Uzbekistan Journal of Mathematics and Computer Science
Volume-1, Issue-2, Page 105–115 (2025)
DOI: https://doi.org/10.56143/ujmcs.v1i2.12/
**Исследовательская статья**

# Пространства идемпотентных вероятностных мер над П-полными пространствами и отображениями

**Ш. Х. Эштемирова**

### Аннотация

**В настоящей работе исследуется поведение $\Pi$-полноты для тихоновских отображений относительно функтора идемпотентных вероятностных мер с конечным носителем. Доказано, что тихоновское отображение является $\Pi$-полным тогда и только тогда, когда индуцированное отображение между соответствующими пространствами идемпотентных вероятностных мер является $\Pi$-полным. Как следствие, функтор идемпотентных вероятностных мер с конечным носителем как сохраняет, так и отражает $\Pi$-полноту отображений. Это даёт удобный критерий проверки $\Pi$-полноты с помощью индуцированных отображений и способствует переносу свойств полноты на пространства, построенные функториальными методами. Полученный результат обеспечивает поднятие функтора на категорию, объектами которой являются $\Pi$-полные пространства, а морфизмами — $\Pi$-полные отображения.**

***Ключевые слова:*** *идемпотентные вероятностные меры, конечный носитель, пространства идемпотентных вероятностных мер, индуцированные отображения, звёздно-конечное открытое покрытие, конечно-компонентное покрытие, совершенная компактификация, компактификация Стоуна–Чеха.*

***Предметная классификацие AMS (2020):*** *54B20, 54C10.*

## Введение

Свойства типа полноты и их поведение при компактификациях играют важную роль в общей топологии и теории непрерывных отображений (см., например, [2, 5]). Одним из таких свойств является П-полнота, введённая в работах Мусаева и Пасынкова [5], представляющая эффективный аппарат для исследования пространств и непрерывных отображений за пределами компактной категории.

Одной из важных задач теории функторов в топологии является выяснение того, какие топологические свойства сохраняются и отражаются функториальными конструкциями. В настоящей работе мы рассматриваем функтор $I_f$ идемпотентных вероятностных мер с конечным носителем и изучаем П-полноту в классе тихоновских отображений. Основной результат статьи устанавливает точный критерий: для тихоновского отображения $g\colon X \to Y$ индуцированное отображение

$$I_f(g)\colon I_f(X) \to I_f(Y)$$

является П-полным тогда и только тогда, когда П-полным является само отображение $g$. Тем самым получаем, что функтор $I_f$ не только сохраняет, но и отражает П-полноту отображений, что существенно для построения и сравнения категорий, задаваемых условиями полноты.

***Received :*** *28–july–2025,* ***Accepted :*** *20–november–2025*
**** Corresponding author***

Переход за пределы компактной категории обычно осуществляется посредством конструкций расширения нормальных функторов на категорию тихоновских пространств. Для идемпотентных вероятностных мер такой переход был реализован, в частности, с использованием подхода Чигогидзе [7] (см. также [9]), где вводится подфунктор $I_\beta$, сохраняющий ключевые компактификационные свойства. В настоящей работе мы используем тесно связанный с $I_\beta$ подфунктор $I_f$, что позволяет применять компактификационные аргументы и критерии типа «выкалывания точек» в некомпактной ситуации.

Функториальные конструкции на пространствах идемпотентных вероятностных мер в последние годы привлекают значительное внимание в связи с их тесными связями с идемпотентным анализом и нелинейными функциональными расширениями топологических пространств. В частности, Радул [10] исследовал функторы идемпотентных мер с точки зрения абсолютных ретрактов и мягких отображений, выявив глубокие взаимосвязи между функториальными свойствами и топологической структурой. Эти результаты подчёркивают важность изучения индуцированных отображений, порождаемых функторами идемпотентных мер, за пределами компактной категории.

