Uzbekistan Journal of Mathematics and Computer Science
Volume-1, Issue-2, Page 112–121 (2025)
DOI: https://doi.org/10.56143/ujmcs.v1i2.13
Research article

О гладкости периодической краевой задачи для трёхмерного уравнения Чаплыгина в неограниченном параллелепипеде

Джамалов Сирожиддин З., * **Туракулов Хамидулло Ш. и Сипатдинова Бийбиназ К.**

Аннотация

В статье исследуются единственность, существование и гладкость обобщенного решения периодической краевой задачи для трехмерного уравнения Чаплыгина в неограниченном параллелепипеде. Для доказательства теоремы единственности, существования и гладкости решения задачи используются преобразование Фурье, методы "ε регуляризации" и априорных оценок.

Ключевые слова: *трёхмерное уравнение Чаплыгина; периодическая краевая задача; преобразование Фурье; методы " ε-регуляризации" и априорных оценок.*

Предметная классификацие AMS (2020): *Основная: 35M10;*

1. Введение.

Как известно, в работе А.В.Бицадзе показано, что задача Дирихле для уравнения смешанного типа некорректна [1], [2].

Естественно возникает вопрос: нельзя ли заменить условия задачи Дирихле другими условиями, охватывающими всю границу, которые обеспечивают корректность задачи? Впервые такие краевые задачи (нелокальные краевые задачи) для уравнения смешанного типа были предложены и изучены в работах Ф.И.Франкля при решении газодинамической задачи об обтекании профилей потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения [3],[4],[5]. Близкие по постановке задачи для уравнения смешанного типа первого рода в ограниченных областях изучены в работах [6]-[12].

В данной работе используя результаты работ [11],[12], изучаются однозначная разрешимость и гладкость обобщённого решения одной периодической краевой задачи для трехмерного уравнения Чаплыгина в неограниченном параллелепипеде.

В области

$$G = (-1,1) \times (0,T) \times R = Q \times R = \{ \ (x,t,z) \mid x \in (-1,1), \ \ 0 < t < T < +\infty, \ \ z \in R \}$$

рассмотрим уравнение Чаплигина:

$$Lu = K(\mathrm{x})u_{tt} - \Delta u + a\left(x\right)u_t + c\left(x,t\right)u = f\left(x,t,z\right). \tag{1.1}$$

Received : *10–сентябрь–2025,* ***Accepted :*** *30–ноябрь–2025*
**** Corresponding author***

Здесь $xK(x) \geq 0$, где $x \in (-1,1)$, $\Delta u = u_{xx} + u_{zz}$ - оператор Лапласа.

Уравнения (1.1), в зависимости от знака x меняет свой тип то есть, при $x > 0$ будет гиперболическим, при $x < 0$ будет эллиптическим, при $x = 0$ будет параболическим уравнением. Поэтому уравнения (1.1) будет уравнением смешанного типа первого рода второго порядка (часто называется уравнением Чаплыгина, в частности, когда $K(x) = x$ будет уравнением Трикоми) [1]. Пусть все коэффициенты уравнения (1.1) достаточно гладкие функции в области $\overline{G}$.

В дальнейшем для решения поставленных задач нам необходимо ввести определения нескольких функциональных пространств с нормами и обозначения.

Через $L_2(\,Q\,)-$обозначим пространство квадратично суммируемых функций со скалярным произведением и нормой:

$$(u,v)_0 = \int\limits_Q uv dxdt,$$

$$\|u\|_0^2 = \|u\|_{L_2(Q)}^2 = \int\limits_Q u^2 dxdt.$$

Через $W_2^l(Q), (l = 0,1,2,...)$ обозначим пространство Соболева с нормой:

$$\|\vartheta\|_l^2 = \|\vartheta\|_{W_2^l(Q)}^2 = \sum_{|\alpha|\leq l} \int\limits_Q |D^\alpha \vartheta|^2 dxdt,$$

$\alpha-$это мультииндекс, $D^\alpha-$ обобщённая производная по переменным x и t, $W_2^0(Q) = L_2(Q)$. Через $C^l(\overline{Q}),\ (l = 0,1,2,...)$ обозначим пространство непрерывных в $\overline{Q}$ функций, имеющих непрерывные в $\overline{Q}$ производные до порядка l включительно,

$$C^0(\overline{Q}) = C(\overline{Q}), \quad \|u\|_{C(\overline{Q})} = \max_{(x,t)\in\overline{Q}} |u(x,t)|\,.$$

В общем случае

$$\|u\|_{C^l(\overline{Q})} = \|u\|_{C(\overline{Q})} + \sum_{|k|\leq l} \left\|D^{(k)}u\right\|_{C(\overline{Q})}.$$

