Uzbekistan Journal of Mathematics and Computer Science
Volume-1, Issue-2, Page 146–156 (2025)
DOI: https://doi.org/10.56143/ujmcs.v1i2.18
Research article

Некоторые Функциональные Тождества, Выводимые Из Одной Конфлюэнтной Гипергеометрической Функции E_7 От Трех Переменной

Юлдашова Хилола* Хасанов Анвар

Аннотация

В этой статье разбив конфлюэнтную гипергеометрическую функцию E_7 на восемь частей, мы показываем, как можно получить некоторые полезные и обобщенные соотношения между гипергеометрическими функциями Srivastava $F^{(3)}$ и E_7 . Показано, что другие основные результаты конкретизируются, чтобы получить определенные соотношения между функциями F_1, Ξ_1, ${}_4F_3$, ${}_2F_3$, ${}_1F_2$, ${}_1F_1$ и $F^{2:2;2}_{2:1;1}$. Также рассматриваются некоторые другие интересные функциональные соотношения между показательной функцией, гиперболическими функциями и модифицированными функциями Бесселя.

Ключевые слова: *Конфлюэнтная гипергеометрическая функция; обобщённые гипергеометрические ряды; функциональные тождества; модифицированные функции Бесселя; экспоненциальная функция.*

Предметная классификация AMS (2020): *Основная: 33C15 ; Дополнительная: 33C20; 33E30.*

1. Это нумерованный заголовок раздела первого уровня

Исследование гипергеометрических функций от многих переменных по существу мотивировано тем, что решения многих прикладных задач, включая теплопроводность и динамику, электромагнитные колебания и аэродинамику, квантовую механику и теорию потенциала, могут быть получены с помощью таких гипергеометрических (высших и специальных или трансцендентных) функций (см. [1], [7], [11], [23], [25]). Такие функции часто называют специальными функциями в математической физике. Они в основном появляются при решении уравнений в частных производных методом гармонического анализа.

Ввиду разнообразных приложений важно и само по себе интересно проводить непрерывное исследование кратных гипергеометрических функций. Фактически, в работе в работе Сриваставы и Карлссона [27] приведен обширный список из 205 гипергеометрических функций трёх переменных вместе с их областями сходимости. Отмечено, что функции Риммана и фундаментальные решения вырожденных уравнений в частных производных второго порядка выражаются через гипергеометрические функции многих переменных (см. [2], [4], [5], [6], [11], [12], [13], [14], [15], [16], [17], [24], [26], [29], [30], [31]). Для решения краевых задач для рассматриваемых уравнений в частных производных необходимо исследовать некоторые свойства гипергеометрических функций многих переменных (см. [18], [19], [20], [21], [22], [29]).

Received : *1–август–2025,* ***Accepted :*** *30–ноябрь–2025*
**** Corresponding author***

Ларднер [21] дал некоторые связи между функциями Бесселя и гипергеометрическими рядами ${}_0F_3$, например

$$ {}_0F_3\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;z\right)=\frac{1}{2}\left[J_0\left(4z^{\frac{1}{4}}\right)+I_0\left(4z^{\frac{1}{4}}\right)\right], \tag{1.1} $$

и

$$ ber\left(x\right)={}_0F_3\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;-\frac{x^4}{256}\right),\ \ bei\left(x\right)=\frac{x^2}{4}{}_0F_3\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},1;-\frac{x^4}{256}\right), \tag{1.2} $$

где J_ν и I_ν обозначают функцию Бесселя и модифицированную функцию Бесселя порядка ν, ([1], [10], [28], [33]), определяемую формулой

$$ J_\nu\left(z\right)=\frac{1}{\Gamma\left(\nu+1\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu{}_0F_1\left(-;\nu+1;-\frac{z^2}{4}\right), \tag{1.3} $$

$$ I_\nu\left(z\right)=\frac{1}{\Gamma\left(\nu+1\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu{}_0F_1\left(-;\nu+1;\frac{z^2}{4}\right), \tag{1.4} $$

$ber\left(x\right)$ и $bei\left(x\right)$ (где x вещественное число) обозначают функции Келвина, определяемые как

$$ ber\left(x\right)+i\,bei\left(x\right)=J_0\left(xe^{i\frac{3}{4}\pi}\right)=I_0\left(xe^{i\frac{1}{4}\pi}\right). \tag{1.5} $$

Карлссон [8] обобщил эти результаты для произвольных параметров, получив следующие результаты:

$$ {}_0F_3\left(\frac{1}{2},c,c+\frac{1}{2};z\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(2c\right)\left(2z^{\frac{1}{4}}\right)^{1-2c}\left[J_{2c-1}\left(4z^{\frac{1}{4}}\right)+I_{2c-1}\left(4z^{\frac{1}{4}}\right)\right], \tag{1.6} $$

$$ {}_0F_3\left(\frac{3}{2},c,c+\frac{1}{2};z\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(2c\right)\left(2z^{\frac{1}{4}}\right)^{-2c}\left[I_{2c-2}\left(4z^{\frac{1}{4}}\right)-J_{2c-2}\left(4z^{\frac{1}{4}}\right)\right], \tag{1.7} $$

где ${}_pF_q$ обобщенная гипергеометрическая функция [27] определяется следующим образом.

$$ {}_pF_q\left[\begin{matrix}\alpha_1,...,\alpha_p;\\ \beta_1,...,\beta_q;\end{matrix}z\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_n...(\alpha_p)_n}{(\beta_1)_n...(\beta_q)_n}\frac{z^n}{n!}={}_pF_q\left(\alpha_1,...,\alpha_p;\beta_1,...,\beta_q;z\right). \tag{1.8} $$

Ружанский, Хасанов, Эргашев в статье [32] используя результаты Сривастава и Карлссон [27], определили 395 конфлуентные гипергеометрические функции второго порядка от трех переменных. Один из них представлен следующим образом:

$$ \mathrm{E}_7\left(a_1,a_2,a_3,a_4;c;x,y,z\right)=\sum_{m,n,p=0}^{\infty}\frac{(a_1)_{m+n}(a_2)_m(a_3)_n(a_4)_p}{(c)_{m+n+p}}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{z^p}{p!}, \tag{1.9} $$

где C и Z_0^- - обозначают множество комплексных чисел и множество неположительных целых чисел соответственно, $(\lambda)_n$ символ Похгаммера, определяемый (для $\lambda\in$ C) [9], [27] формулой :

$$ (\lambda)_n:=\begin{cases}1, & (n=0)\\ \lambda\left(\lambda+1\right)\cdots\left(\lambda+n-1\right), & (n\in\mathrm{N}:=\{1,2,...\})\end{cases} $$

$$ =\frac{\Gamma\left(\lambda+n\right)}{\Gamma\left(\lambda\right)},\ \left(\lambda\in\mathrm{C}/\mathrm{Z}_0^-\right), $$

$\Gamma\left(\lambda\right)$ — — хорошо известная гамма-функция. Трёхмерная область сходимости функции (1.9) задана Ружанский, Хасанов, Эргашев [32]: $\{r<1,\ s<1,\ t<\infty\}$, $|x|:=r,\ |y|:=s,\ |z|:=t$, где положительные величины r,s,t связаны с радиусами сходимости функции (1.9).