С другой стороны, в классической теории вероятностных мер геометрические и топологические свойства подпространств, задаваемых конечным носителем, были исследованы Заитовым [11]. Подобные исследования показывают, что конструкции с конечным носителем естественным образом отражают тонкие топологические свойства исходных пространств. В настоящей работе эта линия исследований продолжается в идемпотентном контексте и показано, что свойства полноты, в частности Π-полнота, корректно переносятся и полностью характеризуются индуцированными отображениями пространств идемпотентных вероятностных мер с конечным носителем.

Ранее было установлено, что для тихоновского пространства $X$ Π-полнота эквивалентна Π-полноте пространства идемпотентных вероятностных мер $I_\beta(X)$ (см. [13]). Настоящая статья продолжает эту линию исследований и переносит указанную эквивалентность на уровень отображений: мы показываем, что Π-полнота тихоновского отображения $g$ полностью характеризуется Π-полнотой индуцированного отображения $I_f(g)$.

Идемпотентные вероятностные меры возникают в идемпотентном (max-plus) анализе и связаны с функциональными расширениями топологических пространств (см. [6, 9]). С топологической точки зрения пространства идемпотентных вероятностных мер являются естественными «оболочками» исходных пространств, в связи с чем принципиально важно понимать, как при переходе к таким пространствам и индуцированным отображениям ведут себя свойства типа полноты.

Вне компактной категории проверка Π-полноты часто становится существенно более тонкой. Классическим примером служит прямая Соргенфрея $\mathbb{S}$ и её квадрат $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$, который является Π-полным, хотя и не является паракомпактным. Этот пример иллюстрирует, что в некомпактных ситуациях анализ Π-полноты отображений требует аккуратного использования компактификационных методов. Полученный в статье критерий показывает, что функтор $I_f$ корректно переносит Π-полноту и в типичных некомпактных ситуациях, сводя её исследование к анализу индуцированных отображений.

## 1. Предварительные сведения

В настоящей работе используются понятия и терминология общей топологии в смысле [2, 3], под *пространством* понимается топологическое $T_1$-пространство, под *компактом* — хаусдорфово компактное пространство, а под *отображением* — непрерывное отображение.

Семейство подмножеств множества $X$ называется *звёздно-счётным* (соответственно, *звёздно-конечным*), если каждый его элемент пересекается не более чем со счётным (соответственно, конечным) числом элементов этого семейства. Семейство $\omega$ подмножеств множества $X$ *уточняет* семейство $\Omega$ подмножеств $X$, если для каждого элемента $A \in \omega$ существует элемент $B \in \Omega$ такой, что $A \subset B$. В этом случае также говорят, что $\omega$ является уточнением семейства $\Omega$.

Для точки $x \in X$ и натурального числа $n$ неравенство $Kp\,(x,\,\omega) \leq n$ означает, что не более $n$ элементов семейства $\omega$ содержат точку $x$ [2, p. 270]. Запись $Kp\,\omega \leq n$ означает, что $Kp\,(x,\,\omega) \leq n$ для каждой точки $x \in X$.

Конечная последовательность подмножеств $M_0,\,\ldots,\,M_s$ множества $X$ называется [5] *цепью* в $X$, соединяющей множества $M_0$ и $M_s$, если $M_{i-1} \cap M_i \neq \varnothing$ для $i = 1, \ldots, s$. Семейство подмножеств множества $X$ называется *связанным*, если для любой пары множеств $M, M' \subset X$ существует цепь в $X$, соединяющая $M$ и $M'$. Максимальные связанные подсемейства семейства $\omega$ называются *компонентами* семейства $\omega$.
Звёздно-конечное открытое покрытие пространства $X$ называется *конечно-компонентным покрытием*, если число элементов каждой компоненты конечно.

