Uzbekistan Journal of Mathematics and Computer Science
Volume-1, Issue-2, Page 82–89 (2025)
DOI: https://doi.org/10.56143/ujmcs.v1i2.10
Research article

Задача со свободной границей для уравнения нелинейной диффузии

Расулов Мирожиддин Собиржонович* Умирхонов Масудхон Турахон угли

Аннотация

В данной работе рассматривается задача типа Стефана с двумя свободными границами для нелинейного уравнения теплопроводности в одномерном случае. Исследование нелинейных задач со свободными границами методом, основанным на построении априорных оценок. В связи с этим сначала устанавливаются некоторые начальные априорные оценки для решения рассматриваемой задачи. Затем задача сводится к задаче с фиксированной границей через замену переменных. Полученная задача имеет зависящие от времени и положения в пространстве коэффициенты с нелинейными слагаемыми. Далее построены априорные оценки типа Шаудера для решения уравнения с нелинейными слагаемыми и закрепленной границей. На основе полученных оценок установлена разрешимость исходной задачи.

Ключевые слова: *квазилинейное параболическое уравнение; свободная граница; априорные оценки; теорема существования и единственности.*

Предметная классификацие AMS (2020): *35K20, 35K59, 35R35*

1. Введение

Уравнения нелинейной диффузии с условиями свободной границы представляют собой важный класс математических моделей, широко используемых для описания процессов в физике, биологии, химии и технике. Эти уравнения характеризуются нелинейной зависимостью потока от градиента искомой величины, а свободная граница добавляет дополнительную сложность, связанную с динамическим изменением области, в которой происходит диффузия. Такие задачи возникают, например, при моделировании распространения тепла в средах с фазовыми переходами, фильтрации жидкостей в пористых средах, распространения биологических популяций или химических реакций с подвижными границами.

В настоящее время изучение задач со свободной границей интенсивно ведется с различных сторон (экспериментальных, численных и теоретических), предмет постоянно находит новые основания для приложений, продолжают возникать новые фундаментальные теоретические вопросы. Эти разработки, в частности, требуют новых аналитических и численных методов, а также усовершенствования существующих алгоритмов и инструментов для решения чрезвычайно сложных задач [7, 14, 21]. В работах широко изучались новые классы задач Стефана, которые возникают при моделировании природных процессов, включающие уравнения нелинейной диффузии с двумя подвижными границами [5, 6, 9, 15, 16, 19].

Во многих исследованиях термин диффузия является линейным [8]. Однако в целом на диффузию также влияет плотность компонентов, что, в свою очередь, приводит к нелинейной диффузии [1, 2, 22, 20]. Например, в работе

Received : *8–май–2025,* ***Accepted :*** *20–ноябрь–2025*
**** Corresponding author***

[18] авторы исследовали задачу со свободной границей для уравнения реакция-диффузия с нелинейным членом диффузии.

В этой работе рассмотрим краевую задачу для квазилинейного параболического уравнения с двумя неизвестными границами:

$$a\left(u\right)u_t = \left(d(u)u_x\right)_x, \quad (t,x) \in D, \tag{1.1}$$

$$u\left(0,x\right) = u_0\left(x\right), \quad h(0) \le x \le s(0), \tag{1.2}$$

$$u\left(t,s\left(t\right)\right) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{1.3}$$

$$u\left(t,h\left(t\right)\right) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{1.4}$$

$$s'\left(t\right) = -\mu u_x\left(t,s\left(t\right)\right), \quad 0 \le t \le T, \tag{1.5}$$

$$h'\left(t\right) = -\mu u_x\left(t,h\left(t\right)\right), \quad 0 \le t \le T, \tag{1.6}$$

где $D = \{(t,x) : 0 < t \le T, h\left(t\right) < x < s\left(t\right)\}$; $x = h\left(t\right)$ и $x = s\left(t\right)$ – свободные (неизвестные) границы, которые определяются вместе с функцией $u\left(t,x\right)$.

