-1,c). \end{cases} \tag{3.27}$$

В силу (3.26) и (3.27) уравнение (3.25) запишем в виде

$$\Phi^+(x) - G(x)\Phi^-(x) = H(x),\ x \in (-\infty, +\infty). \tag{3.28}$$

2. Сведение задачи Римана к задаче о скачке. Таким образом, решение уравнения (3.16) эквивалентно сведана к решению задачи Римана (3.28) [4.с.41], при дополнительном условии $\Phi(\infty) = 0$. Эту задачу сведем к задаче о скачке, для этого решим соответствуюшую однородную задачу

$$X^+(x) - G(x)X^-(x) = 0. \tag{3.29}$$

Одно из частных решений уравнения (3.29) есть функция

$$X(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-1}^{c}\frac{\ln G(t)dt}{t-z}\right\},$$

Здесь выполнив операцию интегрирования по частям :

$$u = \ln G(t),\ du = \frac{1}{G(t)}G'(t)dt = \frac{-2\pi A_0^{'}(t)idt}{1+\pi^2 A_0^2(t)}$$

$$dv = \frac{1}{t-z}dt,\ v = \ln(t-z).$$

Решение $X(z)$ уравнения (3.29) запишем в виде

$$X(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\left[\ln G(t)\cdot\ln(t-z)\,|_{-1}^{c} + 2\pi i\int\limits_{-1}^{c}\frac{\ln(t-z)A_0^{'}(t)dt}{1+\pi^2A_0^2(t)}\right]\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\left[\ln G(c)\cdot\ln(c-z) - \ln G(-1)\cdot\ln(-1-z)\right] + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{-1}^{c}\frac{\ln(t-z)A_0^{'}(t)dt}{1+\pi^2A_0^2(t)}\right\}. \tag{3.30}$$

В (3.30) вычислим $lnG(-1)$ и $lnG(c)$

а) Сначала вычислим $lnG(-1)$:

$$\ln G(-1) = \ln\frac{1-\pi A_0(-1)i}{1+\pi A_0(-1)i} = \ln\left|\frac{1-\pi A_0(-1)i}{1+\pi A_0(-1)i}\right| +$$

$$+i\arg(1-\pi A_0(-1)) - i\arg(1+\pi A_0(-1))2k\pi i = -2\pi\delta_0 i,$$

где $\delta_0 = (\mathrm{arctg}(\pi A_0(-1)))/\pi, k = 0;$

в) Теперь вычислим $lnG(c)$:

$$\ln G(c) = \ln\frac{1-\pi A_0(c)i}{1+\pi A_0(c)i} = \ln\left|\frac{1-\pi A_0(c)i}{1+\pi A_0(c)i}\right| + i\arg(1-\pi A_0(c)i) - i\arg(1+\pi A_0(c)i)2k\pi i = -2\pi\delta_1 i, k = 0;$$

где $\delta_1 = (\mathrm{arctg}\,(\pi A_0(c)))/\pi,$

Таким образом, в сила вычислиных значений $lnG(-1)$ и $lnG(c)$ функцию $X(z)$ запишем в виде

$$X(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\left[-2\pi\delta_1 i\ln(c-z) + 2\pi\delta_0 i\ln(-1-z)\right] + \int\limits_{-1}^{1}\frac{A_0'(t)\ln(t-z)}{1+\pi^2A_0^2(t)}dt\right\}. \tag{3.31}$$

Введя ибозначение

$$\Psi_0(z) = \int\limits_{-1}^{c} \frac{A_0'(t)\ln(t-z)}{1+\pi^2 A_0^2(t)}dt,$$

равенство (3.31) запишем в виде

$$X(z) = \exp\{-\delta_1 \ln(c-z) + \delta_0 \ln(-1-z) + \Psi_0(z)\} =$$

$$= \exp\{\delta_0 \ln(-1-z) - \delta_1 \ln(c-z)\} \cdot \exp\{\Psi_0(z)\}.$$

Отсюда вычислим предельные значения функции $X(z)$ на действительной оси $y = 0$

$$X^+(x) = (1+x)^{\delta_0}(c-x)^{-\delta_1} e^{-\pi\delta_0 i}\delta^*(x),\ X^-(x) = (1+x)^{\delta_0}(c-x)^{-\delta_1} e^{\pi\delta_0 i}\delta^*(x). \tag{3.32}$$