Обозначим через

$$\widehat{u} = \hat{u}(x,t,\lambda) = (2\pi)^{-1/2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,t,z)\, e^{-i\lambda z} dz$$

преобразование Фурье по переменной z функции $u(x,t,z)$, а через

$$u(x,t,z) = (2\pi)^{-1/2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(x,t,\lambda)\, e^{i\lambda z} d\lambda$$

обратное преобразование Фурье. Теперь с помощью преобразования Фурье определим анизотропная пространства Соболева $W_2^{l,s}(G)$ с нормой

$$\|u\|_{W_2^{l,s}(G)}^2 = (2\pi)^{-1/2} \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + |\lambda|^2\right)^s \cdot \|\hat{u}\,(x,t,\lambda)\|_{W_2^l(Q)}^2\, d\lambda, \tag{A}$$

здесь s, l- любые конечные положительные целые числа, где $W_2^l(Q)$ (при $l = 0, W_2^0(Q) = L_2(Q)$) обозначено пространства Соболева [15],[16], [20].

В дальнейшем для исследования линейных обратных задач нам понадобится следующие оценки, которые следуют из теорем вложений Соболева [15],[20].

$$\|\vartheta\|_{C^\alpha(Q)}^2 \leq c_{\alpha+2}\, \|\vartheta\|_{W_2^{\alpha+2}(Q)}^2\,.$$

Здесь через $c_{\alpha+2}(\alpha = 0, 1)-$ обозначим положительный различные числа. Через c_1- обозначим

$$c_1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda^4 d\lambda}{(1+|\lambda|^2)^3} = \frac{3\pi}{4}.$$

Очевидно, что пространство $W_2^{l,s}(G)$ с нормой (A) является гильбертовым пространством [15],[23].

При получении различных априорных оценок мы часто будем использовать неравенство Коши с σ [15]:

$$\forall u, \vartheta > 0, \forall \sigma > 0,\ \ u \cdot \vartheta \leq \sigma \frac{u^2}{2} + \frac{\vartheta^2}{2\sigma}$$

1.1. Постановки задачи.

Периодическая краевая задача: Найти обобщенное решение $u(x, t, z)$ уравнения (1.1) из пространства $W_2^{2,3}(G)$, удовлетворяющее следующим краевым условиям

$$D_t^p u|_{t=0} = D_t^p u|_{t=T}, \tag{1.2}$$

$$D_x^p u|_{x=-1} = D_x^p u|_{x=1}, \tag{1.3}$$

при $p = 0,\ 1$, где $D_t^p u = \frac{\partial^p u}{\partial t^p},\ \ D_t^0 u = u.$

$$\text{Далее будем считать, что } u(x,t,z) \to 0 \text{ и } u_z(x,t,z) \to 0 \text{ при } |z| \to \infty. \tag{1.4}$$

Определение 1.1. Обобщенным решением задачи (1.1)-(1.4) будем называть функцию $u(x, t, z) \in W_2^{2,3}(G)$, удовлетворяющую уравнению (1.1) почти всюду в области G, с условиями (1.2)-(1.4).

1.2. Основной результат.

Теорема 1.1. *Пусть выполнены высщее перечисленные условия для коэффициентов уравнения (1.1), кроме того пусть выполненые* $2a(x) - \mu K(x) > \delta_1 > 0$, $\mu\ c(x,t) - c_t(x,t) > \delta_2 > 0$ *, для всех* $(x, t) \in \overline{Q}$, *где* $\mu = const > 0$, $c(x, 0) = c(x, T)$, *для всех* $x \in [-1, 1]$. *Тогда для любой функции* $f \in W_2^{1,3}(G)$, *такой, что* $f(x, 0, z) = f(x, T, z)$, *существует единственное обобщенное решение задачи (1.1)-(1.4) из пространства* $W_2^{2,3}(G)$, *и для нее справедливы следующие оценки:*

I). $\|u\|^2_{W_2^{1,3}(G)} \leq c_1 \|f\|^2_{W_2^{0,3}(G)}$,

II). $\|u\|^2_{W_2^{2,3}(G)} \leq c_2 \|f\|^2_{W_2^{1,3}(G)}$.

В дальнейшем через c_i – обозначим положительные, вообще говоря, разные постоянные числа, отличные от нуля.

Доказательство теоремы проведем по следующей схеме:

1. Для задачи (1.1)–(1.4) формально по переменным применим преобразование Фурье и получим новую задачу (1.5)–(1.7).

2. Изучим однозначную разрешимость периодической задачи для уравнения третьего порядка с малым параметром (вспомогательная задача).

3. Затем с помощью этой вспомогательной задачи докажем однозначную разрешимость задачи (1.5)–(1.7).

4. Используя однозначную разрешимость задачи (1.5)–(1.7), дадим обоснование сходимости интегралов Фурье и докажем разрешимость задачи (1.1)–(1.4).