Относительно данных задачи предполагаются выполненными следующие условия:

a). $a\left(u\right) \ge a_0 > 0$, $a_0 = const$ и $a(u) \in C^{\gamma}(D)$, $0 < \gamma < 1$;

b). $d\left(u\right) \ge d_0 > 0$, $d_0 = const$ и $d(u) \in C^{1+\gamma}(D)$;

c). s_0, μ – положительные постоянные;

d). $u_0\left(x\right) > 0,\ h_0 < x < s_0;\ h\left(0\right) = h_0 = -s_0,\ s\left(0\right) = s_0;\ u_0'\left(h_0\right) > 0,\ u_0\left(h_0\right) = 0,\ u_0'\left(s_0\right) < 0,\ u_0\left(s_0\right) = 0;$ $\lim\limits_{x\to s_0} \frac{u_0(x)}{s_0 - x} = 0,\ \lim\limits_{x\to h_0} \frac{u_0(x)}{x - h_0} = 0.$

Задача (1.1)-(1.6) может рассматриваться как модель, описывающая распространение тепла или вещества с двойными свободными границами $x = h(t)$ и $x = s(t)$ в одномерной среде обитания где задаются граничные условия первого рода: $u(t,h(t)) = 0 = u(t,s(t))$. В общем случае, как концентрация вещества $u(t,x)$ означает движение в наружу вдоль неизвестных границ с течением времени. Предполагается, что скорость движения свободных границ пропорциональна нормированным градиентам концентрации вещества на этих границах, то есть

$$s'\left(t\right) = -\mu u_x\left(t,s\left(t\right)\right), \quad h'\left(t\right) = -\mu u_x\left(t,h\left(t\right)\right),$$

что соответствует классическому условию Стефана. Подробнее об физической интерпретации данного условия можно найти в работах [3, 4, 13].

Задача (1.1)-(1.6) исследована в работе [16] для случая $d(u) = const$.

2. Априорные оценки

В этом разделе установим некоторые априорные оценки шаудеровского типа, которые будут использованы при доказательстве глобальной разрешимости задачи.

Сначала с помощью метода, основанного на построения априорных оценок определим ограничении на параметры задачи, при которых она глобально разрешима. Первая, основополагающая оценка, дает ту начальную информацию, отправляясь от которой можно получать шаг за шагом, двигаясь вверх по шкале банаховых пространств, все более полные и точные сведения об изучаемом решении.

Теорема 2.1. *Пусть функции* $\left(s\left(t\right), h\left(t\right), u\left(t,x\right)\right)$ *являются решением задачи* (1.1)-(1.6). *Тогда справедливы следующие оценки:*

$$0 < u\left(t,x\right) \le M_1, \quad (t,x) \in \overline{D}, \tag{2.1}$$

$$0 < s'\left(t\right), \quad 0 < -h'\left(t\right), \quad 0 \le t \le T. \tag{2.2}$$

Кроме того, если $\frac{d}{dx}d\left(u\right)>0$, *то*

$$s'\left(t\right)\leq M_2, \quad 0\leq t\leq T. \tag{2.3}$$

$$-h'\left(t\right)\leq M_3, \quad 0\leq t\leq T, \tag{2.4}$$

где положительные константы M_1, M_2, M_3 *не зависят от* T.

Доказательство. Из задачи (1.1)-(1.6) по принципу максимума получим оценку (2.1).

Область D условно разделим на две части

$$D_1=\left\{(t,x):0<t\leq T,0<x<s\left(t\right)\right\}, \quad D_2=\left\{(t,x):0<t\leq T,h\left(t\right)<x<0\right\}.$$

Рассмотрим задачу для $u\left(t,x\right)$ в области D_1

$$\begin{cases} a\left(u\right)u_t=\left(d(u)u_x\right)_x, & (t,x)\in D_1, \\ u\left(0,x\right)=u_0\left(x\right), & 0\leq x\leq s_0, \\ u\left(t,0\right)>0, & 0\leq t\leq T, \\ u\left(t,s\left(t\right)\right)=0, & 0\leq t\leq T. \end{cases} \tag{2.5}$$

С учетом условий (1.3) и положительности функции $u\left(t,x\right)$ в области D, находим $u_x\left(t,s\left(t\right)\right)\leq 0$. Следовательно, из (1.5) получим $s'\left(t\right)>0$.