2. Соотношения между гипергеометрическими функциями

В этом разделе мы устанавливаем некоторые интересные и полезные тождества, связанные с функциями E_7, $F^{(3)}$, $F^{p:q;k}_{l:m;n}$. Вспомним определения функций Аппеля [9] и функций Кампе де Ферие двух переменных [3], [27],

$$F_1\left(a_1; b_1, b_2; c; x, y\right) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_m\,(b_1)_m\,(b_2)_n}{(c)_{m+n}\,m!n!} x^m y^n, \tag{2.1}$$

$$F^{p:q;k}_{l:m;n}\left[\begin{array}{lll} (a_p): & (b_q); & (c_k); \\ (\alpha_l): & (\beta_m); & (\gamma_n); \end{array} x, y\right] = \sum_{r,s=0}^{\infty} \frac{\prod\limits_{i=1}^{p}(a_i)_{r+s}\prod\limits_{i=1}^{q}(b_i)_r\prod\limits_{i=1}^{k}(c_i)_s}{\prod\limits_{i=1}^{l}(\alpha_i)_{r+s}\prod\limits_{i=1}^{m}(\beta_i)_r\prod\limits_{i=1}^{n}(\gamma_i)_s\, r!s!} x^r y^s.$$

$F^{(3)}$ Обобщенная гипергеометрическая функция Сриваставы определяется как [27]

$$F^{(3)}\left[\begin{array}{llllll} -:: & (\delta); & -; & -: & (\alpha); & (\beta); \quad (\gamma); \\ (e):: & -; & -; & -: & (h_1); & (h_2); \quad (h_3); \end{array} x, y, z\right] \tag{2.2}$$

$$= \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(\delta_1)_{m+n}\,(\delta_2)_{m+n}\,(\alpha_1)_m\,(\alpha_2)_m\,(\beta_1)_n\,(\beta_2)_n\,(\gamma_1)_p\,(\gamma_2)_p}{(e_1)_{m+n+p}\,(e_2)_{m+n+p}\,(h_1)_m\,(h_2)_n\,(h_3)_p} \frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{z^p}{p!}.$$

Для этого мы просто разделяем суммирования в (1.9) на нечётные и чётные степени каждого из x^m,y^n и z^p. Фактически, для любого комплексного $c \in \mathrm{C}/\mathrm{Z}_0^-$ и любых конечных комплексных x, y и z, ряд $E_7\left(x, y, z\right)$ абсолютно сходится в области сходимости и следовательно, может быть переписан как в следующих восьми суммированиях:

$$\mathrm{E}_7\left(a_1, a_2, a_3, a_4; c; x, y, z\right) = \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{m+n}(a_2)_m(a_3)_n(a_4)_p}{(c)_{m+n+p}m!n!p!} x^m y^n z^p \tag{2.3}$$

$$= \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{2(m+n)}(a_2)_{2m}(a_3)_{2n}(a_4)_{2p}}{(c)_{2(m+n+p)}\,(2m)!\,(2n)!\,(2p)!} x^{2m} y^{2n} z^{2p}$$

$$+x\sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{2(m+n)+1}(a_2)_{2m+1}(a_3)_{2n}(a_4)_{2p}}{(c)_{2(m+n+p)+1}\,(2m+1)!\,(2n)!\,(2p)!} x^{2m} y^{2n} z^{2p}$$

$$+y\sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{2(m+n)+1}(a_2)_{2m}(a_3)_{2n+1}(a_4)_{2p}}{(c)_{2(m+n+p)+1}\,(2m)!\,(2n+1)!\,(2p)!} x^{2m} y^{2n} z^{2p}$$

$$+z\sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{2(m+n)}(a_2)_{2m}(a_3)_{2n}(a_4)_{2p+1}}{(c)_{2(m+n+p)+1}\,(2m)!\,(2n)!\,(2p+1)!} x^{2m} y^{2n} z^{2p}$$

$$+xy\sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{2(m+n)+2}(a_2)_{2m+1}(a_3)_{2n+1}(a_4)_{2p}}{(c)_{2(m+n+p)+2}\,(2m+1)!\,(2n+1)!\,(2p)!} x^{2m} y^{2n} z^{2p}$$

$$+xz\sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{2(m+n)+1}(a_2)_{2m+1}(a_3)_{2n}(a_4)_{2p+1}}{(c)_{2(m+n+p)+2}\,(2m+1)!\,(2n)!\,(2p+1)!} x^{2m} y^{2n} z^{2p}$$

$$+yz\sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{2(m+n)+1}(a_2)_{2m}(a_3)_{2n+1}(a_4)_{2p+1}}{(c)_{2(m+n+p)+2}\,(2m)!\,(2n+1)!\,(2p+1)!} x^{2m} y^{2n} z^{2p}$$

$$+xyz\sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{2(m+n)+2}(a_2)_{2m+1}(a_3)_{2n+1}(a_4)_{2p+1}}{(c)_{2(m+n+p)+3}\,(2m+1)!\,(2n+1)!\,(2p+1)!} x^{2m} y^{2n} z^{2p},$$

Теперь воспользуемся следующим хорошо известным (или легко выводимым) тождеством для символа Похгаммера (см. [9], [33]):

$$(nk)! = \left(\frac{1}{n}\right)_k \left(\frac{2}{n}\right)_k \dots \left(\frac{n-1}{n}\right)_k n^{nk} k!,$$

$$(nk+m)! = \left(\frac{m+1}{n}\right)_k \left(\frac{m+2}{n}\right)_k \dots \left(\frac{m+n}{n}\right)_k n^{nk} m!,$$

$$(a)_{2m} = \left(\frac{a}{2}\right)_m \left(\frac{a+1}{2}\right)_m 4^m, \quad (a)_{2m+1} = a\left(\frac{a+1}{2}\right)_m \left(\frac{a+2}{2}\right)_m 4^m,$$

$$(c)_{2m+2} = c\,(c+1)\left(\frac{c+2}{2}\right)_m \left(\frac{c+3}{2}\right)_m 4^m,$$

$$(c)_{2m+3} = c\,(c+1)\,(c+2)\left(\frac{c+3}{2}\right)_m \left(\frac{c+4}{2}\right)_m 4^m, \ \left(m \in \mathrm{N}_0 := \mathrm{N} \cup \{0\}, n \in \mathrm{N}\right),$$

после некоторого упрощения получаем следующая теорема.

