Uzbekistan Journal of Mathematics and Computer Science
Volume-1, Issue-2, Page 54–61 (2025)
DOI: https://doi.org/10.56143/ujmcs.v1i2.7
Research article

Двухточечная краевая задача для системы функционально-дифференциальных уравнений с максимумами

Т. К. Юлдашев* , М. А. Тлеубергенова, А. К. Танкеева, А. Молыбайкызы

Аннотация

В данной статье рассматриваются вопросы краевой задачи с двухточечными граничными условиями для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с максимумами. Используется метод параметризации. Получены условия сходимости и построены алгоритмы решения. Установлены необходимые и достаточные условия на коэффициенты для корректности рассматриваемой задачи. В доказательстве однозначной разрешимости функционально-интегральных уравнений в пространстве $BD\big([0,\omega],\mathbb{R}^n\big)$ используется метод сжимающих отображений.

Ключевые слова: *Краевая задача, система обыкновенных дифференциальных уравнений, метод параметризации, необходимые и достаточные условия, существование и единственность решения.*

Предметная классификацие AMS (2020): *Основная: 34A30; 34A45; Дополнительная: 34B05; 34B10.*

1. Введение. Постановка проблемы

Рассмотрим линейную двухточечную краевую задачу

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + B(t)\max\big\{x(\tau) : \tau \in [t-h, t]\big\} + f(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in (0, T), \tag{1.1}$$

$$x(\xi) = \phi(\xi), \quad \xi \in [-h, 0], \tag{1.2}$$

$$B_0 x(0) + C_0 x(T) = D_0, \tag{1.3}$$

где $0 < h = \text{const}$ – запаздывание, $A(t), B(t)$ и $f(t)$ непрерывны на $[0,T]$, B_0 и C_0 – заданные $(n \times n)$ матрицы, D_0 – заданный n-мерный вектор, $\phi(t) \in C[-h, 0]$.

Обозначим через $C\big([0,T],\mathbb{R}^n\big)$ банахово пространство, состоящее из непрерывных вектор-функций $x(t)$ с нормой

$$\|\, x(t) \,\|_{C[0,T]} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \max_{t\in[0,T]} |\, x_j(t) \,|}.$$

Received : *8–октябрь–2025,* ***Accepted :*** *10–ноябрь–2025*
**** Corresponding author***

Данное исследование выполнено при поддержке Министерства высшего и среднего специального образования, науки и инновационного развития Республики Узбекистан (грант F-FA-2021-424).

Мы используем линейное пространство $BD\left([0,T],\mathbb{R}^n\right)$, которое является банаховым пространством со следующей нормой

$$\| x(t) \|_{BD[0,T]} = \| x(t) \|_{C[0,T]} + h \, \| x'(t) \|_{C[0,T]} \, ,$$

где $0 < h = \mathrm{const}$.

Пусть $X(t)$ – фундаментальная матрица дифференциального уравнения $\frac{dX}{dt} = A(t)X$. Тогда из уравнения (1.1) получаем

$$x(t) = \int\limits_0^t X(t)X^{-1}(s)\Big(A(s)x(s) + B(s)\max\left\{x(\tau) : \tau\in[s-h,s]\right\} + f(s)\Big)ds. \tag{1.4}$$

Однозначную разрешимость уравнения (1.4) мы доказываем в пространстве $BD\left([0,T],\mathbb{R}^n\right)$.

Отметим, что решение задачи (1.1)–(1.3) – это функция $x^*(t)\in C\big([0,T],\mathbb{R}^n\big)$, непрерывно дифференцируемая на $(0,T)$ и удовлетворяющая дифференциальному уравнению (1.1) и граничному условию (1.3).

Краевые задачи для дифференциальных уравнений имеют широкий спектр применений [1]–[19]. В работах [2]–[8], [10, 12] используются различные методы качественной теории дифференциальных уравнений. На основе этих методов были установлены условия разрешимости краевых задач и предложены практические способы их решения. В работах [9, 11] особое значение приобретают приближенные и численные методы построения решений краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Данная статья посвящена установлению критериев единственной разрешимости двухточечных краевых задач для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с максимумами и построению методом параметризации приближенного решения задачи (1.1)–(1.3). Следует отметить, что метод параметризации был разработан во многих работах Д. С. Джумабаева и его учеников (см., например, [20]–[32]).