Теперь оценим снизу $u_x\left(t,s\left(t\right)\right)$. Для этого в задаче (2.5) произведя замену

$$v\left(t,x\right)=u\left(t,x\right)+N_1\left(x-s\left(t\right)\right)$$

и получим

$$\begin{cases} a\left(v\right)v_t-d(v)v_{xx}-\left(\frac{d}{dx}d\left(u\right)\right)v_x=-\left(a\left(v\right)s'\left(t\right)+\frac{d}{dx}d\left(u\right)\right)N_1, & (t,x)\in D_1, \\ v\left(0,x\right)=u_0\left(x\right)+N_1\left(x-s_0\right), & 0\leq x\leq s_0, \\ v\left(t,0\right)=u\left(t,0\right)-N_1 s\left(t\right), & 0\leq t\leq T, \\ v\left(t,s\left(t\right)\right)=0, & 0\leq t\leq T. \end{cases}$$

За счет выбора $N_1\geq\left\{\max\limits_x\frac{u_0(x)}{s_0-x},\frac{M_1}{s_0}\right\}$ всюду в D_1 имеем $v\left(t,x\right)\leq 0$. Отсюда

$$u\left(t,x\right)\leq N_1\left(s\left(t\right)-x\right), \quad 0\leq x\leq s\left(t\right).$$

Следовательно, $v_x\left(t,s\left(t\right)\right)=u_x\left(t,s\left(t\right)\right)+N_1\geq 0$. Тогда из условия Стефана (1.5) имеем $s'\left(t\right)\leq\mu N_1\equiv M_2$ в $0\leq t\leq T$.

А теперь докажем неравенство (2.4). Рассматривается задача

$$\begin{cases} a\left(u\right)u_t=\left(d(u)u_x\right)_x, & (t,x)\in D_2, \\ u\left(0,x\right)=u_0\left(x\right), & h_0\leq x\leq 0, \\ u\left(t,0\right)>0, & 0\leq t\leq T, \\ u\left(t,h\left(t\right)\right)=0, & 0\leq t\leq T. \end{cases}$$

С учетом условий $u\left(t,h\left(t\right)\right)=0$ и $u\left(t,x\right)>0$, находим $u_x\left(t,h\left(t\right)\right)>0$. Осталось показать, что $h'\left(t\right)\geq -M_3$ для $0\leq t\leq T$. Для этого введя функцию

$$w\left(t,x\right)=u\left(t,x\right)-N_2\left(x-h\left(t\right)\right) \tag{2.6}$$

получим задачу

$$\begin{cases} a\left(w\right)v_t-d(w)w_{xx}-\left(\frac{d}{dx}d\left(u\right)\right)w_x=\left(a\left(w\right)h'\left(t\right)+\frac{d}{dx}d\left(u\right)\right)N_2, & (t,x)\in D_2, \\ w\left(0,x\right)=u_0\left(x\right)-N_2\left(x-h_0\right), & h_0\leq x\leq 0, \\ w\left(t,0\right)=u\left(t,0\right)+N_2 h\left(t\right), & 0\leq t\leq T, \\ w\left(t,h\left(t\right)\right)=0, & 0\leq t\leq T. \end{cases}$$

Так как $h'(t) < 0$, то $a(w)\,w_t - d(w)w_{xx} - \left(\frac{d}{dx}d(u)\right)w_x < 0$ в D_2. Тем самым функция $w(t,x)$ не может достигать положительного максимума внутри области D_2. Если $N_2 \geq \max\left\{\max\limits_x \frac{u_0(x)}{x-h_0}, \frac{M_1}{-h_0}\right\}$, то легко добиться неположительности $w(t,x)$ на левой границе и в начальной момент времени. Таким образом, $w(t,x)$ неположительна в $\overline{D}_2$. Но тогда $w_x(t,h(t)) \leq 0$. Следовательно, с учетом (2.6) находим $u_x(t,x) \leq N_2$, что эквивалентно $h'(t) \geq -\mu N_2 \equiv M_3$. □

Теперь используя результаты работы [10] получим оценки для $|u_x|$ и $|u|_{1+\gamma}$. Для этого преобразуем независимые переменные

$$t = t, \quad y = \frac{2s_0 x}{s(t) - h(t)} - \frac{s(t) + h(t)}{s(t) - h(t)} s_0.$$