Теорема 2.1. *Имеет место следующей соотношение между* E_7 *и* $F^{(3)}$

$$\mathrm{E}_7\left(a_1, a_2, a_3, a_4; c; x, y, z\right) = \tag{2.4}$$

$$= F^{(3)}\left[\begin{array}{l} - :: \frac{a_1}{2}, \frac{a_1+1}{2}; \ -; \ - : \frac{a_2}{2}, \frac{a_2+1}{2}; \ \frac{a_3}{2}, \frac{a_3+1}{2}; \ \frac{a_4}{2}, \frac{a_4+1}{2}; \\ \frac{c}{2}, \frac{c+1}{2} :: -; \ -; \ - : \frac{1}{2}; \ \frac{1}{2}; \ \frac{1}{2}; \end{array} x^2, y^2, \frac{z^2}{4}\right]$$

$$+\frac{a_1 a_2}{c} x \times$$

$$\times F^{(3)}\left[\begin{array}{l} - :: \frac{a_1+1}{2}, \frac{a_1+2}{2}; \ -; \ - : \frac{a_2+1}{2}, \frac{a_2+2}{2}; \ \frac{a_3}{2}, \frac{a_3+1}{2}; \ \frac{a_4}{2}, \frac{a_4+1}{2}; \\ \frac{c+1}{2}, \frac{c+2}{2} :: -; \ -; \ - : \frac{3}{2}; \ \frac{1}{2}; \ \frac{1}{2}; \end{array} x^2, y^2, \frac{z^2}{4}\right]$$

$$+\frac{a_1 a_3}{c} y \times$$

$$\times F^{(3)}\left[\begin{array}{l} - :: \frac{a_1+1}{2}, \frac{a_1+2}{2}; \ -; \ - : \frac{a_2}{2}, \frac{a_2+1}{2}; \ \frac{a_3+1}{2}, \frac{a_3+2}{2}; \ \frac{a_4}{2}, \frac{a_4+1}{2}; \\ \frac{c+1}{2}, \frac{c+2}{2} :: -; \ -; \ - : \frac{1}{2}; \ \frac{3}{2}; \ \frac{1}{2}; \end{array} x^2, y^2, \frac{z^2}{4}\right]$$

$$+\frac{a_4}{c} z F^{(3)}\left[\begin{array}{l} - :: \frac{a_1}{2}, \frac{a_1+1}{2}; \ -; \ - : \frac{a_2}{2}, \frac{a_2+1}{2}; \ \frac{a_3}{2}, \frac{a_3+1}{2}; \ \frac{a_4+1}{2}, \frac{a_4+2}{2}; \\ \frac{c+1}{2}, \frac{c+2}{2} :: -; \ -; \ - : \frac{1}{2}; \ \frac{1}{2}; \ \frac{3}{2}; \end{array} x^2, y^2, \frac{z^2}{4}\right]$$

$$+\frac{a_1\left(a_1+1\right) a_2 a_3}{c\,(c+1)} xy \times$$

$$\times F^{(3)}\left[\begin{array}{l} - :: \frac{a_1+2}{2}, \frac{a_1+3}{2}; \ -; \ - : \frac{a_2+1}{2}, \frac{a_2+2}{2}; \ \frac{a_3+1}{2}, \frac{a_3+2}{2}; \ \frac{a_4}{2}, \frac{a_4+1}{2}; \\ \frac{c+2}{2}, \frac{c+3}{2} :: -; \ -; \ - : \frac{3}{2}; \ \frac{3}{2}; \ \frac{1}{2}; \end{array} x^2, y^2, \frac{z^2}{4}\right]$$

$$+\frac{a_1 a_2 a_4}{c\,(c+1)} xz \times$$

$$\times F^{(3)}\left[\begin{array}{l} - :: \frac{a_1+1}{2}, \frac{a_1+2}{2}; \ -; \ - : \frac{a_2+1}{2}, \frac{a_2+2}{2}; \ \frac{a_3}{2}, \frac{a_3+1}{2}; \ \frac{a_4+1}{2}, \frac{a_4+2}{2}; \\ \frac{c+2}{2}, \frac{c+3}{2} :: -; \ -; \ - : \frac{3}{2}; \ \frac{1}{2}; \ \frac{3}{2}; \end{array} x^2, y^2, \frac{z^2}{4}\right]$$

$$+\frac{a_1 a_3 a_4}{c\,(c+1)} yz \times$$

$$\times F^{(3)}\left[\begin{array}{l} - :: \frac{a_1+1}{2}, \frac{a_1+2}{2}; \ -; \ - : \frac{a_2}{2}, \frac{a_2+1}{2}; \ \frac{a_3+1}{2}, \frac{a_3+2}{2}; \ \frac{a_4+1}{2}, \frac{a_4+2}{2}; \\ \frac{c+2}{2}, \frac{c+3}{2} :: -; \ -; \ - : \frac{1}{2}; \ \frac{3}{2}; \ \frac{3}{2}; \end{array} x^2, y^2, \frac{z^2}{4}\right]$$

$$+\frac{a_1\left(a_1+1\right) a_2 a_3 a_4}{c\,(c+1)\,(c+2)} xyz \times$$

$$\times F^{(3)}\left[\begin{array}{l} - :: \frac{a_1+2}{2}, \frac{a_1+3}{2}; \ -; \ - : \frac{a_2+1}{2}, \frac{a_2+2}{2}; \ \frac{a_3+1}{2}, \frac{a_3+2}{2}; \ \frac{a_4+1}{2}, \frac{a_4+2}{2}; \\ \frac{c+3}{2}, \frac{c+4}{2} :: -; \ -; \ - : \frac{3}{2}; \ \frac{3}{2}; \ \frac{3}{2}; \end{array} x^2, y^2, \frac{z^2}{4}\right].$$

Далее, меняя знаки x, y, z в определении E_7, мы легко выражаем $F^{(3)}$ через E_7 из (2.4).