Приступим к реализации этой схемы.

Применяя для задачи (1.1)–(1.4) преобразование Фурье по переменным z, получим в области $Q = (-1, 1) \times (0, T)$ следующую задачу

$$\Im \hat{u} = K(x)\hat{u}_{tt} - \hat{u}_{xx} + a\,(x)\,\hat{u}_t + (c\,(x,t) + \lambda^2\,)\hat{u} = \hat{f}\,(x,t,\lambda), \tag{1.5}$$

$$D_t^p \hat{u}|_{t=0} = D_t^p \hat{u}|_{t=T}, p = 0, 1 \tag{1.6}$$

$$D_x^p \hat{u}|_{x=-1} = D_x^p \hat{u}|_{x=1}, p = 0, 1, \tag{1.7}$$

где $\lambda \in R = (-\infty, \infty)$, $\hat{f}(x,t,\lambda) = (2\pi)^{-1/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,t,z) e^{-i\lambda z} dz-$ преобразование Фурье по переменной z функции $f(x,t,z)$.

Как известно, однозначная разрешимость и гладкость обобщенного решения задачи (1.5)–(1.7) в случае, когда $\lambda = 0$, изучены в пространствах Соболева $W\ _2^{m+2}(Q), m = 0, 1, 2, ...$ в работах [11],[12]. Рассмотрим задачи (1.5)–(1.7) в случае, когда $\lambda \neq 0$. В этом случае решения задачи (1.5)–(1.7) $\hat{u}(x,t,\lambda)$ и $\hat{f}(x,t,\lambda)$ правая часть уравнения (1.5) зависит от параметра λ. С возрастанием $|\lambda| \to \infty$ может расти и правая часть уравнения (1.5), поэтому в этом случае возникает вопрос: как можно получит априорные оценки, обеспечивающше однозначную разрешимость задачи (1.5)–(1.7). Поэтому сначала при фиксированном $\lambda \in R$, используя результаты работы [9]–[12] получим необходимые оценки для решения задачи (1.5)–(1.7). В дальнейшем эти результаты используем для исследования задачи (1.1)–(1.4) в анизотропных пространствах Соболева $W_2^{m+2,s}(G),\ m = 0, 1, 2, ...; s \geq m+3$ в неограниченном параллелепипеде

Теорема 1.2. *Пусть выполнены высщее перечисленные условия для коэффициентов уравнения (1.5), кроме того пусть выполненые $2a(x) - \mu K(x) \geq \delta_1 > 0$, $\mu\, c(x,t) - c_t(x,t) \geq \delta_2 > 0$, для всех $(x,t) \in \overline{Q}$, где $\mu = const > 0$, $c(x,0) \leq c(x,T)$, для всех $x \in [-1,1]$. Тогда, если для любой функции $\hat{f}(x,t,\lambda) \in L_2(Q)$ существует решение задачи (1.5)-(1.7) из пространства $W_2^2(Q)$, то оно единственно и для нее справедлива следующая первая априорная оценка*

$$1.1). \quad \|\hat{u}\|^2_{W_2^1(Q)} \leq c_1 \left\|\hat{f}\right\|^2_{L_2(Q)},$$

Доказательство. Докажем единственность решения задачи (1.5)–(1.7) с помощью метода интеграла энергии. Пусть существует решение задачи (1.5)–(1.7) из $W_2^2(Q)$. *Рассмотрим тождество:*

$$(\Im\hat{u}, 2\hat{u}_t + \mu\hat{u})_0 = (\hat{f}, 2\hat{u}_t + \mu\hat{u})_0,\ \mu = const > 0 \tag{1.8}$$

В силу условий теоремы 1.2, для любой функции $\widehat{u} \in W_2^2(Q)$, интегрируя по частям тождество (1.8), легко получить следующее неравенство

$$\int\limits_Q \Im\hat{u} \cdot (2\hat{u}_t + \mu\hat{u}) dxdt \geq \int\limits_Q \left\{(2a - \mu K(x)) \cdot \hat{u}_t^2 + \right.$$

$$\left. + \mu\hat{u}_x^2 + \left((\mu c - c_t) + \mu\lambda^2\right) \cdot \hat{u}^2 dxdt + \right. \tag{1.9}$$

$$+ \int\limits_{\partial Q} \left\{(K(x)\hat{u}_t^2 + \mu K(x)\hat{u}_t\hat{u} + \hat{u}_x^2 + \left(0,5\mu a + c + \lambda^2\right) \cdot \hat{u}^2) e_t - (2 \cdot \hat{u}_x\hat{u}_t + \mu\hat{u}_x\hat{u}) e_x)\right\} ds.$$

где $\mu = const > 0$, $\vec{e} = (e_t, e_x)$ единичный вектор внутренней нормали к границе ∂Q. Условия теоремы 1.2 обеспечивают не отрицательность интеграла по области Q. Учитывая краевые условие (1.6)-(1.7) и используя условия теоремы 1.2 получим, что граничные интегралы равны нулю.