2. О разрешимости уравнения (1.4)

Воспользуемся следующей леммой.

Лемма 2.1 ([33]). *Для разности двух функций с максимумами справедлива следующая оценка*

$$\left\|\max\left\{x(\tau):\tau\in[t-h,t]\right\} - \max\left\{y(\tau):\tau\in[t-h,t]\right\}\right\|_C \le$$

$$\le \| x(t) - y(t) \|_C + h\left\| \frac{\partial}{\partial t}\left[x(t)-y(t)\right]\right\|_C,$$

где $0 < h = \mathrm{const}$.

Для уравнения (1.4) рассмотрим следующий итерационный процесс:

$$x^0(t) = g(t) \equiv \int\limits_0^t X(t)X^{-1}(s)f(s)ds, \quad t\in[0,T],$$

$$x^{k+1}(t) = g(t) + \int\limits_0^t X(t)X^{-1}(s)\Big(A(s)x^k(s) + B(s)\max\left\{x^k(\tau):\tau\in[s-h,s]\right\}\Big)ds, \tag{2.1}$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots$

Теорема 2.1. *Пусть выполнены следующие условия*

$$\int\limits_0^t \|X(t)X^{-1}(s)\|_{C\left([0,T]\times[0,T]\right)} \max\Big\{\|A(s)\|_{C[0,T]}; \|B(s)\|_{C[0,T]}\Big\}ds \le C_1,$$

то функционально-интегральное уравнение (1.4) *имеет единственное решение в классе* $BD\big([0,T],\mathbb{R}^n\big)$, *где* $0 < C_1 = \mathrm{const} < \infty$, $\|g(t)\| \le g_0 < \infty$, $g_0 = \mathrm{const}$ *и* $\rho = \max\big\{C_2; C_3\big\} < 1$, $0 < C_2$ *и* $0 < C_3$ *определяются формулами* (2.5) *ниже.*

Доказательство. Мы используем итерационный процесс (2.1). Тогда получаем следующие оценки:

$$\big\|x^0(t)\big\|_{C[0,T]} \le \|g(t)\|_{C[0,T]} = \int\limits_0^t \|X(t)X^{-1}(s)\|_{C\big([0,T]\times[0,T]\big)} \|f(t)\|_{C[0,T]} ds \le g_0, \tag{2.2}$$

$$\big\|x^{k+1}(t) - x^k(t)\big\|_{C[0,T]} \le \int\limits_0^t \|X(t)X^{-1}(s)\|_{C\big([0,T]\times[0,T]\big)} \Big[\|A(s)\|_{C[0,T]} \times$$

$$\times \big\|x^k(s) - x^{k-1}(s)\big\|_{C[0,T]} + \|B(s)\|_{C[0,T]} \big\| \max\big\{x^k(\tau) : \tau \in [s-h, s]\big\} -$$

$$- \max\big\{x^{k-1}(\tau) : \tau \in [s-h, s]\big\}\big\|_{C[0,T]}\Big] ds \le C_1 \Big[\big\|x^k(t) - x^{k-1}(t)\big\|_{C[0,T]} +$$

$$+ \big\| \max\big\{x^k(\tau) : \tau \in [t-h, t]\big\} - \max\big\{x^{k-1}(\tau) : \tau \in [t-h, t]\big\}\big\|_{C[0,T]}\Big].$$

Применяя лемму 2.1 к последнему неравенству, получаем

$$\big\|x^{k+1}(t) - x^k(t)\big\|_{C[0,T]} \le C_1 \Big[2\big\|x^k(t) - x^{k-1}(t)\big\|_{C[0,T]} + h \left\| \frac{d}{dt}\big(x^k(t) - x^{k-1}(t)\big)\right\|_{C[0,T]}\Big]. \tag{2.3}$$