Теорема 2.2. *Справедливы следующие восемь соотношений между $F^{(3)}$ и E_7.*

$$
\begin{gathered}
8F^{(3)}\left[\begin{array}{ccccccc} -:: & \frac{a_1}{2},\frac{a_1+1}{2}; & -; & -: & \frac{a_2}{2},\frac{a_2+1}{2}; & \frac{a_3}{2},\frac{a_3+1}{2}; & \frac{a_4}{2},\frac{a_4+1}{2}; \\ \frac{c}{2},\frac{c+1}{2}:: & -; & -; & -: & \frac{1}{2}; & \frac{1}{2}; & \frac{1}{2}; \end{array} x^2,y^2,\frac{z^2}{4}\right] \\
=\mathrm{E}_7(x,y,z)+\mathrm{E}_7(-x,y,z)+\mathrm{E}_7(x,-y,z)+\mathrm{E}_7(x,y,-z) \\
+\mathrm{E}_7(-x,-y,z)+\mathrm{E}_7(-x,y,-z)+\mathrm{E}_7(x,-y,-z)+\mathrm{E}_7(-x,-y,-z),
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
F^{(3)}\left[\begin{array}{ccccccc} -:: & \frac{a_1+1}{2},\frac{a_1+2}{2}; & -; & -: & \frac{a_2+1}{2},\frac{a_2+2}{2}; & \frac{a_3}{2},\frac{a_3+1}{2}; & \frac{a_4}{2},\frac{a_4+1}{2}; \\ \frac{c+1}{2},\frac{c+2}{2}:: & -; & -; & -: & \frac{3}{2}; & \frac{1}{2}; & \frac{1}{2}; \end{array} x^2,y^2,\frac{z^2}{4}\right] \\
\times 8\frac{a_1a_2}{c}x=\mathrm{E}_7(x,y,z)-\mathrm{E}_7(-x,y,z)+\mathrm{E}_7(x,-y,z)+\mathrm{E}_7(x,y,-z) \\
-\mathrm{E}_7(-x,-y,z)-\mathrm{E}_7(-x,y,-z)+\mathrm{E}_7(x,-y,-z)-\mathrm{E}_7(-x,-y,-z),
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
F^{(3)}\left[\begin{array}{ccccccc} -:: & \frac{a_1+1}{2},\frac{a_1+2}{2}; & -; & -: & \frac{a_2}{2},\frac{a_2+1}{2}; & \frac{a_3+1}{2},\frac{a_3+2}{2}; & \frac{a_4}{2},\frac{a_4+1}{2}; \\ \frac{c+1}{2},\frac{c+2}{2}:: & -; & -; & -: & \frac{1}{2}; & \frac{3}{2}; & \frac{1}{2}; \end{array} x^2,y^2,\frac{z^2}{4}\right] \\
\times 8\frac{a_1a_3}{c}y=\mathrm{E}_7(x,y,z)+\mathrm{E}_7(-x,y,z)-\mathrm{E}_7(x,-y,z)+\mathrm{E}_7(x,y,-z) \\
-\mathrm{E}_7(-x,-y,z)+\mathrm{E}_7(-x,y,-z)-\mathrm{E}_7(x,-y,-z)-\mathrm{E}_7(-x,-y,-z),
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
F^{(3)}\left[\begin{array}{ccccccc} -:: & \frac{a_1}{2},\frac{a_1+1}{2}; & -; & -: & \frac{a_2}{2},\frac{a_2+1}{2}; & \frac{a_3}{2},\frac{a_3+1}{2}; & \frac{a_4+1}{2},\frac{a_4+2}{2}; \\ \frac{c+1}{2},\frac{c+2}{2}:: & -; & -; & -: & \frac{1}{2}; & \frac{1}{2}; & \frac{3}{2}; \end{array} x^2,y^2,\frac{z^2}{4}\right] \\
\times 8\frac{a_4}{c}z=\mathrm{E}_7(x,y,z)+\mathrm{E}_7(-x,y,z)+\mathrm{E}_7(x,-y,z)-\mathrm{E}_7(x,y,-z) \\
+\mathrm{E}_7(-x,-y,z)-\mathrm{E}_7(-x,y,-z)-\mathrm{E}_7(x,-y,-z)-\mathrm{E}_7(-x,-y,-z),
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
F^{(3)}\left[\begin{array}{ccccccc} -:: & \frac{a_1+2}{2},\frac{a_1+3}{2}; & -; & -: & \frac{a_2+1}{2},\frac{a_2+2}{2}; & \frac{a_3+1}{2},\frac{a_3+2}{2}; & \frac{a_4}{2},\frac{a_4+1}{2}; \\ \frac{c+2}{2},\frac{c+3}{2}:: & -; & -; & -: & \frac{3}{2}; & \frac{3}{2}; & \frac{1}{2}; \end{array} x^2,y^2,\frac{z^2}{4}\right] \\
\times 8\frac{a_1(a_1+1)a_2a_3}{c(c+1)}xy=\mathrm{E}_7(x,y,z)-\mathrm{E}_7(-x,y,z)-\mathrm{E}_7(x,-y,z)+\mathrm{E}_7(x,y,-z) \\
+\mathrm{E}_7(-x,-y,z)-\mathrm{E}_7(-x,y,-z)-\mathrm{E}_7(x,-y,-z)+\mathrm{E}_7(-x,-y,-z),
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
F^{(3)}\left[\begin{array}{ccccccc} -:: & \frac{a_1+1}{2},\frac{a_1+2}{2}; & -; & -: & \frac{a_2+1}{2},\frac{a_2+2}{2}; & \frac{a_3}{2},\frac{a_3+1}{2}; & \frac{a_4+1}{2},\frac{a_4+2}{2}; \\ \frac{c+2}{2},\frac{c+3}{2}:: & -; & -; & -: & \frac{3}{2}; & \frac{1}{2}; & \frac{3}{2}; \end{array} x^2,y^2,\frac{z^2}{4}\right] \\
\times 8\frac{a_1a_2a_4}{c(c+1)}xz=\mathrm{E}_7(x,y,z)-\mathrm{E}_7(-x,y,z)+\mathrm{E}_7(x,-y,z)-\mathrm{E}_7(x,y,-z) \\
-\mathrm{E}_7(-x,-y,z)+\mathrm{E}_7(-x,y,-z)-\mathrm{E}_7(x,-y,-z)+\mathrm{E}_7(-x,-y,-z),
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
F^{(3)}\left[\begin{array}{ccccccc} -:: & \frac{a_1+1}{2},\frac{a_1+2}{2}; & -; & -: & \frac{a_2}{2},\frac{a_2+1}{2}; & \frac{a_3+1}{2},\frac{a_3+2}{2}; & \frac{a_4+1}{2},\frac{a_4+2}{2}; \\ \frac{c+2}{2},\frac{c+3}{2}:: & -; & -; & -: & \frac{1}{2}; & \frac{3}{2}; & \frac{3}{2}; \end{array} x^2,y^2,\frac{z^2}{4}\right] \\
\times 8\frac{a_1a_3a_4}{c(c+1)}yz=\mathrm{E}_7(x,y,z)+\mathrm{E}_7(-x,y,z)-\mathrm{E}_7(x,-y,z)-\mathrm{E}_7(x,y,-z)
\end{gathered}
$$

$$-\mathrm{E}_7(-x,-y,z)-\mathrm{E}_7(-x,y,-z)+\mathrm{E}_7(x,-y,-z)+\mathrm{E}_7(-x,-y,-z),$$

$$F^{(3)}\left[\begin{array}{cccccccc} -:: & \frac{a_1+2}{2},\frac{a_1+3}{2}; & -; & -: & \frac{a_2+1}{2},\frac{a_2+2}{2}; & \frac{a_3+1}{2},\frac{a_3+2}{2}; & \frac{a_4+1}{2},\frac{a_4+2}{2}; & \\ \frac{c+3}{2},\frac{c+4}{2}:: & -; & -; & -: & \frac{3}{2}; & \frac{3}{2}; & \frac{3}{2}; & x^2,y^2,\frac{z^2}{4}\end{array}\right]$$

$$\times 8\frac{a_1(a_1+1)a_2a_3a_4}{c(c+1)(c+2)}xyz=\mathrm{E}_7(x,y,z)-\mathrm{E}_7(-x,y,z)-\mathrm{E}_7(x,-y,z)-\mathrm{E}_7(x,y,-z)$$

$$+\mathrm{E}_7(-x,-y,z)+\mathrm{E}_7(-x,y,-z)+\mathrm{E}_7(x,-y,-z)-\mathrm{E}_7(-x,-y,-z),$$

где для простоты обозначено $E_7(x,y,z)=\mathrm{E}_7(a_1,a_2,a_3,a_4;c;x,y,z)$ *обозначается как* (1.9).