Учитывая выше сказанное, из неравенства (1.9) получим следующее неравенство снизу

$$\int\limits_Q \Im\hat{u} \cdot (2\hat{u}_t + \mu\hat{u}) dxdt \geq$$

$$\geq \int\limits_Q \left\{(2a - \mu K(x)) \cdot \hat{u}_t^2 + \mu\hat{u}_x^2 + \left((\mu c - c_t) + \mu\lambda^2\right) \cdot \hat{u}^2\right\} dxdt \geq \tag{1.10}$$

$$\geq \quad \delta_0 \int\limits_Q \{\hat{u}_t^2 + \hat{u}_x^2 + \hat{u}^2\} dxdt.$$

где $\delta_0 = \min\{\delta_1, \mu, \delta_2\}$. Теперь из неравенства (1.10) в левой части применяя неравенство Коши с σ, получим необходимую первую оценку 1.1) для задачи (1.1)-(1.4).

$$\|\hat{u}\|^2_{W_2^1(Q)} \leq c_1 \left\|\hat{f}\right\|^2_{L_2(Q)}, \tag{1.11}$$

из которой следует единственность решения задачи (1.5)–(1.7) из $W_2^2(Q)$ [12]. Теорема 1.2 доказана.

2. Уравнение третьего порядка с малым параметром.

Разрешимость задачи (1.5)–(1.7) докажем методом "ε-регуляризации”, а именно: в области $Q = (-1,1) \times (0,T)$ рассмотрим семейство уравнений третьего порядка с малым параметром

$$\Im_\varepsilon \hat{u}_\varepsilon = -\varepsilon \frac{\partial^3 \hat{u}_\varepsilon}{\partial t^3} + \Im \hat{u}_\varepsilon = \hat{f}(x,t,\lambda) \tag{2.1}$$

и с периодическими краевыми условиями

$$D_t^q \hat{u}_\varepsilon|_{t=0} = D_t^q \hat{u}_\varepsilon|_{t=T}, \quad q = 0,1,2, \tag{2.2}$$

$$D_x^p \hat{u}_\varepsilon|_{x=-1} = D_x^p \hat{u}_\varepsilon|_{x=1}, \quad p = 0,1, \tag{2.3}$$

где $\varepsilon-$ малое положительное число, $D_z^q w = \frac{\partial^q w}{\partial z^q}$, $q = 1,2;$ $D_z^0 w = w$.

Ниже используем системы уравнений третьего порядка с малым параметром (2.1) в качестве ε-регуляризирующего уравнения для уравнения (1.5). [12],[17], [20].

Определим пространство функции

$$W(Q) = \{\hat{u}_\varepsilon | \ \hat{u}_\varepsilon \in W_2^2(Q), \ \hat{u}_{\varepsilon ttt} \in L_2(Q)\},$$

удовлетворяющие соответствующим условиям (2.1)–(2.3) с конечной нормой

$$|||\hat{u}_\varepsilon|||^2_W = \varepsilon \|\hat{u}_{\varepsilon ttt}\|_0^2 + \|\hat{u}_\varepsilon\|_2^2. \tag{B}$$

Очевидно, что пространство $W(Q)$ с нормой (B) является гильбертовым пространством [12],[15],[20].

Определение 2.1. Обобщенным решением задачи (2.1)–(2.3) будем называть функцию $\{\hat{u}_\varepsilon(x,t,\lambda)\} \in W(Q)$, удовлетворяющую уравнению (2.1) почти всюду в области Q.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены высщее перечисленные условия для коэффициентов уравнения (2.1), кроме того пусть выполненые:* $2a(x) - \mu K(x) \geq \delta_1 > 0, \mu c(x,t) - c_t(x,t) \geq \delta_2 > 0$ *для всех* $(x,t) \in \overline{Q}$, *где* $\mu = const > 0$, $c(x,0) = c(x,T)$ *для всех* $x \in [-1,1]$. *Тогда для любой функции* $\hat{f}(x,t,\lambda) \in W_2^1(Q)$, *такой, что* $\hat{f}(x,0,\lambda) = \hat{f}(x,T,\lambda)$, *существует единственное обобщенное решение задачи (2.1)-(2.3) из пространства* $W(Q)$ *и для нее справедливы следующие оценки*

$$2.1) \ \ \varepsilon \|\hat{u}_{\varepsilon tt}\|_0^2 + \|\hat{u}_\varepsilon\|_1^2 \leq c_1 \left\|\hat{f}\right\|_0^2,$$

$$2.2) \ \ \varepsilon \|\hat{u}_{\varepsilon ttt}\|_0^2 + \|\hat{u}_\varepsilon\|_2^2 \leq c_2 \left\|\hat{f}\right\|_1^2.$$