Аналогично, из уравнения (1.1) выводим

$$\left\|\frac{d}{dt}\big(x^{k+1}(t) - x^k(t)\big)\right\|_{C[0,T]} \le \big\|A(t)\big\|_{C[0,T]} \big\|x^k(t) - x^{k-1}(t)\big\|_{C[0,T]} +$$

$$+ \big\|B(t)\big\|_{C[0,T]} \big\| \max\big\{x^k(\tau) : \tau \in [t-h, t]\big\} - \max\big\{x^{k-1}(\tau) : \tau \in [t-h, t]\big\}\big\|_{C[0,T]} \le$$

$$\le \Big(\big\|A(t)\big\| + \big\|B(t)\big\|\Big) \big\|x^k(t) - x^{k-1}(t)\big\|_{C[0,T]} + h\,\big\|B(t)\big\| \left\|\frac{d}{dt}\big(x^k(t) - x^{k-1}(t)\big)\right\|_{C[0,T]}. \tag{2.4}$$

Обозначим

$$C_2 \ge \max\Big\{2C_1; \big\|A(t)\big\|_{C[0,T]} + \big\|B(t)\big\|_{C[0,T]}\Big\}, \;\; C_3 \ge \max\Big\{h\,C_1; h\,\big\|B(t)\big\|_{C[0,T]}\Big\}. \tag{2.5}$$

Тогда из оценок (2.3) и (2.4) получаем

$$\big\|x^{k+1}(t) - x^k(t)\big\|_{BD[0,T]} \le \rho \big\|x^k(t) - x^{k-1}(t)\big\|_{BD[0,T]}, \tag{2.6}$$

где $\rho = \max\big\{C_2; C_3\big\}$. Из оценок (2.2) и (2.6) следует, что оператор в правой части уравнения (1.4) является сжимающим отображением, и уравнение (1.4) имеет единственное решение в пространстве $BD[0,T]$. Теорема доказана. □

3. Практические способы нахождения единственного решения

Выберем некоторый шаг $h_0 > 0$, такой что $Nh_0 = T$ ($N \in \mathbb{N}$), и разобем интервал $[0,T)$ на подынтервалы:

$$[0,T) = \bigcup_{r=1}^{N} \big[(r-1)h_0, rh_0\big).$$

Обозначено через $C\big([0,T],h_0,\mathbb{R}^{nN}\big)$ банахово пространство непрерывных вектор-функций $x(t)\in\mathbb{R}^{nN}$ с нормой

$$\| x(t)\|_1=\max_{r=1:N}\sup_{t\in\big[(r-1)h_0,rh_0\big)}\| x_r(t)\|,$$

где $\lim\limits_{t\to rh_0-0}x_r(t)$ для всех $r=\overline{1,N}$ – конечно. Обозначим через $x_r(t)=\Big\{x_r(t)=x(t),\ t\in\big[(r-1)h_0,rh_0\big),\ r=\overline{1,N}\Big\}$ ограничение вектор-функции $x(t)$ на r-й интервал $\big[(r-1)h_0,rh_0\big)$ и сведем задачу (1.1)–(1.3) к эквивалентной многоточечной краевой задаче:

$$\frac{d}{dt}x_r(t)=A(t)x_r+B(t)\max\big\{x_r(\tau):\tau\in[t-h,t]\big\}+f(t),\ t\in\big((r-1)h_0,rh_0\big), \tag{3.1}$$

$$x(\xi)=\phi(\xi),\quad \xi\in[-h,0], \tag{3.2}$$

$$B_0x_1(0)+C_0\lim_{t\to Nh_0-0}x_N(t)=D_0, \tag{3.3}$$

$$\lim_{t\to lh_0-0}x_l(t)=x_{l+1}(lh_0),\quad l=\overline{1,(N-1)}, \tag{3.4}$$

где (3.4) – условия, связывающие решение задачи (1.1)–(1.3) во внутренних точках разбиения интервала $[0,T]$. Пусть λ_r – значение функции $x_r(t)$ в точке $t=(r-1)h_0$. Производя замену $u_r(t)=x_r(t)-\lambda_r$, $r=\overline{1,N}$ на интервале $\big[(r-1)h_0,rh_0\big)$, из (3.1)–(3.4) получаем многоточечную краевую задачу с параметрами:

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}u_r(t)=\big(A(t)+B(t)\big)\lambda_r+\\ +A(t)u_r(t)+B(t)\max\big\{u_r(\tau):\tau\in[t-h,t]\big\}+f(t),\quad t\in\big((r-1)h_0,rh_0\big),\end{gathered} \tag{3.5}$$

$$u_0(\xi)=\phi_0(\xi),\quad \xi\in[-h,0],\quad t\in[0,h_0-h], \tag{3.6}$$

$$u_r\big((r-1)h_0\big)=0,\quad r=\overline{2,N}, \tag{3.7}$$

$$B_0\lambda_1+C_0\lambda_N+C_0\lim_{t\to Nh_0-0}u_N(t)=D_0, \tag{3.8}$$

$$\lambda_l+\lim_{t\to lh_0-0}u_l(t)=\lambda_{l+1},\quad l=\overline{1,N-1}. \tag{3.9}$$

Пара $\big(\lambda^*,u^*(t)\big)$ с элементами $\lambda^*\in\mathbb{R}^{nN}$, $u^*(t)\in C\big([0,T],h_0,\mathbb{R}^{nN}\big)$ является решением задачи (3.5)–(3.9). Здесь функция $u_r^*(t)$ является решением задачи (3.5), (3.7) при $\lambda_r=\lambda_r^*$, $r=\overline{1,N}$. Для λ_r^* и $\lim\limits_{t\to rh_0-0}u_r^*(t)$, $r=\overline{1,N}$ выполняются равенства (3.8), (3.9).

Если $x^*(t)$ является решением задачи (1.1)–(1.3), то пара $(\lambda^*,u^*(t))$ является решением задачи (3.5)–(3.9). Наоборот, если пара $\big(\widetilde{\lambda},\widetilde{u}(t)\big)$ является решением задачи (3.5)–(3.9), то функция

$$\widetilde{x}(t)=\widetilde{\lambda}_r+\widetilde{u}_r(t),\quad t\in\big[(r-1)h_0,rh_0\big),\quad r=\overline{1,N}$$

является решением задачи (1.1)–(1.3) и $\widetilde{x}(T)=\widetilde{\lambda}_N+\lim\limits_{t\to Nh_0-0}\widetilde{u_N}(t)$.

Для дальнейшего изложения используем следующие обозначения: пусть $P(t)$ – произвольная квадратная матрица, непрерывная на интервале $\big[(r-1)h_0,rh_0\big)$ и имеющая конечный предел $\lim\limits_{t\to rh_0-0}P(t)$, $r=\overline{1,N}$. Возьмем число $\nu\in\mathbb{N}$ и обозначим через $E_{\nu,r}\big(A(\cdot),P(\cdot),t\big)$ сумму

$$\begin{gathered}\int\limits_{(r-1)h_0}^{t}P(s_1)ds_1+\int\limits_{(r-1)h_0}^{t}A(s_1)\int\limits_{(r-1)h_0}^{s_2}P(s_2)ds_2ds_1+\ldots+\\ +\int\limits_{(r-1)h_0}^{t}A(s_1)\ldots\int\limits_{(r-1)h_0}^{s_{\nu-2}}A(s_{\nu-1})\int\limits_{(r-1)h}^{s_{\nu-1}}P(s_\nu)ds_\nu ds_{\nu-1}\ldots ds_1,\ t\in\big[(r-1)h_0,rh_0\big),\ r=\overline{1,N}.\end{gathered}$$

Сумма $E_{\nu,r}(A(\cdot),P(\cdot),t)$ непрерывна на $\big[(r-1)h_0, rh_0\big)$ и имеет конечный предел

$$\lim_{t\to rh_0-0} E_{\nu,r}(A(\cdot),P(\cdot),t) = E_{\nu,r}(A(\cdot),P(\cdot),rh_0) \text{ для всех } \nu\in\mathbb{N},\ \ r=\overline{1,N}.$$