Для семейства $\omega = \{O_\alpha\colon\ \alpha \in A\}$ подмножеств пространства $X$ полагаем

$$[\omega] = [\omega]_X = \{[O_\alpha]_X : \alpha \in A\}.$$

Пусть $X$ — пространство, $W$ — его подпространство и $x \in X \setminus W$. Говорят, что открытое в $W$ покрытие $\omega$ пространства $W$ *прокалывает* точку $x$ в $X$, если $x \notin \bigcup[\omega]_X$ [5].

Для пространства Тихонова $X$ через $\beta X$ обозначим его компактификацию Стоуна–Чеха (т. е. максимальное компактное расширение).

**Определение 1.1.** [5] Пространство Тихонова $X$ называется П-полным, если для каждой точки $x \in \beta X \setminus X$ существует конечно-компонентное покрытие $X$, прокалывающее точку $x$ в $\beta X$ (т. е. $x \notin \bigcup[\omega]_{\beta X}$).

Напомним понятие совершенной компактификации. Для топологического пространства $X$ и его подмножества $A$ множество

$$\mathrm{Fr}_X\, A = [A]_X \cap [X \setminus A]_X = [A]_X \setminus \mathrm{Int}_X\, A$$

называется *границей* множества $A$. Пусть $\upsilon X$ — компактное расширение пространства Тихонова $X$. Если $H \subset X$ — открытое в $X$ множество, то через $O(H)$ (или $O_{\upsilon X}(H)$) обозначим максимальное (по включению) открытое множество в $\upsilon X$, удовлетворяющее равенству $O_{\upsilon X}(H) \cap X = H$. Легко видеть, что

$$O_{\upsilon X}(H) = \bigcup_{\substack{\Gamma \in \tau_{\upsilon X},\\ \Gamma \cap X = H}} \Gamma,$$

где $\tau_{\upsilon X}$ — топология пространства $\upsilon X$.

Компактификация $\upsilon X$ пространства Тихонова $X$ называется *совершенной относительно открытого множества* $H$ в $X$, если выполняется равенство $[Fr_X H]_{\upsilon X} = Fr_{\upsilon X} O_{\upsilon X}(H)$. Если компактификация $\upsilon X$ совершенна для каждого открытого множества в $X$, то её называют *совершенной компактификацией* пространства $X$ ([2], p. 232).

Компактификация $\upsilon X$ пространства $X$ совершенна тогда и только тогда, когда для любых двух непересекающихся открытых множеств $U_1$ и $U_2$ в $X$ выполняется равенство

$$O(U_1 \cup U_2) = O(U_1) \cup O(U_2)$$

[2]. Компактификация Стоуна–Чеха $\beta X$ пространства Тихонова $X$ является совершенной компактификацией пространства $X$. Равенство $O(U_1 \cup U_2) = O(U_1) \cup O(U_2)$ выполняется для любой пары открытых множеств $U_1$ и $U_2$ в $X$ тогда и только тогда, когда $X$ является нормальным пространством, а компактификация $\upsilon X$ совпадает с компактификацией Стоуна–Чеха $\beta X$, т. е. $\upsilon X \cong \beta X$.

Следующий критерий играет ключевую роль при исследовании класса П-полных пространств [5, Theorem 1.1, pp. 16–17].

**Теорема 1.1.** *[4] Пространство Тихонова $X$ является* П*-полным тогда и только тогда, когда для каждой точки $x \in bX \setminus X$ произвольной совершенной компактификации $bX$ существует открытое покрытие $\omega$ пространства $X$ с $Kp\,\omega = 1$, прокалывающее точку $x$ в $bX$ (т. е. $x \notin \cup[\omega]_{bX}$).*

Так как компактификация Стоуна–Чеха $\beta X$ пространства Тихонова $X$ является совершенной компактификацией пространства $X$, то из теоремы 1.1 вытекает следующее утверждение.