Доказательство Теоремы 2.1 осуществляется поэтапно, с использованием метода Галеркина и соответствующих априорных оценок [11],[12]. Сначала докажем первую априорную оценку 2.1) для задачи (2.1)-(2.3). Для этого рассмотрим следующую тождество:

$$\int_Q \Im_\varepsilon \hat{u}_\varepsilon \ \cdot (2\hat{u}_{\varepsilon t} + \mu\,\hat{u}_\varepsilon)\,dx\,dt \ = \ \int_Q \hat{f}\cdot(2\hat{u}_{\varepsilon t} + \mu\,\hat{u}_\varepsilon)\,dx\,dt. \tag{2.4}$$

Интегрируя по частям тождество (2.4), учитывая условие Теоремы 2.1 нетрудно получить 2.1)-первую априорную оценку, аналогичную как первую оценку 1.1), откуда следует единственность обобщенного решения задачи (2.1)-(2.3) из пространства $W(Q)$.

Теперь докажем справедливость 2.2) вторую априорную оценку Для этого рассмотрим тождество:

$$\int_Q \Im_\varepsilon \hat{u}_\varepsilon \ \cdot P\hat{u}_\varepsilon\,dx\,dt \ = \ \int_Q \hat{f}\cdot P\hat{u}_\varepsilon\,dxd\,t, \tag{2.5}$$

где $P\hat{u}_\varepsilon = (-2\hat{u}_{\varepsilon ttt} + \mu\,\hat{u}_{\varepsilon tt} - \mu\hat{u}_{\varepsilon xx} + \mu\hat{u}_{\varepsilon t})$. Интегрируя по частям (2.5), с учетом условий теоремы 2.1 и краевых условий (2.2),(2.3), применяя неравенство Коши с σ, получим следующее неравенство:

$$c_2\left[\|f_t\|_0^2 + \|f\|_0^2\right] \geq \varepsilon\,\|\hat{u}_{\varepsilon ttt}\|_0^2 + \int_G \ \{(2a-\ \mu\,K(x))\hat{u}_{\varepsilon tt}^2 + \mu\hat{u}_{\varepsilon xx}^2 + \mu\hat{u}_{\varepsilon tx}^2\}\,dxdt \quad +$$

$$\int_{\partial G} [(K(x)\hat{u}_{\varepsilon tt}^2 + 2a\hat{u}_{\varepsilon t}\hat{u}_{\varepsilon tt} - 2\hat{u}_{\varepsilon xx}\hat{u}_{\varepsilon tt} + 2c\,\hat{u}_\varepsilon\hat{u}_{\varepsilon tt})e_t - 2\hat{u}_{\varepsilon tt}\hat{u}_{\varepsilon xt}e_x]ds- \tag{2.6}$$

$$-\sigma(\ \|\hat{u}_{\varepsilon xt}\|_0^2 + \|\hat{u}_{\varepsilon tt}\|_0^2\ ) - c\,(\sigma)\ \ \|\hat{u}_\varepsilon\|_1^2 = \sum_{i=1}^{3} J_i,$$

где $\sigma, c(\sigma)-$ коэффициенты неравенства Коши с σ, $J_i\ (i = 1, 3)-$ интегралы по области, J_2- интеграл по границе. Учитывая условие теоремы 2.1 и краевые условия (2.2), (2.3), получим, что $J_i > 0$, $(i = 1, 3)$ и $J_2 = 0$. Пусть $\delta_3 = \min\{\delta_1, \mu, \delta_2\}$, выбирая $\delta_3 - \sigma > \delta_0 > 0$, из неравенства (2.6) получим необходимую вторую оценку

$$\varepsilon\ \|\ \hat{u}_{\varepsilon ttt}\ \|_0^2 + \|\hat{u}_\varepsilon\|_2^2 \leq c_2\left\|\hat{f}\right\|_1^2. \tag{2.7}$$

Из доказанных оценок методом Галеркина получим однозначную разрешимость задачи (2.1)-(2.3) из пространства $W(Q)$ [12]. Теорема 2.1 доказана.

Перейдем к доказательству разрешимости задачи (1.5)-(1.7).

2.1. Существование решения задачи.

Теорема 2.2. *Пусть выполнены все условия теоремы 1.1-2.1. Тогда существует единственное обобщенное решение задачи (1.5)-(1.7) в пространстве* $W_2^2(Q)$.