Тогда области D соответствует область $Q = \{(t,y) : 0 < t < T, -s_0 < y < s_0\}$, а ограниченная функция $v(t,y) = u(t,x)$ является решением начально-краевой задачи

$$v_t = A(t,y,v)\,v_{yy} + B(t,y,v,v_y)\,, \quad (t,y) \in Q, \tag{2.7}$$

$$v(0,y) = v_0(y)\,, \quad -s_0 \leq y \leq s_0, \tag{2.8}$$

$$v(t,s_0) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{2.9}$$

$$v(t,-s_0) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{2.10}$$

где $A(t,y,v) = \frac{d(v)}{a(v)}\rho(t)$, $B(t,y,v,v_y) = \varphi(t)\,v_y + \frac{d'(v)}{a(v)}\rho(t)\,v_y^2$, $\rho(t) = \frac{4s_0^2}{(s(t)-h(t))^2}$,

$$\varphi(t) = \frac{s'(t) - h'(t)}{s(t) - h(t)}\left(y + \frac{s(t) + h(t)}{s(t) - h(t)}\right) + \frac{s'(t)\,h(t) + s(t)\,h'(t)}{(s(t) - h(t))^2} 2s_0,$$

$$s'(t) = -\frac{2s_0\mu}{s(t) - h(t)} v_y(t,s_0)\,, \quad h'(t) = -\frac{2s_0\mu}{s(t) - h(t)} v_y(t,-s_0)\,.$$

Здесь и далее для функциональных пространств и норм в них мы будем придерживаться следующих обозначений. Пусть функция $v(t,y)$ определена на некотором множестве Ω; для любого числа $\gamma \in (0,1)$, и положим что

$$|v|_\gamma^\Omega = \sup_\Omega |v(t,y)| + \sup_{(t,y)\in\Omega,(\tau,\xi)\in\Omega} \frac{|v(t,y) - v(\tau,\xi)|}{\left(|t-\tau| + |y-\xi|^2\right)^{\gamma/2}},$$

$$|v|_{1+\gamma}^\Omega = |v|_\gamma^\Omega + |v_y|_\gamma^\Omega\,,$$

$$|v|_{2+\gamma}^\Omega = |v|_{1+\gamma}^\Omega + |v_{yy}|_\gamma^\Omega + |v_t|_\gamma^\Omega\,.$$

Будем говорить, что $v \in C^q$ $(q = 0, \gamma, 1+\gamma, 2+\gamma)$, если $|v|_q < \infty$ (т.е. соответствующая норма конечна).

При условии d). без ограничений общности можно предполагать, что $v_0(x) = 0$.

Теорема 2.2. *Пусть функция $v(t,y)$ непрерывна в $\overline{Q}$ вместе с производной v_y и удовлетворяет уравнению (2.7) всюду в $\overline{Q}$, за исключением, может быть, точек $y = 0$; предположим, что ограниченные функции $A(t,y,v)$, $B(t,y,v,p)$ для $(t,y) \in \overline{Q}$, $|v| \leq M_1$ и произвольных p удовлетворяют условиям*

$$A(t,y,v) \geq A_0 > 0, \quad \frac{|B(t,y,v,p)|}{A(t,y,v)} \leq K\left(p^2 + 1\right), \quad K > 0. \tag{2.11}$$

Тогда

$$|v_y(t,y)| \leq M_4(M_1, A_0, K, \delta)\,, \quad (t,y) \in Q^\delta. \tag{2.12}$$

Если $A_1 = \max\limits_{\overline{Q}} A$ в области $\{(t,y) \in \overline{Q}, |v| \leq M_1, |p| \leq M_4\}$ то

$$|v|_{\frac{2}{3}}^{Q^{2\delta}} \leq M_5(M_1, M_4, A_1, K, \delta)\,. \tag{2.13}$$

И если еще известно, что функция $v(t,y)$ обладает обобщенными производными $v_{ty}, v_{yy} \in L_2(Q)$, то существует такое $\gamma = \gamma(M_1, M_4, A_1, K, \delta)$, что

$$|v|_{1+\gamma}^{Q^{2\delta}} \le M_6\left(M_1, A_0, A_1, K, \delta\right), \quad 0 < \gamma < 1, \tag{2.14}$$

Если $v|_{\Gamma(t=0,y=\pm s_0)} = 0$, то оценки (2.12)-(2.14) справедливы и в $\overline{Q}$. Здесь $Q^\delta = \{(t,y) : 0 < \delta \le t \le T, \delta - s_0 \le y \le \delta + s_0\}$, $\Gamma(t=0, y=\pm s_0)$ −параболическая граница.