**Следствие 1.1.** *Пространство Тихонова $X$ является* П*-полным тогда и только тогда, когда для каждой точки $x \in \beta X \setminus X$ существует покрытие $\omega$ пространства $X$ с $Kp\,\omega = 1$, прокалывающее точку $x$ в $\beta X$.*

Заметим, что всякое хаусдорфово компактное пространство является П-полным. Квадрат прямой Соргенфрея (то есть множество действительных чисел с топологией, порождённой множествами вида $[a,\, b)$, где $-\infty < a < b < +\infty$) является П-полным, но не является паракомпактным пространством (следовательно, не является хаусдорфовым компактным пространством). Пространство $T(\omega_1)$ всех ординалов, меньших первой несчётной ординали $\omega_1$, является нормальным пространством, но не является П-полным.

Перечислим некоторые известные свойства П-полных пространств.

1. Замкнутое подмножество П-полного пространства является П-полным ([5], p. 19).

2. Если $f\colon\ X \to Y$ — совершенное отображение и $Y$ является П-полным пространством, то $X$ также является П-полным ([5], p. 26).

Автор работы [6] рассмотрел функтор $I\colon\ \mathfrak{C}omp \to \mathfrak{C}omp$ и показал, что он является нормальным. Затем в работе [9], используя конструкцию, предложенную А. Ч. Чигогидзе [7], было получено расширение этого функтора на категорию Тихонова:$I_\beta\colon\ \mathfrak{T}ych \to \mathfrak{T}ych$. Здесь символ $\mathfrak{Comp}$ обозначает категорию компактных хаусдорфовых пространств и их непрерывных отображений, а $\mathfrak{T}ych$— категорию тихоновских пространств и их непрерывных отображений. Функториальный подход к расширениям тихоновских пространств был систематически разработан В. В. Федорчуком [8].

Для хаусдорфова компактного пространства $X$ идемпотентная вероятностная мера на $X$ определяется [6] как функционал $\mu\colon\ C(X) \to \mathbb{R}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $\mu(c_X) = c$ для каждой постоянной функции $c_X\colon\ X \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$. Здесь $c_X(x) = c$;

2) $\mu(c \odot \varphi) = c \odot \mu(\varphi)$, $c \in \mathbb{R}$, $\varphi \in C(X)$. Здесь $c \odot \varphi = c + \varphi$;

3) $\mu(\varphi \oplus \psi) = \mu(\varphi) \oplus \mu(\psi)$, $\varphi,\, \psi \in C(X)$. Здесь $\varphi \oplus \psi = \max\{\varphi,\, \psi\}$.

Множество всех идемпотентных вероятностных мер на $X$ обозначается через $I(X)$. Оно снабжается топологией $\tau_p$ поточечной сходимости. Для $\mu \in I(X)$ множества

$$\langle \mu;\, \varphi_1,\, \ldots,\, \varphi_n;\, \theta\rangle = \{\nu \in I(X)\colon\ |\nu(\varphi_i) - \mu(\varphi_i)| < \theta,\, i = 1,\, \ldots,\, n\}$$

образуют базу топологии поточечной сходимости в $I(X)$ при точке $\mu$. Здесь $\varphi,\, \ldots,\, \varphi_n \in C(X)$, $\theta > 0$.

Отметим, что функция $f\colon\ X \to [-\infty,\, +\infty)$ называется *верхне полунепрерывной*, если для каждой точки $x \in X$ и для каждого действительного числа $r$, удовлетворяющего неравенству $f(x) < r$, существует открытое окрестность $U \subset X$ точки $x$ такая, что $f(x') < r$ для всех $x' \in U$.

Рассмотрим хаусдорфово компактное пространство $X$ и положим

$$USC_0(X) = \Big\{f\colon\ X \to [-\infty,\, 0]\Big|\ f\text{ — верхне полунепрерывная функция,} \\ \text{для которой существует точка } x \in X \text{ такая, что } f(x) = 0\Big\}.$$

Для каждой идемпотентной вероятностной меры $\nu \in I(X)$ существует [1] единственная верхне полунепрерывная функция $\lambda \in USC_0(X)$ такая, что $\nu = \bigoplus\limits_{x\in X} \lambda(x) \odot \delta_x$.