где $\delta^*(x) = \exp\{\Psi_0(x)\}$. Таким образом, функцию $G(x)$ можно представить в факторизованном виде $G(x) = X^+(x)/X^-(x)$ [22.с.33]. С учетом этого представления для $G(x)$, уравнение (3.28) запишем в виде

$$\frac{\Phi^+(x)}{X^+(x)} - \frac{\Phi^-(x)}{X^-(x)} = \frac{H(x)}{X^+(x)},\ -\infty < x < +\infty, \tag{3.33}$$

т.е мы пришли к задаче о скачке для функции $\Phi(z)/X(z)$. Одно из частных решений уравнения (3.33) имеет вид

$$\frac{\Phi(z)}{X(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{H(t)dt}{X^+(t)(t-z)}. \tag{3.34}$$

С учетом определения (3.27), для функции $H(x)$ решение (3.34) запишим в виде

$$\frac{\Phi(z)}{X(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-1}^{c} \frac{g(t)dt}{X^+(t)(1+\pi A_0(t)i)(t-z)}. \tag{3.35}$$

Чтобы найти обшее решение уравнения (3.33), рассмотрим соответствуюшее ему однородное уравнение

$$\frac{\Phi^+(x)}{X^+(x)} - \frac{\Phi^-(x)}{X^-(x)} = 0. \tag{3.36}$$

Уравнение (3.36) показывает, что функция $\mathcal{X}(z) = \Phi(z)/X(z)$ голоморфна на всей плоскости кроме, быть может точек $z = -1, z = c$ которые могут быть только полюсами, на бесконечности функция $\mathcal{X}(z)$ равна нулю. В силу обобшенной теоремы Лиувилля об аналитическом продолжении [24.с.29] находим, что

$$\mathcal{X}(z) = \frac{c_0}{1+z} + \frac{c_1}{c-z}. \tag{3.37}$$

3. Нахождения решения уравнение (3.17) с помошью формулы Сохоцкого-Племяя. Таким образом, обшее решение уравнения (3.33) с учетом (3.35) и (3.37) имеет вид

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\int\limits_{-1}^{c} \frac{g(t)dt}{X^+(t)(1+i\pi A_0(t))(t-z)} + \left(\frac{c_0}{1+z} + \frac{c_1}{c-z}\right)X(z). \tag{3.38}$$

В силу (3.38), вычислив $\Phi^+(x)$ и $\Phi^-(x)$ из (3.24) получим

$$\rho(x) = \Phi^+(x) - \Phi^-(x) = \frac{g(x)}{2(1+i\pi A_0(x))}\left(1 + \frac{X^-(x)}{X^+(x)}\right) +$$

$$+\frac{X^+(x)}{2\pi i}\left(1 - \frac{X^-(x)}{X^+(x)}\right)\int\limits_{-1}^{1} \frac{g(t)}{X^+(t)(1+\pi A_0(t)i)}\frac{dt}{t-x} +$$

$$+\left(\frac{c_0}{1+x}+\frac{c_1}{c-x}\right)\left(X^+(x)-X^-(x)\right). \tag{3.39}$$

Здесь

$$1+\frac{X^-(x)}{X^+(x)}=\frac{2}{1-A_0(x)\pi i}, 1-\frac{X^-(x)}{X^+(x)}=\frac{-2A_0(x)\pi i}{1-A_0(x)\pi i}. \tag{3.40}$$

Следовательно в силу (3.32) и (3.40), решение (3.39) имеет вид

$$\rho(x)=\frac{g(x)}{1+\pi^2A_0^2(x)}-\frac{A_0(x)}{1+\pi^2A_0^2(x)}\int\limits_{-1}^{c}\left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{\delta_0}\left(\frac{c-t}{c-x}\right)^{\delta_1}\frac{\delta^*(x)}{\delta^*(t)}\times$$

$$\times\frac{(1+\pi A_0(x)i)g(t)dt}{(1+\pi A_0(t)i)(t-x)}+\left(\frac{c_0}{1+x}+\frac{c_1}{1-x}\right)\frac{(1+x)^{\delta_0}}{(c-x)^{\delta_1}}\left(e^{-\pi\delta_0 i}-e^{\pi\delta_0 i}\right). \tag{3.41}$$