Доказательство. Единственность решения задачи (1.5)-(1.7) в пространстве $W_2^2(Q)$ доказана в теореме 1.2. Теперь докажем существование решения задачи (1.5)-(1.7) в $W_2^2(Q)$. Для этого при $\varepsilon > 0$ в области Q рассмотрим уравнение (2.1) с краевыми условиями (2.2),(2.3). Так как выполнены все условия теоремы 2.1, то существует единственное обобщенное решение задачи (2.1)-(2.3) в $W(Q)$, при $\varepsilon > 0$ и для нее справедливы 2.1) первая и 2.2) вторая оценки. Отсюда следует, по известной теореме о компактности [15,23], что из множества функций $\{\,\hat{u}_\varepsilon(x,t,\lambda)\}$,$\varepsilon > 0$, можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность функций, такую, что $\{\,\hat{u}_{\varepsilon_i}(x,t,\lambda)\,\} \to \hat{u}\,(x,t,\lambda)$ при $\varepsilon_i \to 0$ в $W(Q)$. Покажем, что предельная функция $\hat{u}(x,t,\lambda)$ удовлетворяет уравнению $L\hat{u} = \hat{f}$ (1.5) почти всюду в $W_2^2(Q)$. В самом деле, так как подпоследовательность $\{\hat{u}_{\varepsilon_i}(x,t,\lambda)\}$ слабо сходится в $W(Q)$, а подпоследовательность $\{\sqrt{\varepsilon_i}\hat{u}_{\varepsilon_i ttt}(x,t,\lambda)\}$ равномерно ограничена в $L_2(Q)$ и оператор L линейный, то имеем

$$\Im\hat{u}-\hat{f}=\Im\hat{u}-\Im\hat{u}_{\varepsilon_i}+\varepsilon_i\frac{\partial^3\hat{u}_{\varepsilon_i}}{\partial t^3}=\Im\left(\hat{u}-\hat{u}_{\varepsilon_i}\right)+\varepsilon_i\frac{\partial^3\hat{u}_{\varepsilon_i}}{\partial t^3}. \tag{2.8}$$

Из равенства (2.8), переходя к пределу при $\varepsilon_i\to 0$, получим единственное обобщенное решение задачи (1.5)-(1.7) из пространства Соболева $W_2^2(Q)$ [12],[21]. Таким образом, Теорема 2.2 доказана.

3. Существование решения задачи (1.1)-(1.4).

Теперь перейдем к доказательству Теоремы 1.1 об однозначной разрешимости обобщенного решения задачи (1.1)-(1.4) в пространстве $W_2^{2,3}(G)$. Для доказательства Теоремы 1.1 сначала докажем справедливость оценки I), II). Как нам известно в Теореме 2.1 для решения задачи (1.5)-(1.7) доказана справедливость первой оценки 2.1), то есть

$$\|\hat{u}\|^2_{W_2^1(Q)}\le c_1\left\|\hat{f}\right\|^2_{L_2(Q)}. \tag{3.1}$$

Чтобы доказать, что $u_z\in L_2(G)$, нам необходимо умножить неравенство (3.1) на $(2\pi)^{-1/2}\cdot\left(1+|\lambda|^2\right)^3$ и проинтегрировать по λ от $-\infty$ до $+\infty$, тогда получим I) оценку

$$\|u\|^2_{W_2^{1,3}(G)}=(2\pi)^{-1/2}\cdot\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(1+|\lambda|^2\right)^3\cdot\|\hat{u}\|^2_{W_2^1(Q)}\,d\lambda\le$$

$$\le(2\pi)^{-1/2}\cdot c_1\cdot\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(1+|\lambda|^2\right)^3\cdot\left\|\hat{f}\right\|^2_{L_2(Q)}d\lambda=c_1\|f\|^2_{W_2^{0,3}(G)}. \tag{3.2}$$

Точно так же используя условия Теоремы 2.1 с предельным переходом при $\varepsilon\to 0$, из 2.2) второй оценки нетрудно получить для решения задачи (1.5)-(1.7) следующей оценки

$$\|\hat{u}\|^2_{W_2^2(Q)}\le c_2\left\|\hat{f}\right\|^2_{W_2^1(Q)}. \tag{3.3}$$

Чтобы доказать, что $u_{zz}\in L_2(G)$, нам необходимо умножить неравенство (3.3) на $(2\pi)^{-1/2}\cdot\left(1+|\lambda|^2\right)^3$ и интегрировать по λ от $-\infty$ до $+\infty$, тогда получим

$$\|u\|^2_{W_2^{2,3}(G)}=(2\pi)^{-1/2}\cdot\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(1+|\lambda|^2\right)^3\cdot\|\hat{u}\|^2_{W_2^2(Q)}\,d\lambda\le$$

$$\le(2\pi)^{-1/2}\cdot c_2\cdot\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(1+|\lambda|^2\right)^3\cdot\left\|\hat{f}\right\|^2_{W_2^1(Q)}d\lambda=c_2\|f\|^2_{W_2^{1,3}(G)}, \tag{3.4}$$

из которой следует справедливость II) второй оценки теоремы 1.1.