Очевидно, что $E_{*,r}(A(\cdot),P(\cdot),t) = \lim\limits_{\nu\to\infty} E_{\nu,r}(A(\cdot),P(\cdot),t)$ является суммой равномерно сходящегося ряда на $[(r-1)h_0, rh_0)$, и эта сумма непрерывна на интервале $\big[(r-1)h_0, rh_0\big)$ и имеет конечный предел

$$\lim_{t\to rh_0-0} E_{*,r}(A(\cdot),P(\cdot),t) = E_{*,r}(A(\cdot),P(\cdot),rh_0), \quad r=\overline{1,N}.$$

Для фиксированного значения параметра $\lambda_r,\ r=\overline{1,N}$, из уравнения (3.1) получаем интегральное уравнение Вольтерры второго рода:

$$u_r(t) = \int\limits_{(r-1)h_0}^{t} \big[A(s)+B(s)\big]\lambda_r ds + \int\limits_{(r-1)h_0}^{t} f(s)ds + \int\limits_{(r-1)h_0}^{t} A(s)u_r(s)ds+$$

$$+\int\limits_{(r-1)h_0}^{t} B(s)\max\big\{u_r(\tau):\tau\in[s-h,s]\big\}ds, \quad t\in\big[(r-1)h_0, rh_0\big), \quad r=\overline{1,N}. \tag{3.10}$$

Подставляя правую часть (3.10) в $u_r(s)$ в (3.10) и повторяя этот процесс ν $(\nu\in\mathbb{N})$ раз, получаем следующее представление функции $u_r(t)$:

$$u_r(t) = F_{\nu,r}(t)\lambda_r + G_{\nu,r}(u_r,t) + H_{\nu,r}(u_r,t) + K_{\nu,r}(t), \quad t\in\big[(r-1)h_0, rh_0\big), \quad r=\overline{1,N}, \tag{3.11}$$

где

$$F_{\nu,r}(t) = E_{\nu,r}(A(\cdot),A(\cdot)+B(\cdot),t),\ \ K_{\nu,r}(t) = E_{\nu,r}(A(\cdot),f(\cdot),t),\ \ H_{\nu,r}(t) = E_{\nu,r}\big(A(\cdot),B(\cdot)\max\{u_r(\tau)\},t\big),$$

и

$$G_{\nu,r}(u_r,t) = \int\limits_{(r-1)h_0}^{t} A(s_1)\ldots\int\limits_{(r-1)h_0}^{s_{\nu-1}} A(s_\nu)u_r(s_\nu)ds_\nu\ldots ds_1, \quad t\in\big[(r-1)h_0, rh_0\big), \quad r=\overline{1,N}.$$

Определим $\lim\limits_{t\to rh_0-0} u_r(t),\ r=\overline{1,N}$ из формулы (3.11). Подставляя соответствующие выражения в (3.8), (3.9) и умножая (3.8) слева на $h_0>0:\ Nh_0=T$, получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно параметров:

$$Q_\nu(h_0)\lambda = -K_\nu(h_0) - G_\nu(u,h_0) - H_\nu(u,h_0), \quad \lambda\in\mathbb{R}^{nN},$$

где $Q_\nu(h_0)=$

$$\begin{pmatrix}
h_0B_0 & O & O & \ldots & O & h_0C_0(I+F_{\nu,N}(Nh_0)) \\
I+K_{\nu,1}(h_0) & -I & O & \ldots & O & O \\
O & I+K_{\nu,2}(2h_0) & -I & \ldots & O & O \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
O & O & O & \ldots & -I & O \\
O & O & O & \ldots & I+K_{\nu,N-1}\big((N-1)h_0\big) & -I
\end{pmatrix},$$

$I:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ – единичная матрица, $O:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ – нулевая матрица,
$K_\nu(h_0) = \big(-h_0D_0 + h_0C_0F_{\nu,N}(Nh_0),\ K_{\nu,1}(h_0),\ldots,K_{\nu,N-1}((N-1)h_0)\big)\in\mathbb{R}^{nN}$,

$G_\nu(u,h_0) = \big(h_0C_0G_{\nu,N}\big(u_N,Nh_0\big), G_{\nu,1}\big(u_1,h_0\big),\cdots,G_{\nu,N-1}\big(u_{N-1},(N-1)h_0\big)\big)$. Аналогично определяется $H_\nu(u,h_0)$.