С учетом обозначений (3.19) решение (3.41) запишем в виде

$$\tau(x)=\frac{g_0(x)}{1+\pi^2A_0^2(x)}-\frac{A_0(x)}{1+\pi^2A_0^2(x)}\int\limits_{-1}^{c}\left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{1-2a_0+\delta_0}\left(\frac{c-t}{c-x}\right)^{\delta_1}\times$$

$$\times\frac{\delta^*(x)}{\delta^*(t)}\frac{(1+\pi A_0(x)i)}{(1+\pi A_0(t)i)}\frac{g_0(t)dt}{t-x}-2\sin(\delta_0\pi)i\left(\frac{c_0}{1+x}+\frac{c_1}{1-x}\right)\frac{(1+x)^{1-2a_0+\delta_1}}{(c-x)^{\delta_1}}\delta^*(x)$$

$$x\in(-1,c), \tag{3.42}$$

отсюда с учетом непрерывности решения $\tau(x)$, в (3.42) положим $c_0=0,\ c_1=0$ т.е. получим формулу (3.18). Теорема 3.1. доказана.

3.4. Вывод и исследование интегрального уравнения Винера-Хопфа. Из (3.17) следует, что $g_0(x)$ линейный интегралньный оператор с ядром имеюшим единственную изолированную особенность первого порядка (с $p(s)\geq c, p(c)=c, x\leq c$) в точке $(x,s)=(c,c)$, следовательно этот оператор от $\tau(x)$ не является Фредгольмовым поэтому проведем далнейшее исследовние решения (3.18).

Выражение для $g_0(x)$ из (3.17) подставляя в (3.18) получим

$$\tau(x)=\frac{-kA_0(x)}{1+\pi^2A_0^2(x)}\int_{-1}^{c}\left(\frac{1+x}{1+p(s)}\right)^{1-2a_0}\frac{\mu(s)\tau(s)ds}{p(s)-x}+$$

$$+\frac{kA_0(x)A_0(c)}{1+\pi^2A_0^2(x)}\int\limits_{-1}^{c}\left(\frac{1+x}{1+p(s)}\right)^{1-2a_0}\mu(s)\tau(s)ds\int_{-1}^{c}\left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{1-2a_0+\delta_0}\left(\frac{c-t}{c-x}\right)^{\delta_1}\times$$

$$\times\frac{dt}{(t-x)(p(s)-t)}+R[\tau]+F_1(x),\ x\in(-1,c) \tag{3.43}$$

где

$$R[\tau]=\frac{kA_0(x)}{1+\pi^2A_0^2(x)}\int\limits_{-1}^{c}\left(\frac{1+x}{1+p(s)}\right)^{1-2a_0}\mu(s)\tau(s)ds\int\limits_{-1}^{c}\left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{1-2a_0+\delta_0}\left(\frac{c-t}{c-x}\right)^{\delta_1}\times$$

$$\times\left[\frac{\delta^*(x)}{\delta^*(t)}\frac{(1+\pi A_0(x)i)}{(1+\pi A_0(t)i)}A_0(t)-A_0(c)\right]\frac{dt}{(t-x)(p(s)-t)}-$$

-регулярный оператор,

$$F_1(x)=\frac{F(x)}{1+\pi^2A_0^2(x)}+\frac{A_0(x)}{1+\pi^2A_0^2(x)}\int\limits_{-1}^{c}\left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{1-2a_0+\delta_0}\left(\frac{c-t}{c-x}\right)^{\delta_1}\frac{\delta^*(x)}{\delta^*(t)}\frac{(1+\pi A_0(x)i)}{(1+\pi A_0(t)i)}\frac{F_(t)dt}{t-x}$$

-известная функция.