Из I)-первой априорной оценки следует единственность обобщенного решения задачи (1.1)-(1.4), а из справедливости II)-второй априорной оценки следует существование обобщенного решения задачи (1.1)-(1.4) из пространства $W_2^{2,3}(G)$ [13,14]. Теорема 1.1 доказана.

4. Гладкость обобщенного решения задачи (1.1)-(1.4).

Теперь обратимся к исследованию гладкости обобщенного решения задачи (1.1)-(1.4) в пространствах $W_{\ 2}^{m+2,s}(G)$, где $m, s-$целые конечные положительные числа, такие, что $m \geq 0, \ \ s \geq 3$.

Ниже, для простоты предположим, что коэффициенты уравнения (1.1) достаточно дифференцируемые функции в замкнутой области $\overline{Q}$.

Теорема 4.1. *Пусть выполнены все условия теоремы 1.1, кроме того, пусть* $D_{\ t}^{\,q}\, c\,|_{t=0} = D_{\ t}^{\,q}\, c\,|_{t=T}$. *Тогда для любой функции* $f \in W_{\ 2}^{m+1,s}(G)$, *такой, что* $D_{\ t}^{\,q}\, f|_{t=0} = D_{\ t}^{\,q}\, f|_{t=T}$ $(q = 0, 1, 2, ..., m)$, *существует, причем единственное, обобщенное решение задачи (1.1)-(1.4) из пространства* $W_{\ 2}^{m+2,s}(G)$, *где* $m, s-$*любые целые конечные положительные числа, такие, что* $s \geq m+3$, $m = 0, 1, 2, 3, ...$.

Доказательство. Отметим, что в работах [11],[12] для уравнения Чаплигина в случае, когда $\lambda = 0$ исследована гладкость обобщенного решения периодической краевой задачи (1.5)-(1.7) в пространствах Соболева $W_2^{m+2}(Q)$ и доказаны соответствующие априорные оценки.

$$\|\hat{u}\|^2_{W_2^{m+2}(Q)} \leq c_{m+1} \left\|\hat{f}\right\|^2_{W_2^{m+1}(Q)} (m = 0, 1, 2, ...). \tag{4.1}$$

Аналогично такие же результаты можем получить в случае, когда $\lambda \neq 0$. Теперь чтобы доказать, что $D_z^{s-1} u \in L_2(G)$, где $s \geq m+3$, $m = 0, 1, 2, 3, ...$, и применить теорему вложения Соболева, нам необходимо умножить неравенство (4.1) на $(2\pi)^{-1/2} \ \cdot (1 + |\lambda|^2)^s$ и интегрируя по λ от $-\infty$ до $+\infty$, можем получить

$$\|u\|^2_{W_2^{m+2,s}(G)} = (2\pi)^{-1/2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1 + |\lambda|^2)^s \cdot \|\hat{u}\|^2_{W_2^{m+2}(Q)} \, d\lambda \leq$$

$$\leq (2\pi)^{-1/2} \, c_{m+1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1 + |\lambda|^2)^s \cdot \left\|\hat{f}\right\|^2_{W_2^{m+1}(Q)} d\lambda = c_{m+1} \, \|f\|^2_{W_2^{m+1,s}(G)} \, . \tag{4.2}$$

Отсюда получим существование единственного обобщенного решения задачи (1.1)–(1.4) из пространствах $W_2^{m+2,s}(G)$. Теорема 4.1 доказана.

Замечание 4.1. Аналогично изучаются периодические краевые задачи для многомерного уравнения Чаплыгина.

5. Заключение.

В данной статье в неограниченном параллелепипеде доказаны теоремы единственности, существования и гладкости обобщенного решения периодической краевой задачи для трехмерного уравнения Чаплыгина в анизотропных пространствах Соболева $W_{\ 2}^{m+2,s}(G)$, где $m, s-$целые конечные положительные числа, причем $m = 0, 1, 2, 3, ...\ \ , s \geq m+3$. Доказательство теоремы основано на методах преобразования Фурье, "ε-регуляризации" и априорных оценок. Рассмотренный метод доказательства может быть применен в исследованиях нелокальных и периодических краевых задачах для многомерного уравнения смешанного типа.

Список литературы

[1] Бицадзе А.В. *Уравнения смешанного типа*. М: Изд.АН СССР. (1959) с.164

[2] Бицадзе А.В. *Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанного типа*. Новосибирск, ДАН СССР, (1953) 167-170.