Мы находим решение $(\lambda,u(t))$ многоточечной краевой задачи с параметрами (3.1)–(3.5). Предположим, что для заданных ν, h_0 матрица $Q_\nu(h_0):\mathbb{R}^{nN}\to\mathbb{R}^{nN}$ имеет обратную.

a) Найдем начальное приближение для параметра $\lambda^{(0)} = \left(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \ldots, \lambda_N^{(0)}\right) \in \mathbb{R}^{nN}$, решая систему уравнений $Q_\nu(h_0)\lambda = -F_\nu(h)$.
b) Определим компоненты системы функций $u^{(0)}(t) = \left(u_1^{(0)}(t), u_2^{(0)}(t), \ldots, u_N^{(0)}(t)\right)$ по формулам

$$u_r^{(0)}(t) = F_{\nu,r}(t)\lambda_r^{(0)} + K_{\nu,r}(t), \quad t \in \left[(r-1)h_0, rh_0\right), \quad r = \overline{1, N}.$$

c) Найдем следующее приближение параметра $\lambda^{(1)} = \left(\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \ldots, \lambda_N^{(1)}\right) \in \mathbb{R}^{nN}$, решая систему уравнений $Q_\nu(h_0)\lambda = -K_\nu(h_0) - G_\nu(u^{(0)}, h_0) - H_\nu\left(u^{(0)}, h_0\right)$.
d) Определим компоненты системы функций $u^{(1)}(t) = \left(u_1^{(1)}(t), u_2^{(1)}(t), \ldots, u_N^{(1)}(t)\right)$ по формулам

$$u_r^{(1)}(t) = F_{\nu,r}(t)\lambda_r^{(1)} + K_{\nu,r}(t) + G_{\nu,r}\left(u_r^{(0)}, t\right) + H_{\nu,r}\left(u_r^{(0)}\right), \quad t \in \left[(r-1)h_0, rh_0\right), \quad r = \overline{1, N}$$

и так далее. Продолжая этот процесс, на k-м шаге алгоритма мы получаем пару $\left(\lambda^{(k)}, u^{(k)}(t)\right)$, $k = 0, 1, \ldots$. Ввиду эквивалентности задач (1.1)–(1.3) и (3.1)–(3.4) получаем, что справедлива следующая теорема:

Теорема 3.1. *Краевая задача* (1.1)–(1.3) *имеет единственное решение тогда и только тогда, когда для заданного* $h_0 > 0 : Nh_0 = T \ (N \in \mathbb{N}),\ \chi \in (0, 1]$ *существует* $\nu = \nu(h_0, \chi)$ $(\nu \in \mathbb{N})$ *такое, что матрица* $Q_\nu(h_0) : \mathbb{R}^{nN} \to \mathbb{R}^{nN}$ *обратима, и выполнены условия теоремы 2.1.*

Заключение

В работе исследованы существование и единственность решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.1) с неизвестной функцией под знаком максимума. Система (1.1) изучается при начальных (1.2) и краевых (1.3) условиях. Метод сжимающих отображений используется для доказательства единственной разрешимости задачи (1.1)–(1.3) в пространстве $BD\left([0, \omega], \mathbb{R}^n\right)$. Практический способ решения задачи (1.1)–(1.3) с помощью метода параметризации сводится к исследованию разрешимости системы уравнений (3.1)–(3.4). Построен алгоритм решения задачи (3.1)–(3.4).

Финансирование

Данное исследование поддержано Министерством высшего и среднего специального образования, науки и инновационного развития Республики Узбекистан (грант F-FA-2021-424).

Вклад автора

Все авторы внесли равный вклад в написание этой статьи. Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Список литературы

[1] Abramov, A. A.: *On the transfer of boundary conditions for systems of ordinary linear differential equations (a variant of the dispersive method)*. USSR Computat. Math. and Math. Phys. **1** (3), 617–622 (1962).
[2] Agarwal, Ravi P.: Boundary value problems for higher order differential equations. World Scientific, Singapore, Philadelphia. (1986), 307 p.
[3] Agarwal, Ravi P., Gupta, R. C.: Essentials of ordinary differential equations. McGraw-Hill Book Co., Singapore, New York. (1991), 467 p.
[4] Agarwal, Ravi P.: Focal boundary value problems for differential and difference equations. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. (1998), 289 p.
[5] Agarwal, Ravi P., Grace, S. R., O'Regan, D.: Oscillation theory for second order Linear differential equations. Kluwer Academic Publishers, The Netherlands. (2002), 672.
[6] Agarwal, Ravi P., Lakshmikantham, V.: Uniqueness and nonuniqueness criteria for ordinary differential equations. World Scientific, Singapore. (1993), 312.