Вычислим внутренный интеграл из (3.43)

$$A(x,s)=\int_{-1}^{c}\left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{1-2a_0+\delta_0}\left(\frac{c-t}{c-x}\right)^{\delta_1}\frac{dt}{(t-x)(p(s)-t)}=$$

$$=-\frac{1}{p(s)-x}\left[\int_{-1}^{c}\left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{1-2a_0+\delta_0}\left(\frac{c-t}{c-x}\right)^{\delta_1}\frac{dt}{t-x}+\right.$$

$$\left.+\int_{-1}^{c}\left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{1-2a_0+\delta_0}\left(\frac{c-t}{c-x}\right)^{\delta_1}\frac{dt}{(p(s)-t)}\right]=\frac{1}{p(s)-x}[A_1(x)+A_2(x,s)], \tag{3.44}$$

где

$$A_1(x)=\int_{-1}^{c}\left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{1-2a_0+\delta_0}\left(\frac{c-t}{c-x}\right)^{\delta_1}\frac{dt}{t-x}, \tag{3.45}$$

$$A_2(x,s)=\int_{-1}^{c}\left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{1-2a_0+\delta_0}\left(\frac{c-t}{c-x}\right)^{\delta_1}\frac{dt}{p(s)-t}. \tag{3.46}$$

а). Вычислим $A_1(x)$ по формуле [5,с.125]

$$\int_a^b\frac{(x-a)^{\alpha-1}(b-x)^{\beta-1}}{x-y}dx=\frac{\pi ctg(\beta\pi)}{(y-a)^{1-\alpha}(b-y)^{1-\beta}}-(b-a)^{\alpha+\beta-2}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-1)}{\Gamma(\alpha+\beta-1)}\times$$

$$\times F\left(1,2-\alpha-\beta,2-\beta;\frac{b-y}{b-a}\right),\ x\in(-1,c), \tag{3.47}$$

где $F(a,b,c;x)-$ гипергеометрическая функция Гаусса, $B(a,b)-$ бета функция Эйлера [4,с.5]. В силу (3.47) и формулы автотрансформации [4,с.10]

$$F(a,b,c;x)=(1-x)^{c-a-b}F(c-a,c-b,c;x), \tag{3.48}$$

Из равенство (3.45) запишем в виде

$$A_1(x)=\pi ctg(\delta_1\pi)-\frac{\Gamma(2a_0-\delta_0)\Gamma(-\delta_1)(1+c)^{-\delta_1}}{\Gamma(2a_0-\delta_0-\delta_1)}(c-x)^{-\delta_1}\times$$

$$\times F(\delta_1,2a_0-\delta_0,1+\delta_1;\frac{c-x}{1+c}). \tag{3.49}$$

в). Теперь вычислим $A_2(x,s)$. В (3.46) выполним замену переменного интегрирование $t=-1+(1+c)\sigma$ и использую интегральное предеставление гипергеометрической функции и применяя формулу автотрансформации (3.48), имеем

$$A_2(x,s)=\frac{k^{\delta_1}(1+c)^{2a_0-1-\delta_0-\delta_1}\Gamma(2a_0-\delta_0)\Gamma(\delta_1+1)}{\Gamma(\delta_1+1+2a_0-\delta_0)(p(s)+1)^{\delta_1+1}}(1+x)^{1-2a_0+\delta_0}\times$$

$$\times\left(\frac{c-s}{c-x}\right)^{\delta_1}F(\delta_1+1,\delta_1+2a_0-\delta_0,\delta_1+2a_0-\delta_0+1;\frac{1+c}{d-ks+1}). \tag{3.50}$$

Теперь выражения для $A_1(x)$ и $A_2(x,s)$ из (3.49) и (3.50) подставляя в (3.44), получим

$$A(x,s)=\frac{1}{p(s)-x}[A_1(x)+A_2(x,s)]=\frac{1}{p(s)-x}\left[\pi ctg(\delta_1\pi)-(1+c)^{-\delta_1}\frac{\Gamma(2a_0-\delta_0)\Gamma(-\delta_1)}{\Gamma(2a_0-\delta_0-\delta_1)}\times\right.$$

$$\left.\times(c-x)^{-\delta_1}F(\delta_1,2a_0-\delta_0,1+\delta_1;\frac{c-x}{1+c})+\right.$$

$$\left.+\frac{k^{\delta_1}(1+c)^{2a_0-1-\delta_0-\delta_1}\Gamma(2a_0-\delta_0)\Gamma(\delta_1+1)}{\Gamma(\delta_1+1+2a_0-\delta_0)(p(s)+1)^{\delta_1+1}}(1+x)^{1-2a_0+\delta_0}\left(\frac{c-x}{c-s}\right)^{\delta_1}\times\right.$$

$$\times F(\delta_1+1,\delta_1+2a_0-\delta_0,\delta_1+1+2a_0-\delta_0;\frac{1+c}{d-ks+1})\Big]. \tag{3.51}$$