Следствие 2.1. *Если в соотношение* (2.4) *полагать* $z=0$ *то мы имеем*

$$F_1(a_1;a_2,a_3;c;x,y)=\mathrm{E}_7(a_1,a_2,a_3,a_4;c;x,y,0)= \tag{2.5}$$

$$=F^{2:2;2}_{2:1;1}\left[\begin{array}{cccc}\frac{a_1}{2},\frac{a_1+1}{2}: & \frac{a_2}{2},\frac{a_2+1}{2}; & \frac{a_3}{2},\frac{a_3+1}{2}; & \\ \frac{c}{2},\frac{c+1}{2}: & \frac{1}{2}; & \frac{1}{2}; & x^2,y^2\end{array}\right]$$

$$+\frac{a_1a_2}{c}xF^{2:2;2}_{2:1;1}\left[\begin{array}{cccc}\frac{a_1+1}{2},\frac{a_1+2}{2}: & \frac{a_2+1}{2},\frac{a_2+2}{2}; & \frac{a_3}{2},\frac{a_3+1}{2}; & \\ \frac{c+1}{2},\frac{c+2}{2}: & \frac{3}{2}; & \frac{1}{2}; & x^2,y^2\end{array}\right]$$

$$+\frac{a_1a_3}{c}yF^{2:2;2}_{2:1;1}\left[\begin{array}{cccc}\frac{a_1+1}{2},\frac{a_1+2}{2}: & \frac{a_2}{2},\frac{a_2+1}{2}; & \frac{a_3+1}{2},\frac{a_3+2}{2}; & \\ \frac{c+1}{2},\frac{c+2}{2}: & \frac{1}{2}; & \frac{3}{2}; & x^2,y^2\end{array}\right]$$

$$+\frac{a_1(a_1+1)a_2a_3}{c(c+1)}xyF^{2:2;2}_{2:1;1}\left[\begin{array}{cccc}\frac{a_1+2}{2},\frac{a_1+3}{2}: & \frac{a_2+1}{2},\frac{a_2+2}{2}; & \frac{a_3+1}{2},\frac{a_3+2}{2}; & \\ \frac{c+2}{2},\frac{c+3}{2}: & \frac{3}{2}; & \frac{3}{2}; & x^2,y^2\end{array}\right].$$

Следствие 2.2. *Меняя знаки* x,y *переменных в* (2.5), *мы легко выражаем* $F^{2:2;2}_{2:1;1}$ *через* F_1

$$4F^{2:2;2}_{2:1;1}\left[\begin{array}{cccc}\frac{a_1}{2},\frac{a_1+1}{2}: & \frac{a_2}{2},\frac{a_2+1}{2}; & \frac{a_3}{2},\frac{a_3+1}{2}; & \\ \frac{c}{2},\frac{c+1}{2}: & \frac{1}{2}; & \frac{1}{2}; & x^2,y^2\end{array}\right] \tag{2.6}$$

$$=\mathrm{F}_1(x,y)+\mathrm{F}_1(-x,y)+\mathrm{F}_1(x,-y)+\mathrm{F}_1(-x,-y),$$

$$4\frac{a_1a_2}{c}xF^{2:2;2}_{2:1;1}\left[\begin{array}{cccc}\frac{a_1+1}{2},\frac{a_1+2}{2}: & \frac{a_2+1}{2},\frac{a_2+2}{2}; & \frac{a_3}{2},\frac{a_3+1}{2}; & \\ \frac{c+1}{2},\frac{c+2}{2}: & \frac{3}{2}; & \frac{1}{2}; & x^2,y^2\end{array}\right] \tag{2.7}$$

$$=\mathrm{F}_1(x,y)-\mathrm{F}_1(-x,y)+\mathrm{F}_1(x,-y)-\mathrm{F}_1(-x,-y),$$

$$4\frac{a_1a_3}{c}yF^{2:2;2}_{2:1;1}\left[\begin{array}{cccc}\frac{a_1+1}{2},\frac{a_1+2}{2}: & \frac{a_2}{2},\frac{a_2+1}{2}; & \frac{a_3+1}{2},\frac{a_3+2}{2}; & \\ \frac{c+1}{2},\frac{c+2}{2}: & \frac{1}{2}; & \frac{3}{2}; & x^2,y^2\end{array}\right] \tag{2.8}$$

$$=\mathrm{F}_1(x,y)+\mathrm{F}_1(-x,y)-\mathrm{F}_1(x,-y)-\mathrm{F}_1(-x,-y),$$

$$4\frac{a_1(a_1+1)a_2a_3}{c(c+1)}xyF^{2:2;2}_{2:1;1}\left[\begin{array}{cccc}\frac{a_1+2}{2},\frac{a_1+3}{2}: & \frac{a_2+1}{2},\frac{a_2+2}{2}; & \frac{a_3+1}{2},\frac{a_3+2}{2}; & \\ \frac{c+2}{2},\frac{c+3}{2}: & \frac{3}{2}; & \frac{3}{2}; & x^2,y^2\end{array}\right]= \tag{2.9}$$

$$=\mathrm{F}_1(x,y)-\mathrm{F}_1(-x,y)-\mathrm{F}_1(x,-y)+\mathrm{F}_1(-x,-y),$$

где $F_1(x,y)=F_1(a_1;b_1,b_2;c;x,y)$.

Комментарий 1. Если в разложениях (2.6) -(2.9) воспользоваться формулой

$$F_1(\alpha;\beta,\beta';\beta+\beta';x,y)=(1-y)^{-\alpha}F(\alpha,\beta;\beta+\beta';(x-y)/(1-y)),$$

то мы получим функциональные соотношения между функциями $F^{2:2;2}_{2:1;1}$ и гипергеометрическими функциями Гаусса F.

Комментарий 2. При $y=0$ из равенств (2.5), (2.6), (2.7), следуют функциональные тождества

$$\mathrm{F}\left(a_1,a_2;c;x\right)={}_4F_3\left(\frac{a_1}{2},\frac{a_1+1}{2},\frac{a_2}{2},\frac{a_2+1}{2};\frac{c}{2},\frac{c+1}{2},\frac{1}{2};x^2\right)$$

$$+\frac{a_1a_2}{c}x\,{}_4F_3\left(\frac{a_1+1}{2},\frac{a_1+2}{2},\frac{a_2+1}{2},\frac{a_2+2}{2};\frac{c+1}{2},\frac{c+2}{2},\frac{3}{2};x^2\right),$$

$$2\,{}_4F_3\left(\frac{a_1}{2},\frac{a_1+1}{2},\frac{a_2}{2},\frac{a_2+1}{2};\frac{c}{2},\frac{c+1}{2},\frac{1}{2};x^2\right)=\mathrm{F}\left(a_1,a_2;c;x\right)+\mathrm{F}\left(a_1,a_2;c;-x\right),$$

$$2\frac{a_1a_2}{c}x\,{}_4F_3\left(\frac{a_1+1}{2},\frac{a_1+2}{2},\frac{a_2+1}{2},\frac{a_2+2}{2};\frac{c+1}{2},\frac{c+2}{2},\frac{3}{2};x^2\right)$$
$$=\mathrm{F}\left(a_1,a_2;c;x\right)-\mathrm{F}\left(a_1,a_2;c;-x\right).$$

Если воспользоваться, например равенствами [33]:

$$\mathrm{F}\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2};\frac{1}{2};x\right)=\sqrt{1-x}+\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x},\quad 0\le x\le 1,$$

$$\mathrm{F}\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2};\frac{1}{2};-x\right)=\sqrt{1+x}-\sqrt{x}\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{1+x}\right),\quad 0\le x\le 1,$$