Доказательство. Так как установлены оценки $|u| \le M_1$, $|s'(t)| \le M_2$, $|h'(t)| \le M_3$, то в силу теорем 1, 3 работы [10] справедливы внутренние оценки (2.12)-(2.14).

Теперь перейдем оценки вплоть до границ для $|v_y|$. Так как $v\left|_{y=\pm s_0}\right. = 0$, поэтому продолжим функцию $v(t,y)$ через боковые стороны прямоугольника Q по правилу

$$v(t,y) = \omega(t, 2s_0 + y), \quad -3s_0 \le y \le -s_0, \tag{2.15}$$

$$v(t,y) = \omega(t, y - 2s_0), \quad s_0 \le y \le 3s_0. \tag{2.16}$$

Предполагаем, что коэффициенты уравнения (2.7) продолжены по y по закону (2.15), (2.16). Новая функция (сохраним за ней обозначение $u(t,y)$ во всех точках прямоугольников $R_\pm = \left\{(t,y) : 0 \le t \le T, \left|y \pm \frac{3}{2}s_0\right| \le \frac{3}{2}s_0\right\}$ имеет непрерывную производную и удовлетворяет продолженному уравнению вида (2.7) т.е

$$\omega_t = A\left(t, 2s_0 + y, \omega, \omega_y\right)\omega_{yy} + B\left(t, 2s_0 + y, \omega, \omega_y\right), -3s_0 < y < -s_0,$$

и

$$\omega_t = A\left(t, y - 2s_0, \omega, \omega_y\right)\omega_{yy} + B(t, y - 2s_0, \omega, \omega_y), \quad s_0 < y < 3s_0$$

с теми же самыми свойствами, что и в условиях *теоремы 2.2*. Теперь получим оценку для $|v_y|$ в прямоугольниках, объединение которых содержит Q. Так как получение внутренних оценок основано на принципе максимума, то утверждения теоремы полностью сохраняются, когда функция $v(t,y)$ непрерывна в Q, имеет непрерывную производную $v_y(t,y)$ и удовлетворяет уравнению (2.7) в Q всюду за исключением точек конечного числа прямых $y = const$.

Переходим теперь к доказательству оценки $|v|_{1+\gamma}^{\overline{Q}}$. После того как оценены нормы $|v_y|_\gamma^{\overline{Q}}$ уравнение (2.7) можно рассматривать как линейное уравнение

$$v_t = \overline{A}(t,y)\, v_{yy} + \overline{B}(t,y)$$

с ограниченными и непрерывными по Гельдеру коэффициентами и использовать для оценок и прочих качественных исследований его решений соответствующие теоремы по линейным уравнениям о линейных уравнениях.

Чтобы получить оценку вплоть до границы, как и выше, продолжим $v(t,y)$ по правилу (2.15), (2.16). Далее, для решения продолженного уравнения имеют место внутренние априорные оценки вида (2.14), в прямоугольниках, охватывающих прямоугольник Q. При этом применяются результаты работы ([10] теорема 3) по Гельдеровости обобщенного решения. Следовательно, получаем оценку (2.14) в $\overline{Q}$. □

А оценки для старших производных получим по результатам для линейных уравнений:

Теорема 2.3. *Пусть коэффициенты уравнения*

$$\tilde{a}(t,y)\, v_{yy} + \tilde{b}(t,y)\, v_y + \tilde{c}(t,y)\, v - v_t = \tilde{f}(t,y), \quad (t,y) \in Q, \tag{2.17}$$