[7] Agarwal, Ravi P., O'Regan, D.: An introduction to ordinary differential equations. Springer Science+Business Media LLC, New York. (2008), ix+314.

[8] Dzhumabayev, D. S.: *Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation*. USSR Computat. Math. and Math. Phys. **29** (1), 34–46 (1989).

[9] Keller, H.: Numerical methods for two-point boundary value problems. Walthan, Blaisdell. (1968), 184.

[10] Кигурадзе И. Т.: *Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений*. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. ВИНИТИ АН СССР, Москва. (1987), 3–103.

[11] Roberts, S. M., Shipman, J. S.: Two-point boundary-value problems: Shooting methods. Elsevier, New York. (1972), 269.

[12] Ronto, M., Samoilenko, A. M.: Numerical-analytic methods for investigation of periodic solutions. World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong. (2000), 453.

[13] Yuldashev, T. K.: *Periodic solutions for an impulsive system of nonlinear differential equations with maxima*. Nanosystems: Physics. Chemistry. Mathematics. **13** (2), 135–141 (2022). https://doi.org/10.17586/2220-8054-2022-13-2-135-141

[14] Yuldashev, T. K.: *Periodic solutions for an impulsive system of integro-differential equations with maxima*. Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. **26** (2), 368–379 (2022). https://doi.org/10.14498/vsgtu1917

[15] Yuldashev, T. K., Abduvahobov, T. A.: *On a $(\omega, c)-$ periodic solution for an impulsive system of second-order differential equation with product of two nonlinear functions and mixed maxima*. Uzbekistan Journal of Mathematics and Computer Science. **1** (1), 20–32 (2025). https://doi.org/10.56143/ujmcs.112032

[16] Yuldashev, T. K. Fayziyev, A. K.: *Integral condition with nonlinear kernel for an impulsive system of differential equations with maxima and redefinition vector*. Lobachevskii Journal of Mathematics. **43** (8), 2332–2340 (2022). https://doi.org/10.1134/S1995080222110312

[17] Yuldashev, T. K., Fayziyev, A. K.: *On a nonlinear impulsive system of integro-differential equations with degenerate kernel and maxima*. Nanosystems: Physics. Chemistry. Mathematics. **13** (1), 36–44 (2022). https://doi.org/10.17586/2220-8054-2022-13-1-36-44

[18] Yuldashev, T. K., Fayziyev, A. K.: *Inverse problem for a second order impulsive system of integro-differential equations with two redefinition vectors and mixed maxima*. Nanosystems: Physics. Chemistry. Mathematics. **14** (1), 13–21 (2023). https://doi.org/10.17586/2220-8054-2023-14-1-13-21

[19] Yuldashev, T. K., Apakov, Y. P., Zhuraev, A. K.: *Boundary value problem for third order partial integro-differential equation with a degenerate kernel*. Lobachevskii Journal of Mathematics. **42** (6), 1317–1327. (2021)

[20] Asanova, A. T.: *On a nonlocal boundary-value problem for systems of impulsive hyperbolic equations*. Ukrainian Mathematical Journal. **65** (3), 349–365 (2013). https://doi.org/10.1007/s11253-013-0782-x.

[21] Assanova, A. T.: *Solvability of a nonlocal problem for a hyperbolic equation with integral conditions*. Electronic Journal of Differential Equations. **2017** (170), 1–12 (2017).

[22] Assanova, A. T.: *An integral-boundary value problem for a partial differential equation of second order*. Turkish Journal of Mathematics. **43** (4), 1967–1978 (2019). https://doi.org/10.3906/mat-1903-111.