То мы получим следующие функциональные тождества

$${}_3F_2\left(-\frac{1}{4},-\frac{1}{4},\frac{1}{4};\frac{3}{4},\frac{1}{2};x^2\right)+\frac{1}{2}x\,{}_3F_2\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{3}{4};\frac{5}{4},\frac{3}{2};x^2\right)$$
$$=\sqrt{1-x}+\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x},$$
$${}_3F_2\left(-\frac{1}{4},-\frac{1}{4},\frac{1}{4};\frac{3}{4},\frac{1}{2};x^2\right)-\frac{1}{2}x\,{}_3F_2\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{3}{4};\frac{5}{4},\frac{3}{2};x^2\right)$$
$$=\sqrt{1+x}-\sqrt{x}\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{1+x}\right),$$
$$2\,{}_3F_2\left(-\frac{1}{4},-\frac{1}{4},\frac{1}{4};\frac{3}{4},\frac{1}{2};x^2\right)=\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}+\sqrt{x}\left[\arcsin\sqrt{x}-\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{1+x}\right)\right],$$
$$x\,{}_3F_2\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{3}{4};\frac{5}{4},\frac{3}{2};x^2\right)=\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}+\sqrt{x}\left[\arcsin\sqrt{x}+\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{1+x}\right)\right].$$

Следствие 2.3. *Если в соотношение* (2.4) *полагать* $x=0$*, то мы имеем*

$$\Xi_1\left(a_1,a_4,a_3;c;y,z\right)=\mathrm{E}_7\left(a_1,a_2,a_3,a_4;c;0,y,z\right)\tag{2.10}$$
$$=F^{0:4;2}_{2:1;1}\left[\begin{matrix}-: & \frac{a_1}{2},\frac{a_1+1}{2},\frac{a_3}{2},\frac{a_3+1}{2}; & \frac{a_4}{2},\frac{a_4+1}{2}; \\ \frac{c}{2},\frac{c+1}{2}: & \frac{1}{2}; & \frac{1}{2};\end{matrix}\ y^2,\frac{z^2}{4}\right]$$
$$+\frac{a_1a_3}{c}yF^{0:4;2}_{2:1;1}\left[\begin{matrix}-: & \frac{a_1+1}{2},\frac{a_1+2}{2},\frac{a_3+1}{2},\frac{a_3+2}{2}; & \frac{a_4}{2},\frac{a_4+1}{2}; \\ \frac{c+1}{2},\frac{c+2}{2}: & \frac{3}{2}; & \frac{1}{2};\end{matrix}\ y^2,\frac{z^2}{4}\right]$$
$$+\frac{a_4}{c}zF^{0:4;2}_{2:1;1}\left[\begin{matrix}-: & \frac{a_1}{2},\frac{a_1+1}{2},\frac{a_3}{2},\frac{a_3+1}{2}; & \frac{a_4+1}{2},\frac{a_4+2}{2}; \\ \frac{c+1}{2},\frac{c+2}{2}: & \frac{1}{2}; & \frac{3}{2};\end{matrix}\ y^2,\frac{z^2}{4}\right]$$
$$+\frac{a_1a_3a_4}{c\left(c+1\right)}yzF^{0:4;2}_{2:1;1}\left[\begin{matrix}-: & \frac{a_1+1}{2},\frac{a_1+2}{2},\frac{a_3+1}{2},\frac{a_3+2}{2}; & \frac{a_4+1}{2},\frac{a_4+2}{2}; \\ \frac{c+2}{2},\frac{c+3}{2}: & \frac{3}{2}; & \frac{3}{2};\end{matrix}\ y^2,\frac{z^2}{4}\right]$$

где функция Гумберта [3], [9] определяется следующим образом:

$$\Xi_1(\alpha_1,\alpha_2,\beta;\gamma;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_m(\alpha_2)_n(\beta)_m}{(\gamma)_{m+n}\,m!n!}x^my^n.$$

Следствие 2.4. *Аналогичным образом, меняя знаки y,z переменных в (2.9), мы выражаем гипергеометрическую функцию $F^{0:4;2}_{2:1;1}$ через функцию Ξ_1.*

$$4F^{0:4;2}_{2:1;1}\left[\begin{matrix} - : & \frac{a_1}{2},\frac{a_1+1}{2},\frac{a_3}{2},\frac{a_3+1}{2}; & \frac{a_4}{2},\frac{a_4+1}{2}; \\ \frac{c}{2},\frac{c+1}{2} : & \frac{1}{2}; & \frac{1}{2}; \end{matrix}\ y^2,\frac{z^2}{4}\right]=$$
$$=\Xi_1(y,z)+\Xi_1(-y,z)+\Xi_1(y,-z)+\Xi_1(-y,-z),$$

$$4\frac{a_1a_3}{c}yF^{0:4;2}_{2:1;1}\left[\begin{matrix} - : & \frac{a_1+1}{2},\frac{a_1+2}{2},\frac{a_3+1}{2},\frac{a_3+2}{2}; & \frac{a_4}{2},\frac{a_4+1}{2}; \\ \frac{c+1}{2},\frac{c+2}{2} : & \frac{3}{2}; & \frac{1}{2}; \end{matrix}\ y^2,\frac{z^2}{4}\right]=$$
$$=\Xi_1(y,z)-\Xi_1(-y,z)+\Xi_1(y,-z)-\Xi_1(-y,-z),$$

$$4\frac{a_4}{c}zF^{0:4;2}_{2:1;1}\left[\begin{matrix} - : & \frac{a_1}{2},\frac{a_1+1}{2},\frac{a_3}{2},\frac{a_3+1}{2}; & \frac{a_4+1}{2},\frac{a_4+2}{2}; \\ \frac{c+1}{2},\frac{c+2}{2} : & \frac{1}{2}; & \frac{3}{2}; \end{matrix}\ y^2,\frac{z^2}{4}\right]=$$
$$=\Xi_1(y,z)+\Xi_1(-y,z)-\Xi_1(y,-z)-\Xi_1(-y,-z),$$

$$4\frac{a_1a_3a_4}{c(c+1)}yzF^{0:4;2}_{2:1;1}\left[\begin{matrix} - : & \frac{a_1+1}{2},\frac{a_1+2}{2},\frac{a_3+1}{2},\frac{a_3+2}{2}; & \frac{a_4+1}{2},\frac{a_4+2}{2}; \\ \frac{c+2}{2},\frac{c+3}{2} : & \frac{3}{2}; & \frac{3}{2}; \end{matrix}\ y^2,\frac{z^2}{4}\right]=$$
$$=\Xi_1(y,z)-\Xi_1(-y,z)-\Xi_1(y,-z)+\Xi_1(-y,-z),$$

где $\Xi_1(y,z)=\Xi_1(a_1,a_4,a_3;c;y,z)$.

Следствие 2.5. Если в соотношение (2.10)полагать $y=0$, то мы имеем

$${}_1F_1(a_4;c;z)={}_2F_3\left(\frac{a_4}{2},\frac{a_4+1}{2};\frac{c}{2},\frac{c+1}{2},\frac{1}{2};\frac{z^2}{4}\right)$$

$$\frac{a_4}{c}z\,{}_2F_3\left(\frac{a_4+1}{2},\frac{a_4+2}{2};\frac{c+1}{2},\frac{c+2}{2},\frac{3}{2};\frac{z^2}{4}\right),$$

где ${}_1F_1$ функция Куммера, а ${}_2F_3$ обобщенная гипергеометрическая функция Гаусса.