В силу (3.51) уравнение (3.43) преобразуем к виду

$$\tau(x)=\frac{-kA_0(x)(1-A_0(c)ctg(\delta_1\pi))}{1+\pi^2A_0^2(x)}\int_{-1}^{c}\left(\frac{1+x}{1+p(s)}\right)^{\delta_1}\frac{\mu(s)\tau(s)ds}{p(s)-x}+$$

$$+A_1k\int_{-1}^{c}\left(\frac{c-x}{c-s}\right)^{\delta_1}\frac{\mu(s)\tau(s)ds}{p(s)-x}+R_1[\tau]+F_1(x), \tag{3.52}$$

где

$$R_1[\tau]=R[\tau]+\frac{A_0(c)(1+c)^{2a_0-1-\delta_0-\delta_1}\Gamma(2a_0-\delta_0)\Gamma(-\delta_1)A_0(x)}{(1+\pi^2A_0^2(x))\Gamma(2a_0-\delta_0-\delta_1)}\int\limits_{-1}^{c}\left(\frac{1+x}{1+p(s)}\right)^{1-2a_0}\frac{\mu(s)\tau(s)ds}{p(s)-x}\times$$

$$\times\frac{(1+x)^{1-2a_0+\delta_0}}{(c-x)^{\delta_1}}F\Big(\delta_1,2a_0-\delta_0,1+\delta_1;\frac{c-x}{1+c}\Big)\frac{\mu(s)\tau(s)ds}{p(s)-x}+A_1\int\limits_{-1}^{c}\left(\frac{c-x}{c-s}\right)^{\delta_1^*}$$

$$\left[\frac{A_0(x)(1+x)^{1-2a_0+\delta_0}}{1+\pi^2A_0^2(x)}\left(\frac{1+c}{1+p(s)}\right)^{\delta_1+1}-\frac{A_0(c)(1+c)^{1-2a_0+\delta_0}}{1+\pi^2A_0^2(x)}\times\right.$$

$$\left.\times F(\delta_1+1,\delta_1+2a_0-\delta_0,\delta_1+1+2a_0-\delta_0;1)\right]$$

-регулярный оператор,

$$A_1=k^{\delta_1}A_0(c)(1+c)^{2a_0-\delta_0+1}\frac{\Gamma(2a_0-\delta_0)\Gamma(-\delta_1)}{\Gamma(-\delta_1+2a_0-\delta_0)}$$

В силу тождества $1-A_0(c)ctg(\delta_1\pi)=0$, уравнение (3.52) имеет вид

$$\tau(x)=A_1^*\int_{-1}^{c}\left(\frac{c-x}{c-s}\right)^{\delta_1}\frac{\tau(s)ds}{p(s)-x}+R_2[\tau]+F_1(x),\ x\in(-1,c) \tag{3.53}$$

где $A_1^*=kA_1\mu(c)$

$$R_2[\tau]=A_1\int_{-1}^{c}\left(\frac{c-x}{c-s}\right)^{\delta_1}\frac{\tau(s)ds}{p(s)-x}\left[\mu(s)-\mu(c)\right]+R_1[\tau]$$

-регулярный оператор. Таким образом, в силу тождеств $p(s)-c=k(c-s)$, $p(s)-x=k(c-s)+c-x$, уравнение (3.53) запишем виде

$$\tau(x)=A_1^*\int_{-1}^{c}\left(\frac{c-x}{c-s}\right)^{\delta_1}\frac{\tau(s)ds}{k(c-s)+c-x}+R_2[\tau]+F_1(x),\ x\in(-1,c). \tag{3.54}$$