[23] Assanova, A. T., Bakirova, E. A., Kadirbayeva, Z. M., Uteshova, R. E.: *A computational method for solving a problem with parameter for linear systems of integro-differential equations*. Computational and Applied Mathematics. **39** (3), Art.no. 248 (2020). https://doi.org/10.1007/s40314-020-01298-1.

[24] Assanova, A. T.: *On the solvability of nonlocal problem for the system of Sobolev-type differential equations with integral condition*. Georgian Mathematical Journal. **28** (1), 49–57 (2021). https://doi.org/10.1515/gmj-2019-2011.

[25] Assanova, A. T.: *A generalized integral problem for a system of hyperbolic equations and its applications*. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics. **52** (6), 1513–1532 (2023). https://doi.org/10.15672/hujms.1094454.

[26] Assanova, A. T., Mynbayeva, S. T.: *New general solution to a quasilinear Fredholm integro-differential equation and its application*. Lobachevskii Journal of Mathematics **44** (10), 4231–4239 (2023). https://doi.org/10.1134/S1995080223100062.

[27] Dzhumabaev, D. S.: *On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integrodifferential equations*. J. of Comp. and Applied Math. **294**, 342–357 (2016).

[28] Dzhumabaev, D. S.: *Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation*. USSR Comput. Math. Math. Phys. **29** (1), 34–46 (1989).

[29] Dzhumabaev, D. S., Dzhumabaev, A. D., Assanova, A. T.: *Properties of a partial Fredholm integro-differential equations with nonlocal condition and algorithms*. Mediterranean Journal of Mathematics **21** (6), Art. No. 169 (2024). https://doi.org/10.1007/s00009-024-02712-2.

[30] Tleulessova, A. B.: *On the correct solvability of a two-point boundary value problem with impulsive action*. Almaty Mat. Zhurn. **4** (3), 87–95 (2005).

[31] Tleulessova, A. B.: *On the unique solvability of a two-point boundary value problem with impulsive action*. Almaty, Mat. Zhurn. **4** (4), 93–102 (2004).

[32] Temesheva, S. M., Dzhumabaev, D. S., Kabdrakhova, S. S.: *On one algorithm to find a solution to a linear two-point boundary value problem*. Lobachevskii Journal of Mathematics. **42** (3), 606–612 (2021). https://doi.org/10.1134/S1995080221030173

[33] Yuldashev, T. K., Fayziyev, A. K.: *Periodic solutions of impulsive system of equations with a nonlinear function under the sign of a second-order differential and maxima*. Lobachevskii Journal of Mathematics. **46** (2), 658–671 (2025). https://doi.org/10.1134/S1995080225600256

Two-point boundary value problem for a system of functional-differential equations with maxima

T. K. Yuldashev* , M. A. Tleubergenova, A. K. Tankeyeva, A. Molybaikyzy

Abstract

This article considers the questions of two-point boundary value problem for a system of first-order ordinary differential equations with maxima. The parametrization method is using. The convergence conditions are obtained and the algorithms of solving are built. The necessary and sufficient coefficient conditions for the well-posedness of considered problem are established. The method of contracted mapping is used in the proof of unique solvability of functional-integral equations in the space $BD\big([0,\omega],\mathbb{R}^n\big)$.

Affiliations

Yuldashev Tursun Kamaldinovich
Address: Tashkent State Transport University, Dept. of Higher Mathematics, 100169, Tashkent, Uzbekistan.
e-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com
ORCID ID: https://orcid.org/0000-0002-9346-5362

Tleubergenova Madina Almukhanovna
Address: K. Zhubanov Aktobe Regional University, Debt. of Mathematics, Aktobe, Kazakhstan
e-mail: madina_1970@mail.ru
ORCID ID: https://orcid.org/0000-0002-5572-2305

Tankeyeva Aigerim Kiyevna
Address: K. Zhubanov Aktobe Regional University, Debt. of Mathematics, Aktobe, Kazakhstan
e-mail: aigerimtankeyeva@gmail.com
ORCID ID: https://orcid.org/0000-0002-3897-5909

Molybaikyzy Altynay
Address: Kazakh National Women's Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan
e-mail: altynaimolybai@gmail.com
ORCID ID: https://orcid.org/0009-0008-2452-5932