Из функционального равенство (2.10) не трудно получить следующие соотношения, которые связывают обобщенные гипергеометрические ряды с функциями Куммера

$$2\,{}_2F_3\left(\frac{a_5}{2},\frac{a_5+1}{2};\frac{c}{2},\frac{c+1}{2},\frac{1}{2};\frac{z^2}{4}\right)={}_1F_1(a_5;c;z)+{}_1F_1(a_5;c;-z),$$

$$2\frac{a_5}{c}z\,{}_2F_3\left(\frac{a_5+1}{2},\frac{a_5+2}{2};\frac{c+1}{2},\frac{c+2}{2},\frac{3}{2};\frac{z^2}{4}\right)={}_1F_1(a_5;c;z)-{}_1F_1(a_5;c;-z).$$

Если воспользоваться формулами для функции Куммера [33], например:

$${}_1F_1\left(\frac{3}{4};-\frac{1}{4};z\right)=(1-4z)e^z,\quad {}_1F_1\left(\frac{3}{4};-\frac{1}{4};-z\right)=(1+4z)e^{-z},$$

$${}_1F_1\left(\frac{1}{2};1;z\right)=I_0\left(\frac{z}{2}\right)e^{\frac{z}{2}},\quad {}_1F_1\left(\frac{1}{2};1;-z\right)=I_0\left(\frac{z}{2}\right)e^{-\frac{z}{2}},$$

$$
{}_1F_1\left(\frac{1}{2};2;z\right)=\left[I_0\left(\frac{z}{2}\right)-I_1\left(\frac{z}{2}\right)\right]e^{\frac{z}{2}},\ \ {}_1F_1\left(\frac{1}{2};2;-z\right)=\left[I_0\left(\frac{z}{2}\right)+I_1\left(\frac{z}{2}\right)\right]e^{-\frac{z}{2}},
$$

$$
{}_1F_1\left(a;2a;z\right)=\left(\frac{z}{4}\right)^{\frac{1}{2}-a}\Gamma\left(\frac{1}{2}+a\right)I_{a-\frac{1}{2}}\left(\frac{z}{2}\right)e^{\frac{z}{2}},
$$

$$
{}_1F_1\left(a;2a;-z\right)=\left(\frac{z}{4}\right)^{\frac{1}{2}-a}\Gamma\left(\frac{1}{2}+a\right)I_{a-\frac{1}{2}}\left(\frac{z}{2}\right)e^{-\frac{z}{2}},
$$

тогда мы получаем следующие функциональные соотношения

$$
{}_1F_2\left(\frac{7}{8};-\frac{1}{8},\frac{1}{2};\frac{z^2}{4}\right)=ch\left(z\right)-4zsh\left(z\right),
$$

$$
3z{}_1F_2\left(\frac{11}{8};\frac{3}{8},\frac{3}{2};\frac{z^2}{4}\right)=4zch\left(z\right)-sh\left(z\right),
$$

$$
{}_2F_3\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4};\frac{1}{2},1,\frac{1}{2};\frac{z^2}{4}\right)=ch\left(\frac{z}{2}\right)I_0\left(\frac{z}{2}\right),
$$

$$
z{}_2F_3\left(\frac{3}{4},\frac{5}{4};1,\frac{3}{2},\frac{3}{2};\frac{z^2}{4}\right)=2sh\left(\frac{z}{2}\right)I_0\left(\frac{z}{2}\right),
$$

$$
{}_2F_3\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4};1,\frac{3}{2},\frac{1}{2};\frac{z^2}{4}\right)=ch\left(\frac{z}{2}\right)I_0\left(\frac{z}{2}\right)-sh\left(\frac{z}{2}\right)I_1\left(\frac{z}{2}\right),
$$

$$
z{}_2F_3\left(\frac{3}{4},\frac{5}{4};\frac{3}{2},2,\frac{3}{2};\frac{z^2}{4}\right)=4sh\left(\frac{z}{2}\right)I_0\left(\frac{z}{2}\right)-4ch\left(\frac{z}{2}\right)I_1\left(\frac{z}{2}\right),
$$

$$
{}_2F_3\left(\frac{\frac{1}{4}}{2},\frac{\frac{1}{4}+1}{2};\frac{\frac{1}{2}}{2},\frac{\frac{1}{2}+1}{2},\frac{1}{2};\frac{z^2}{4}\right)=\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)ch\left(\frac{z}{2}\right)\sqrt[4]{\frac{z}{4}}I_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{z}{2}\right),
$$

$$
z{}_2F_3\left(\frac{\frac{1}{4}+1}{2},\frac{\frac{1}{4}+2}{2};\frac{\frac{1}{2}+1}{2},\frac{\frac{1}{2}+2}{2},\frac{3}{2};\frac{z^2}{4}\right)=2\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)sh\left(\frac{z}{2}\right)\sqrt[4]{\frac{z}{4}}I_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{z}{2}\right),
$$

$$
{}_2F_3\left(\frac{a}{2},\frac{a+1}{2};a,\frac{2a+1}{2},\frac{1}{2};\frac{z^2}{4}\right)=\Gamma\left(\frac{1}{2}+a\right)\left(\frac{z}{4}\right)^{\frac{1}{2}-a}ch\left(\frac{z}{2}\right)I_{a-\frac{1}{2}}\left(\frac{z}{2}\right),
$$

$$
z{}_2F_3\left(\frac{a+1}{2},\frac{a+2}{2};\frac{2a+1}{2},a+1,\frac{3}{2};\frac{z^2}{4}\right)=2\Gamma\left(\frac{1}{2}+a\right)\left(\frac{z}{4}\right)^{\frac{1}{2}-a}sh\left(\frac{z}{2}\right)I_{a-\frac{1}{2}}\left(\frac{z}{2}\right),
$$

то мы получаем функциональные тождества для обобщенной гипергеометрической функции Гаусса ${}_2F_3$ с модифицированной функцией Бесселя I_ν.

3. Заключение

В данной статье представлено систематическое разложение вырожденной гипергеометрической функции E_7 на восемь различных компонентов. С помощью этого аналитического разложения мы устанавливаем новые и общие соотношения, связывающие E_7 с тройной гипергеометрической функцией Сриваставы $F^{(3)}$. Предложенная структура позволяет нам задавать явные формулы редукции и тождества преобразования, включающие несколько классических и обобщенных гипергеометрических функций, в том числе F_1, Ξ_1, ${}_4F_3$, ${}_2F_3$, ${}_1F_2$, ${}_1F_1$ и $F^{2:2;2}_{2:1;1}$. Кроме того, в качестве частных случаев наших общих результатов мы получаем несколько новых и потенциально полезных функциональных соотношений, которые включают элементарные и специальные функции, такие как экспоненциальная функция, гиперболические функции и модифицированные функции Бесселя. Таким образом, работа предлагает единый подход к выводу тождеств между различными гипергеометрическими формами и расширяет известные связи в теории специальных функций.

Благодарность

Авторы выражают глубокую благодарность рецензенту за ряд ценных замечаний, которые способствовали существенному улучшению статьи. Также авторы благодарят редактора за внимательное отношение и помощь в подготовке финальной версии работы.

Финансирование

Финансирование для этой работы отсутствует.