удовлетворяют условиям Гельдера

$$|\tilde{a}|_\gamma^{\overline{Q}} + |\tilde{b}|_\gamma^{\overline{Q}} + |\tilde{c}|_\gamma^{\overline{Q}} + |\tilde{f}|_\gamma^{\overline{Q}} < \infty, \quad \tilde{a}(t,y) \ge a_0 > 0.$$

Пусть $v(t,y)$ есть решения уравнения (2.17) с $v|_{\Gamma(t=0,y=\pm s_0)} = 0$, $|v|_{2+\gamma}^{\overline{Q}} < +\infty$ и $M = \max\limits_{\overline{Q}} |v(t,y)|$. Тогда

$$|v|_{2+\gamma}^{\overline{Q}} \le C\left(|\tilde{f}|_\gamma^{\overline{Q}} + M\right) \equiv M_7. \tag{2.18}$$

3. Единственность и существования решения

Для доказательства единственности решения используем идеи работы [17].

Выводим интегральное представление эквивалентное к (1.1). Перепишем (1.1) в виде

$$(\varphi(u))_t = (d(u)u_x)_x \tag{3.1}$$

где $\varphi(u) = \int_0^u a(\xi)\, d\xi$.

Интегрируя уравнение (3.1) по области D с учетом условий (1.2)-(1.6) имеем

$$s(t) - h(t) = 2s_0 + \frac{\mu}{d(0)} \int\limits_{-s_0}^{s_0} \varphi(u_0(\xi))\, d\xi - \frac{\mu}{d(0)} \int\limits_{h(t)}^{s(t)} \varphi(u(t,\xi))\, d\xi. \tag{3.2}$$

Теорема 3.1. *При выполнении условий теоремы 2.1 решение задачи* (1.1)-(1.6) *единственно*

Доказательство. Пусть $(h_1(t), s_1(t), u_1(t,x))$ и $(h_2(t), s_2(t), u_2(t,x))$ являются решениями задачи (1.1)-(1.6) и, кроме того,

$$y_1(t) = \min(s_1(t), s_2(t)), \quad z_1(t) = \min(h_1(t), h_2(t)),$$

$$y_2(t) = \max(s_1(t), s_2(t)), \quad z_2(t) = \max(h_1(t), h_2(t)).$$

Тогда, с учетом (3.2), имеем

$$|s_1(t) - s_2(t)| + |h_1(t) - h_2(t)| \le \frac{\mu}{d(0)} \int\limits_{z_1(t)}^{z_2(t)} |\varphi(u_i)|\, d\xi + \frac{\mu}{d(0)} \int\limits_{y_1(t)}^{y_2(t)} |\varphi(u_i)|\, d\xi +$$

$$\frac{\mu}{d(0)} \int\limits_{z_2(t)}^{y_1(t)} |\varphi(u_1) - \varphi(u_2)|\, d\xi \tag{3.3}$$

где $u_i\ (i = 1, 2)$ – решения между $y_1(t)$ и $y_2(t)$ (соответственно $z_1(t)$ и $z_2(t)$).

По теореме 2.1 получаем

$$|u_1(t, y_1(t)) - u_2(t, y_1(t))| \le N_1 |s_1(t) - s_2(t)|$$

и

$$|u_1(t, z_1(t)) - u_2(t, z_1(t))| \le N_2 |h_1(t) - h_2(t)|.$$

Рассмотрим функцию $U(t,x) = u_1(t,x) - u_2(t,x)$. Тогда для $U(t,x)$ получим уравнение с ограниченными коэффициентами и задачу

$$\begin{cases} b_1(t,x)U_t = b_2(t,x)U_{xx} + b_3(t,x)U_x + b_4(t,x)U, & (t,x) \in D, \\ U(0,x) = 0, & -s_0 \le x \le s_0, \\ U(t, y_1(t)) \le N_1 \max\limits_{0\le\eta\le t} |s_1(\eta) - s_2(\eta)|, & t \ge 0, \\ U(t, z_1(t)) \le N_2 \max\limits_{0\le\eta\le t} |h_1(\eta) - h_2(\eta)|, & t \ge 0, \end{cases}$$

где коэффициенты уравнения непрерывные и ограниченные функции.