Следовательно, [12]

$$I(X) = \left\{\bigoplus_{x\in X} \lambda(x) \odot \delta_x\colon\ \lambda \in USC_0(X)\right\}.$$

Множество

$$\operatorname{supp}\mu = \{x \in X\colon\ \lambda(x) > -\infty\}$$

называется [12] носителем идемпотентной вероятностной меры $\mu = \bigoplus\limits_{x\in X} \lambda(x) \odot \delta_x$.

## 2. О совершенной компактификации пространства идемпотентных вероятностных мер

Для пространства Тихонова $X$ положим [9]

$$I_\beta(X) = \{\mu \in I(X)\colon\ \operatorname{supp}\mu \subset X\}.$$

Очевидно, что $I_\beta(X) \subset I(X)$. Рассматриваем множество $I_\beta(X)$ как подпространство пространства $I(X)$. Для пространства Тихонова $X$ пространство $I_\beta(X)$ также является пространством Тихонова относительно индуцированной топологии.

Для непрерывного отображения $f\colon X \to Y$ пространств Тихонова положим

$$I_\beta(f) = I(f)|_{I_\beta(X)},$$

где $\beta f : \beta X \to \beta Y$ — компактификация Стоуна–Чеха отображения $f$ (она единственна).

Для хаусдорфова компактного пространства $X$ положим

$$I_f(X) = \Big\{\mu = \bigoplus_{i=1}^{n} \chi_\mu(x_i) \odot \delta_{x_i} \in I_\omega(X)\colon \\ \text{существует точка } x_{i_0} \in \operatorname{supp}\mu = \{x_1,\, \ldots,\, x_n\} \\ \text{такая, что } \chi_\mu(x_{i_0}) = 0 \text{ и } \chi_\mu(x_i) \le -\tfrac{n}{n+1} \text{ при } i \ne i_0\Big\}.$$

Для пространства Тихонова $X$ полагаем

$$I_f(X) = I_\beta(X) \cap I_f(\beta X).$$

Для точки $x \in X$ определим множество

$$I_f^x(X) = \left\{\mu = \bigoplus_{i=1}^{n} \chi_\mu(x_i) \odot \delta_{x_i} \in I_f(X)\colon\ x \in \operatorname{supp}\, \mu \text{ и } \chi_\mu(x) = 0\right\}.$$

Легко видеть, что для хаусдорфова компактного пространства $X$ выполняются следующие свойства:

**a)** $I_f^x(X) \cap I_f^y(X) = \varnothing$ тогда и только тогда, когда $x \ne y$ для каждой пары точек $x,\ y \in X$;

**b)** $I_f(X) = \bigcup\limits_{x\in X} I_f^x(X)$.

Рассмотрим подмножество $M \subset X$ и положим

$$\langle M\rangle = \left\{\mu \in I_f(X)\colon \text{ существует точка } x \in M \text{ такая, что } \mu \in I_f^x(X)\right\}.$$

**Предложение 2.1.** *Пусть $M$ — непустое подмножество хаусдорфова компактного пространства $X$. Тогда $I_f^x(X) \subset \langle M\rangle$ тогда и только тогда, когда $x \in M$.*

**Предложение 2.2.** *Для любых непустых подмножеств $M$ и $N$ хаусдорфова компактного пространства $X$ выполняется $\langle M\rangle \cap \langle N\rangle \ne \varnothing$ тогда и только тогда, когда $M \cap N \ne \varnothing$.*

**Теорема 2.1.** *Пусть $M$ — непустое подмножество хаусдорфова компактного пространства $X$. Тогда $\langle M\rangle$ открыто в $I_f(X)$ тогда и только тогда, когда $M$ открыто в $X$. Аналогично, $\langle M\rangle$ замкнуто в $I_f(X)$ тогда и только тогда, когда $M$ замкнуто в $X$.*

Легко видеть, что для пространства Тихонова $X$ множество $I_f(X)$ всюду плотно в $I_f(\beta X)$, то есть $I_f(\beta X)$ является компактификацией пространства $I_f(X)$. Сделаем более точное утверждение. Следующая теорема показывает, что функтор $I_\beta\colon \mathfrak{T}ych \to \mathfrak{T}ych$ преобразует попарно непересекающиеся открытые покрытия в попарно непересекающиеся открытые покрытия.