Список литературы

[1] M. Abramowitz and I. A. Stegun.Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, Applied Mathematics Series. 1964. Washington: National Bureau of Standards. 1965.New York: Reprinted by Dover Publications.
[2] A. Altin. Some expansion formulas for a class of singular partial differential equations. Proc. Amer. Math. Soc. 1982. Vol.85, Issue 1, pp. 42-46.
[3] P. Appell and J. Kamp´e de F´eriet. Fonctions Hypergeometriques et Hyperspheriques; Polynomes d'Hermite. 1926. Paris: Gauthier - Villars.
[4] J. Barros-Neto and I. M. Gelfand. Fundamental solutions for the Tricomi operator. Duke Math. J.1999. Vol.98, Issue 3, pp. 465-483.
[5] J. Barros-Neto and I. M. Gelfand. Fundamental solutions for the Tricomi operator II. Duke Math. J.2002. Vol. 111, Issue 3, pp. 561-584.
[6] J. Barros-Neto and I. M. Gelfand. Fundamental solutions for the Tricomi operator III. Duke Math. J.2005. Vol. 128, Issue 1, pp. 119-140.
[7] L. Bers. Mathematical Aspects of Subsonic and Transonic Gas Dynamics.1958.New York: Wiley.
[8] B. C. Carlson. Some extensions of Lardner's relations between ${}_0F_3$ and Bessel functions. SIAM J. Math. Anal. 1970. Vol. 1, Issue 2, pp. 232-242.
[9] A. Erd´elyi, W. Magnus, F. Oberhettinger and F. G. Tricomi. Higher Transcendental Functions, Vol. 1. 1953.New York, Toronto and London: McGraw-Hill Book Company.
[10] A. Erd´elyi, W. Magnus, F. Oberhettinger and F. G. Tricomi. Higher Transcendental Functions, Vol. 2. 1953. New York, Toronto and London: McGraw-Hill Book Company.
[11] F. I. Frankl. Selected Works in Gas Dynamics.1973. Moscow: Nauka.
[12] A. J. Fryant. Growth and complete sequences of generalized bi-axially symmetric potentials. J. Diff. Equa.1979. Vol. 31, Issue 2, pp. 155-164.
[13] A. Hasanov. Fundamental solutions of generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation. Complex Variables and Elliptic Equations.2007. Vol. 52, Issue 8, pp. 673-683.
[14] A. Hasanov. Some solutions of generalized Rassias's equation. Intern. J. Appl. Math. Stat.2007. Vol. 8, Issue M07, pp. 20-30.
[15] A. Hasanov. Fundamental solutions for degenerated elliptic equation with two perpendicular lines of degeneration. Intern. J. Appl. Math. Stat.2008. Vol. 13, Issue 8, pp. 41-49.
[16] A. Hasanov and E. T. Karimov. Fundamental solutions for a class of three-dimensional elliptic equations with singular coefficients. Appl. Math. Lett. 2009. Vol. 22, Issue , pp. 1828-1832.
[17] A. Hasanov, J. M. Rassias and M. Turaev. Fundamental solution for the generalized Elliptic Gellerstedt Equation, Book: Functional Equations, Difference Inequalities and ULAM Stability Notions, Nova Science Publishers Inc. NY, USA. 2010. Vol.6, pp. 73-83.
[18] A. Hasanov and H. M. Srivastava. Some decomposition formulas associated with the Lauricella Function and other multiple hypergeometric functions. Appl. Math. Lett.2006. Vol. 19, pp. 113-121.
[19] A. Hasanov and H. M. Srivastava. Decomposition formulas associated with the Lauricella multivariable hypergeometric functions. Comput. Math. Appl.2007. Vol. 53, Issue 7, pp. 1119-1128.
[20] A. Hasanov, H. M. Srivastava, and M. Turaev. Decomposition formulas for some triple hypergeometric functions. J. Math. Anal. Appl.2006. Vol. 324, pp. 955-969.
[21] T. J. Lardner. Relations between ${}_0F_3$ and Bessel functions. SIAM Review. 1969. Vol. 11, pp. 69-72.
[22] T. J. Lardner and C. R. Steele. Symmetric deformations of circular cylindrical elastic shells of exponentially varying thickness. Trans. ASME Ser. E. J. Appl. Mech., 1968. Vol. 35, pp. 169-170.
[23] G. Lohofer. Theory of an electromagnetically deviated metal sphere. 1: Absorbed power. SIAM J. Appl. Math., 1989. Vol.49, pp. 567-581.
[24] P. A. McCoy. Polynomial approximation and growth of generalized axisymmetric potentials. Canad. J. Math.,1979. Vol. 31, Issue 1, pp. 49-59.
[25] A. W. Niukkanen. Generalized hypergeometric series arising in physical and quantum chemical applications. J. Phys. A: Math. Gen.,1983. Vol. 16, pp. 1813-1825.
[26] M. S. Salakhitdinov and A. Hasanov. A solution of the Neumann-Dirichlet boundary value problem for generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation. Complex Variables and Elliptic Equations.2008. Vol. 53, Issue 4, pp. 355-364.
[27] H. M. Srivastava and P. W. Karlsson. Multiple Gaussian Hypergeometric Series. 1985.New York, Chichester, Brisbane, and Toronto: Halsted Press (Ellis Horwood Limited, Chichester), Wiley.
[28] G. N. Watson. A Treatise on the Theory of Bessel Functions, 2nd Edi. 1944. Cambridge, London and New York: Cambridge University Press.
[29] A. Weinstein. Discontinuous integrals and generalized potential theory. Trans. Amer. Math. Soc.,1946. Vol. 63, pp. 342-354.
[30] A. Weinstein. Generalized axially symmetric potential theory. Bull. Amer. Math. Soc., 1953. Vol. 59, pp. 20-38.
[31] R. J. Weinacht. Fundamental solutions for a class of singular equations. Contrib. Diff. Equa.,1964. Vol. 3, Issue 43, pp.
[32] M.Ruzhansky, A.Hasanov, T.G.Ergashev. PDE-Systems associated with the hypergeometric functions in three variables and their particular solutions near the origin. https://arxiv.org/abs/2410.00748

[33] Prudnikov, A. P., Brychkov, Yu. A. and Marichev, O.I. Integrals and Series Vol. 3: More Special Functions. 1986. Moscow: Nauka. Translated from the Russian by G.G. Gould. 1990. New York, Philadelphia, London, Paris, Montreux, Tokyo, Melbourne: Gordon and Breach Science Publishers.

Some functional identities derived from a single confluent hypergeometric function E_7

Yuldashova Hilola, Hasanov Anvar

Abstract

In this paper, by decomposing the confluent hypergeometric function E_7 into eight parts, we demonstrate how some useful and generalized relations between the hypergeometric functions of Srivastava $F^{(3)}$ and E_7 can be obtained. It is shown that other main results are specified in order to derive certain relations between the functions F_1, Ξ_1, ${}_4F_3$, ${}_2F_3$, ${}_1F_2$, ${}_1F_1$ and $F^{2:2;2}_{2:1;1}$. Some other interesting functional relations involving the exponential function, hyperbolic functions, and modified Bessel functions are also considered.

Keywords

Confluent hypergeometric function;generalized hypergeometric series; functional identities; modified Bessel functions; exponential function.

Affiliations

Yuldashova Hilola
Address: Romanovskiy Institute of Mathematics
Uzbekistan Academy of Sciences
Tashkent, Uzbekistan
e-mail: hilolayuldashova77@gmail.com
ORCID ID: https://orcid.org/0009-0008-5623-0637

Hasanov Anvar
Address: Romanovskiy Institute of Mathematics
Uzbekistan Academy of Sciences
Tashkent, Uzbekistan;
Ghent University
Ghent, Belgium
e-mail: anvarhasanov@yahoo.com
ORCID ID: https://orcid.org/0000-0002-9849-4103