Отсюда по принципу максимума

$$|U(t,x)| \le N_1 \max_{0\le\eta\le t} |s_1(\eta) - s_2(\eta)| + N_2 \max_{0\le\eta\le t} |h_1(\eta) - h_2(\eta)|.$$

В силу ограниченности функций $u\,(t,x)$, $a\,(u)$, $a'\,(u)$ оценим составляющие формулы (3.3):

$$I_1=\frac{\mu}{d(0)}\int\limits_{z_1(t)}^{z_2(t)}|\varphi\,(u_i)|\,d\xi\le M_7\,|z_2\,(t)-z_1\,(t)|\max_{0\le\eta\le t}|h_1\,(\eta)-h_2\,(\eta)|\le M_7\max_{0\le\eta\le t}|h_1\,(\eta)-h_2\,(\eta)|^2\,,$$

$$I_2=\frac{\mu}{d(0)}\int\limits_{y_1(t)}^{y_2(t)}|\varphi\,(u_i)|\,d\xi\le M_8\,|y_2\,(t)-y_1\,(t)|\max_{0\le\eta\le t}|s_1\,(\eta)-s_2\,(\eta)|\le M_8\max_{0\le\eta\le t}|s_1\,(\eta)-s_2\,(\eta)|^2\,,$$

$$I_3=\frac{\mu}{d(0)}\int\limits_{z_2(t)}^{y_1(t)}|\varphi\,(u_1)-\varphi\,(u_2)|\,d\xi.$$

Далее, используя идеи и результат [9, 18], доказательство теоремы завершается.

□

Существование решения.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия теоремы 2.2. Тогда существует в D решение $u\,(t,x)\in C^{2+\gamma}(\overline{D})$, $s\,(t)\in C^{1+\gamma}\,([0,T])$, $h\,(t)\in C^{1+\gamma}\,([0,T])$ задачи* (1.1)-(1.6).

Доказательство. Для доказательства разрешимости нелинейной задачи можно воспользоваться различными теоремами из теории нелинейных уравнений, учитывая, что для нее справедлива теорема единственности классического решения. Воспользуемся принципом Лере-Шаудера [12], установленным по априорным оценкам $|\cdot|_{1+\gamma}$ для всех возможных решений нелинейных задач, и теоремой о разрешимости в классах Гёльдера для линейных задач.

Более подробное изложение методики можно найти, например, в (Раздел VI, [11]; Раздел VII, [12]). □

Список литературы

[1] Adriana C. Briozzo.: *Free boundary problem governed by a non-linear diffusion-convection equation with Neumann condition* Jour. of Math. Anal. and Appl., **54** (2), 129461 (2025)
[2] Adriana C. Briozzo, Tarzia, D.: *A free boundary problem for a diffusion-convection equation*. Int. J. Non-Linear Mech. **120**, 103394 (2020). https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2019.103394
[3] Cannon, J. R.: The One-Dimensional Heat Equation. Cambridge: CUP, (1984). 500 pp.
[4] Crank, J.: Free and Moving Boundary Problem. Oxford (1984). 425 pp.
[5] Du, Y., Lin Zh.: *Spreading-vanishing dichotomy in the diffusive logistic model with a free boundary*. SIAM J. Math. Anal. **42**, 377-405 (2010). https://doi.org/10.1137/090771089
[6] Du, Y., Li, B.: *Spreading and vanishing in nonlinear diffusion problems with free boundaries*. J. Eur. Math. Soc. **17**, 2673-2724 (2015). https://doi.org/10.4171/JEMS/568
[7] Friedman, A.: *Free boundary problems arising in biology*. Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B **23** (1), 193-202 (2016). https://doi.org/10.3934/dcdsb.2018013
[8] Gupta, S. C.: The Classical Stefan Problem: Basic concepts, modelling and analysis with quasi-analytical solutions and methods. Elsevier (2017). 717 pp.
[9] Gu, H., Lin, Z. G., Lou, B. D.: *Long time behavior for solutions of Fisher-KPP equation with advection and free boundaries*. J. Funct. Anal. **269**, 1714-1768 (2015). https://doi.org/10.1016/j.jfa.2015.07.002
[10] Kruzhkov, S. N.: *Nonlinear parabolic equations with two independent variables*. Tr. Mosk. Mat. Obs. **16**, 329-346 (1967). (In Russian)
[11] Friedman, A.: Partial Differential Equations of Parabolic Type. Mir, Moscow (1964). 428 pp. (In Russian)
[12] Ladyzhenskaya, O. A., Solonnikov, V. A., Uraltseva, N. N.: Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type. Nauka, Moscow (1967). 736 pp. (In Russian)
[13] Meirmanov, A.: Stefan Problem. Nauka, Novosibirsk (1986). 240 pp. (In Russian)
[14] Meirmanov, A. M., Galtsev, O. V., Galtseva, O. A.: *On the existence of a classical solution in the whole time for a free boundary problem*. Sib. Math. J. **60** (2), 419-428 (2019). https://doi.org/10.1134/S0037446619020137
[15] Pan, H., Xu, R., Hu, B.: *A free boundary problem with two moving boundaries modeling grain hydration*. Nonlinearity **31**, 3591-3616 (2018). https://doi.org/10.1088/1361-6544/aabf04