В уравнение (3.54) сделаем замены переменных $x=c-(1+c)e^{-y}$, $s=c-(1+c)e^{-t}$, где $t\in[0,+\infty)$, $y\in[0,+\infty)$ и введя обозначение

$$\rho(y)=\tau[c-(1+c)e^{-y}]e^{(\delta_1-1/2)y}$$

уравнение (3.54) запишем в виде

$$\rho(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}K(y-t)\rho(t)dt+R_2(\rho)+F_2(y),\ x\in[0,+\infty). \tag{3.55}$$

где $K(x)=\frac{\sqrt{2\pi}A_1^*}{ke^{x/2}+e^{-x/2}},\ F_2(y)=F_1(c-(1+c)e^{-y})e^{(\delta_1-1/2)y}$.

$R_2(\rho)=R_1(\rho)e^{(\delta_1-1/2)y}-$ регулярный оператор.Заметим, что так как $\delta_1=(arctg\pi A_0(c))/\pi$ тогда имеет место неравенство $\delta_1-1/2<0$. Уравнение (3.55) является интегральным уравнением Винера-Хопфа [24.с.55].Это уравнение с помошью преобразования Фурье, подобно известному характерическому особому интегральному уравнению с ядром Коши приводиться к краевой задаче Римана и тем самым решается в квадратурах.Теоремы Фредгольма для интегральных уравнений типа свертки будут справедливы только в одном случае, когда индекс этих уравнений равно нулю.

Индексом χ уравнения (3.55) будет индекс выражения $1-K^\wedge(x)$ взятым с обратным знаком, т.е $\chi=-Ind(1-K^\wedge(x))$, здесь [24.с.56]

$$K^\wedge(x))=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}K(t)e^{ixt}dt=A_1^*\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ixt}dt}{ke^{t/2}+e^{-t/2}}=$$

$$=\frac{A_1^*\pi e^{-ixlnk}}{\sqrt{k}ch(\pi x)}=A^*(x)-iB^*(x)$$

где

$$A^*(x)=\frac{A_1^*\pi cos((lnk)x)}{\sqrt{k}ch(\pi x)},\ B^*(x)=\frac{iA_1^*\pi sin((lnk)x)}{\sqrt{k}ch(\pi x)} \tag{3.56}$$

Из (3.56) видно, что

$$\left.\begin{array}{l}\mid A^*(x)\mid\\ \mid B^*(x)\mid\end{array}\right\}\leq\frac{A_1^*\pi}{\sqrt{k}ch(\pi x)},$$

причем $A^*(x)=O(1/ch(\pi x)), B^*(x)=O(1/ch(\pi x))$ для достаточно больших $\mid x\mid$. Пусть

$$\frac{A_1^*\pi}{\sqrt{k}}=\frac{\pi(1-c)^{\delta_1+1/2}(1+c)^{2a_0-\delta_0-\delta_1+1/2}sin(2a_0\pi)\mu(c)\Gamma(\delta_1+1)\Gamma(2a_0-\delta_0)}{(\pi(\mu_0-\mu_1cos(2a_0\pi)-a_1(c))\Gamma(\delta_1+1+2a_0-\delta_0)}<1 \tag{3.57}$$

Заметим, что множество числовых параметров задача BSF удовлетворяющее условию (3.57) не пусто. Действительно, если параметр с достаточно близка к -1 тогда сумма $1+c$ достаточно мала и при таких значениях параметра с неравенство (3.57) выполняется.

Отсюда в силу условия (3.57) следует что,

$$\left.\begin{array}{l}\mid A^*(x)\mid\\ \mid B^*(x)\mid\end{array}\right\}\leq\frac{A_1^*\pi}{\sqrt{k}}=\frac{\pi(1-c)^{\delta_1+1/2}(1+c)^{2a_0-\delta_0-\delta_1+1/2}sin(2a_0\pi)\mu(c)\Gamma(\delta_1+1)\Gamma(2a_0-\delta_0)}{(\pi(\mu_0-\mu_1cos(2a_0\pi)-a_1(c))\Gamma(\delta_1+1+2a_0-\delta_0)}<1 \tag{3.58}$$