[3] Франкль. Ф.И. *О задачах Чаплыгина для смешанных до и сверхзвуковых течений*. Изв.АН СССР.Сер.матем. 9(2), с.121-143 (1945)

[4] Франкль Ф.И. *Обтекание профилей потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения*. Прикладная математика и механика, **20** issue 2, 196-202 (1956).
[5] Франкль Ф.И. *Избранные труды по газовой динамике*. Москва. (1973) с.711.
[6] Кальменов Т.Ш. *О полупериодической задаче для многомерного уравнения смешанного типа*. Дифференциальные уравнения, **14** issue 3, 546-548 (1978).
[7] Сабитов К.Б. *Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области*. Докл. РАН. **413** issue 1, 23-26 (2007)
[8] Цыбиков Б.Н. *О корректности периодической задачи для многомерного уравнения смешанного типа*. В. кн: Неклассические уравнения математической физики, 201-206 (1986).
[9] Джамалов С.З. *The nonlocal boundary value problem with constant coefficients for the mixed type of equation of the first kind in a plane*. Malaysian journal of mathematical sciences. **12(1)**:49-62 (2018).
[10] Джамалов С.З. *Об одной нелокальной краевой задаче с постоянными коэффициентами для многомерного уравнения смешанного типа первого рода*. Вестник Самарского государственного технического университета, Сер.физ.-мат.науки, **21** issue 4, 1-14 (2017).
[11] Джамалов С.З., Ашуров Р.Р. *О гладкости одной нелокальной краевой задачи для многомерного уравнения Чаплыгина в пространстве*. Казахский математ журнал, **18** issue 2, 59-70 (2018).
[12] Джамалов.С.З. *Нелокальные краевые и обратные задачи для уравнений смешанного типа*. Монография. Ташкент. (2021) с.176.
[13] S.Z.Dzhamalov, Kh.Sh.Turakulov and M.S.Sultanov. *On a nonlocal boundary value problem for a three-dimensional Tricomi equation in a prismatic unbounded domain*. Lobachevskii Journal of Mathematics, Vol. 43, N. 11, 3104–3111 (2022).
[14] S.Z.Dzhamalov, B.K.Sipatdinova. *Semi-Nonlocal Boundary Problem for a Three-Dimensional Second Kind Mixed Equation in an Unbounded Parallelepiped* Lobachevskii Journal of Mathematics, Vol. 44, N. 3, 1137–1144. (2023)
[15] Ладыженская О.А. *Краевые задачи математической физики*. Москва, Наука, (1973).
[16] Лионс Ж.Л. Мадженес Э. *Неоднородные граничные задачи и их приложения*. М.Мир. (1971).
[17] Латтес.Р, Лионс.Ж.Л. *Метод квазиобращения*. М: Мир, (1971).
[18] Хермандер Л. *Линейные дифференциальные операторы с частными производными*. Издательство: «Мир».Москва. (1965).
[19] Никольский.С.М. *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*. Издательство: "Наука". Москва. (1977).
[20] Соболев.С.Л. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*. Издательство: "Наука". Москва. (1988).
[21] Врагов В.Н. *Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики*. Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск, НГУ, (1983).
[22] Кожанов А.И. *Краевые задачи для уравнений математической физики нечетного порядка*. Новосибирск, НГУ, (1990).
[23] Треногин.В.А. *Функциональный анализ*. Москва, с.488 (2007).
[24] Yuldashev T.K. *Determining of coefficients and the classical solvability of a nonlocal boundary-value problem for the Benney-Luke integro-differential equation with degenerate kernel*. J. Math. Sci. 254 (6), 793–807 (2021).

On the smoothness of the periodic boundary value problem for the three-dimensional Chaplygin equation in an unbounded parallelepiped

Dzhamalov Sirojiddin Z., Turakulov Khamidulla Sh. and Sipatdinova Biybinaz R.

Abstract

The article investigates the uniqueness, existence, and smoothness of a generalized solution to the periodic boundary value problem for the three-dimensional Chaplygin equation in an unbounded parallelepiped. To prove the theorems on uniqueness, existence, and smoothness of the solution, the Fourier transform, the methods of ε-regularization, and a priori estimates are used.

Affiliations

Dzhamalov Sirojiddin Z.

Address: 1. Scientific Laboratory of Differential Equations and Their Applications, V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics Uzbekistan Academy of Sciences, University street 9, 100174, Tashkent, Uzbekistan.

2. Tashkent State University of Economic, Tashkent, 100066, Uzbekistan

e-mail: siroj63@mail.ru
ORCID ID: 0000-0001-9392-5464.

Turakulov Khamidulla Sh.
Address: Kokand State University, Kokand, 150700 Uzbekistan
e-mail: second@author.com
ORCID ID: 57732238300

Sipatdinova Biybinaz K.
Address: Tashkent State Transport University, Temiryulchilar street 1, 1000167, Tashkent, Uzbekistan.
e-mail: sbiybinaz@mail.ru
ORCID ID: 0000-0002-7833-6992.