[16] Rasulov, M. S.: *Problem for a quasilinear parabolic equation with two free boundaries*. Uzbek Math. J. **2**, 89-102 (2019). https://doi.org/10.29229/uzmj.2019-2-11

[17] Takhirov, J. O.: *A free boundary problem for a reaction-diffusion equation in biology*. Indian J. Pure Appl. Math. **50**, 95-112 (2019). https://doi.org/10.1007/s13226-019-0309-8

[18] Takhirov, J. O., Rasulov, M. S.: *Problem with free boundary for systems of equations of reaction-diffusion type*. Ukr. Math. J. **69**, 1968-1980 (2018). https://doi.org/10.1007/s11253-018-1481-4

[19] Takhirov J. O., Rasulov M. S., Norov A. Q.: *On a Mathematical Model with a Free Boundary of the Dynamics of Diffuse Infection with an Immune Response*. Lobachevskii Journal of Mathematics **45** (8), 3986-3996 (2024).

[20] Takhirov, Zh. O., Turaev, R. N.: *Nonlocal Stefan problem for a quasilinear parabolic equation*. Vestn. Samar. Gos. Tekh. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki **60** (28), 8-16 (2012). https://doi.org/10.14498/vsgtu1010 (In Russian)

[21] Takhirov J. O., Umirkhonov M. T..: *On a free boundary problem for the relaxation transfer equation*. Theoretical and Mathematical Physics, **209** (1), 1473–1489 (2021).

[22] Wang, R., Wang, L., Wang, Zh.: *Free boundary problem of a reaction-diffusion equation with nonlinear convection term*. J. Math. Anal. Appl. **467**, 1233-1257 (2018). https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2018.07.065

Free Boundary Problem for a Nonlinear Diffusion Equation

Rasulov Mirojiddin Sobirjonovich and Umirkhonov Masudkhon Turakhon ugli

Abstract

In this paper, a Stefan-type problem with two free boundaries for a nonlinear heat equation in the one-dimensional case is considered. The study of nonlinear problems with free boundaries is carried out using a method based on constructing a priori estimates. In this regard, some initial a priori estimates are first established for solving the problem under consideration. Then, the problem is reduced to a problem with a fixed boundary through a change of variables. The resulting problem has time- and position-dependent coefficients with nonlinear terms. Next, a priori estimates of the Schauder type are constructed for solving the equation with nonlinear terms and a fixed boundary. Based on the estimates obtained, the solvability of the original problem is established.

Affiliations

Rasulov Mirojiddin Sobirjonovich
Address: V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, 9 University str., Tashkent, 100174, Uzbekistan.
Tashkent State University of Transport, 1, Temiryolchilar str., Tashkent, 100071, Uzbekistan.
e-mail: rasulovms@bk.ru
ORCID ID: 0000-0003-0704-6012

Umirkhonov Masudkhon Turaxon ugli
Address: Tashkent State University of Economics, 49, Islom Karimov str., Tashkent, 100066, Uzbekistan.
e-mail: m.umixonov@tsue.uz
ORCID ID: 0009-0003-9440-3440