Сдедовательно

$$Re(1-K^\wedge(x))=1-A_1^*<1. \tag{3.59}$$

Таким образом, индекс χ уравнения (3.55) т е изменение аргумента комплекснозначной функции $1-K^\wedge(x)$ на действительной оси, выраженное в полных оборотах, взятое с обратным знаком с учетом неравенство (3.57) равен

$$\chi=-Ind(1-K^\wedge(x))=-\frac{1}{2\pi}[arg(1-K^\wedge(x))]\Big|_{-\infty}^{+\infty}=$$

$$-\frac{1}{2\pi}\left[arctg\frac{Im(1-K^\wedge(x))}{Re(1-K^\wedge(x))}\right]\Big|_{-\infty}^{+\infty}=-\frac{1}{2\pi}\left[arctg\frac{B^*(x)}{1-A^*(x)}\right]\Big|_{-\infty}^{+\infty}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[arctg\left(\frac{0}{1}\right)-arctg\left(\frac{0}{1}\right)\right]=0$$

так как $A^*(\pm\infty)=0,\ B^*(\pm\infty)=0$.Сдедовательно уравнение (3.55) однозначно редуцируется к интегралному уравнению Фредгольма второго рода, однозначная разрешимость которого следует из единственности решения задачи BSF.Теорема 3.1 доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе в неограниченной смешенной области для уравнения смешанного типа с особыми коэффициентами в первые исследована задача с неполным условие Бицадзе-Самарского на часта граничной характеристики и на части отрезка вырождения, с дополненным условием Франкля на отрезка вырождения. Нестандартная постановка задачи порождает рад новых подходов при исследование полученного нового неклассического сингулярного интегрального уравнения при решении которой последовательно применяется теория сингулярных интегральных уравнений и теория интегральных уравнений Винера-Хопфа. Полученные результаты являются значимым вкладом для развитие теории нелокальных задач типа Бицадзе-Самарского для уравнений смешанного типа с особыми коэффициентами.

Финансирование

Настоящая работа выполнена в рамках проекта ФЗ-202009211 Министерства высшего образования, науки и праваций Республики Узбекистан "Изучение корректности задач для уравнений смешанного типа с условиями Франкля и Бицадзе-Самарского на характеристики и на линии вырождения с помощью применения теории неклассических сингулярных интегральных уравнений". Агентство инновационного развития Республики Узбекистан при министерстве. Высшего образование, Наука и Инновационного развития Республики Узбекистан.

Список литературы

[1] Франкль Ф.И.: *Обтекание профилей газом с местной сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения.* Прикладная математика и механика. (2), 196-202 (1956).

[2] Девингталь Ю.В.: *О существовании и единственности решения одной задачи Ф.И.Франкля.* Известия вузов.Математика. **2**(3).39-51.(1958)

[3] Бицадзе А.В.,Самарский А.А.: *О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задачах .* ДАН СССР. **185** (4), 739-740 (1969).

[4] Смирнов М.М.: *Уравнения смешанного типа.* М., 304(1985).

[5] Салахитдинов М.С.,Мирсабуров М.: *Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами.* Ташкент "Университет"224(2005)

[6] Ruziev,M.X.,Yuldasheva,N.I.: *A problem of the Bitsadze-Samarskii type for mixed-type equations with singular coeffisients.* Uzb.Math.(68), 121-126(2024).

[7] Мирсабуров М., Тураев Р.Н., Мирзаев Ф.: *A nonlocal boundary value problem for a mixed type equation.* Uzb.Math. (69), 173-184(2025)

[8] Мирсабуров М., Тураев Р.Н.:*Задача в неограниченной области с усдовием Бицадзе-Самарского на части граничной характеристике и параллельной ей внутренней характеристики для уравнения Геллерстедта с сингулярным коеффициентом.* У .**60**(8),1074-1086(2024)

[9] Ruziev M.,Mirsaburova G.,Mamatmuminov D.: *A problem with an analogue of the Bitsadze–Samarskii condition for one class of degenerate hyperbolic equations.* "Bulletin of the Institute of Mathematics,7(1),103-111(2024)

[10] Мирсабурова Д.М.:*Задача с аналогом условия Бицадзе-Самарского на части граничной характеристике и параллельной ей внутренней характеристике для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом*// Бюллетень Института математики. (6)1,87-115(2023).

[11] Мирсабуров М. Маматмуминов Д.Т.:*Задача с аналогами условия Франкля на граничной характеристике и на отрезке вырождения и с общими условиями сопряжения для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом.* // Бюллетень Института математики. (5)7, 93-104(2024).

[12] Сабитов К.Б.: *К теории задачи Франкля для уравнения смешанного типа.* Изв.РАН.Сер.матем. **81**(1),101-138(2017).

[13] Мирсабурова У.М.: *Задача с аналогом условия Франкля на внутренней характеристике для уравнения смешанного типа // Дифференц. уравнения.* (6)57, 735-751 (2021).

[14] Ergasheva S.B.: *Problem with Tricomi and Frankl conditions on the one boundary characteristic for one class of mixed type equations.* Uzbek Mathematical Journal.(3)67,56-60 (2023).

[15] Мирсабуров М.:*Задача с аналогом условия Франкля на характеристике и на отрезке вырождения для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом.* Дифференц уравнения. (6)53,778-788(2017).

[16] Салахитдинов М.С.,Рузиев М.Х.:*О краевой задаче для уравнения смешанного типа с сингулярными коэффициентами в неограниченной области.*Узбекский Математический журнал.(1)124-128 (2017)

[17] Ruziev,M.X.,Yuldasheva,N.I.:*On a Boundary Value Problem for a Class of Equations Mixed Type.* Lobachevskii J.Math.(44)2916-2929(2023)

[18] Рузиев М.Х.:*Краевая задача для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом.*Узбекский Математический журнал.(2)100-108 (2016)

[19] Berdyshev A.S.:*Boundary Value problems and Their Spectral Proporties For Parabolic-Hyperbolic and Mixed-Composite Type E quations;*Abai Kzakh National Pedagogical University :Almaty,Kazakhstan,224(2015).

[20] Уринов А. К., Мирсабурова Д.М.: *Gellerstedt-Moiseev problem with data on parallel characteristics in the unbounded domain for a mixed type equation with singular coefficients* // Lobachevskii journal of mathematics. (3)45 (2024).

[21] Ruziev M.Kh.,Ressig M.,:*Tricomi type equations with terms of lower order.*International Journal Dynamical System and Diiferential Equations.6(1)1-15(2016)

[22] Ruziev M.Kh.:*A problem wits shifts on piece of boundary characteristic for Gellerstedt equation with singular coefficient in an unbounded domain.*Bulletin of the Institute of Mathematics.(1)27-42(2019)
[23] Мирсабуров.М.,Рузиева.З.Ф.: *О единственности задачи с непольным условием Бицадзе-Самарского для уравнения смешанного типа* EJAR 5(9)675-683(2025)
[24] Гахов.Ф.Д., Черский.Ю.И.: *Уравнения типа свертки.* М., "Наука".296(1978).

Problem with incomplete Bitsadze-Samarskii condition for a mixed-type equation

M.Mirsaburov, Z.F.Ruziyeva

Abstract

In this work, in a certain unbounded domain for a mixed-type equation with singular coefficients, the problem with an incomplete condition condition of the Bitsadze-Samarskii type on part of the boundary characteristic and on part of the degeneration segment and supplemented by analogue of the Frankl condition on the degeneration segment prove.The uniqueness of the solution to the problem is proven using the extremum principle of A.V.Bitsadze.When proving the existensce of a solution to a problem, the theory of the singular integral equations and the theory of Viner-Hopf are used.

Keywords

Mixed type equation; singular coefficient; Bitsadze-Samarskii condition; uniqueness of solution; existence of a solution to singular integral equation; equation of Viner-Hopf; index.

Affiliations

Мирахмат Мирсабуров
Address: Термезский государственный университет, Термез, Узбекистан.
e-mail: mirsaburov@mail.ru
ORCID ID: https://orcid.org/0009-0000-2394-5363

Рузиева Зухра Фахриддиновна
Address: Денауский институт предпринимательства и педагогики, Узбекистан;
e-mail: zuxraruziyeva00@gmail.com
ORCID ID: https://orcid.org/0009-0004-9474-8809