**Теорема 2.2.** *Для пространства Тихонова $X$ пространство $I_f(\beta X)$ является совершенной компактификацией пространства $I_f(X)$.*

**Лемма 2.1.** *Пусть $\upsilon$ — открытое покрытие пространства Тихонова $X$ с $K_p\upsilon = 1$. Тогда семейство*

$$I_\beta(\upsilon) = \{\langle U\rangle\colon\ U \in \upsilon\}$$

*является открытым покрытием пространства $I_\beta(X)$ с $K_p(I_\beta(\upsilon)) = 1$.*

Таким образом, получаем следующий замечательный результат.

**Теорема 2.3.** *[13] Для пространства Тихонова $X$ его гиперпространство $I_\beta(X)$ является* П*-полным тогда и только тогда, когда $X$ является* П*-полным.*

## 3. П-полнота отображения $I(f)$

Для отображения $f\colon\ X \to Y$ и подмножества $H \subset Y$ прообраз $f^{-1}H$ называется *трубкой* (над $H$).

Напомним, что непрерывное отображение $f : X \to Y$ называется [2] $T_0$-отображением, если для каждой пары различных точек $x, x' \in X$, таких что $f(x) = f(x')$, по крайней мере одна из этих точек имеет в $X$ открытую окрестность, не содержащую другую точку.

Непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ называется *вполне регулярным*, если для каждой точки $x \in X$ и любого замкнутого множества $F \subset X$, не содержащего точку $x$, существует открытая окрестность $O$ точки $f(x)$ такая, что в трубе $f^{-1}O$ множества $\{x\}$ и $F$ функционально разделимы. Вполне регулярное $T_0$-отображение называется *тихоновским отображением.* .

Очевидно, каждое непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ тихоновского пространства $X$ в топологическое пространство $Y$ является тихоновским отображением. В этом случае для любого тихоновского пространства $X$, поскольку пространство $I(X)$ с топологией поточечной сходимости является тихоновским пространством, отображение

$$I_\beta(f)\colon I_\beta(X) \to I_\beta(Y)$$

также является тихоновским отображением.

Непрерывное замкнутое отображение $f\colon X \to Y$ называется *компактным*, если прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки $y \in Y$ является компактным. Непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ является компактным тогда и только тогда, когда для каждой точки $y \in Y$ и любого покрытия слоя $f^{-1}(y)$, состоящего из открытых в $X$ множеств, существует открытая окрестность $O$ точки $y$ в $Y$ такая, что трубка $f^{-1}O$ допускает конечное подпокрытие исходного покрытия.

Компактное отображение $bf\colon\ b_f X \to Y$ называется *компактификацией* непрерывного отображения $f\colon\ X \to Y$, если $X$ всюду плотно в $b_f X$ и $b\,f|_X = f$. На множестве всех компактификаций заданного отображения $f$ можно ввести частичный порядок: для компактификаций $b_1 f\colon\ b_1 X \to Y$ и $b_2 f\colon\ b_2 X \to Y$ отображения $f$ положим $b_1 f \le b_2 f$, если существует естественное отображение $b_2 X$ на $b_1 X$. Б. А. Пасынков показал, что для каждого отображения Тихонова $f\colon\ X \to Y$ существует его максимальная компактификация $g\colon\ Z \to Y$, которую он обозначил через $\beta f$, а пространство $Z$, в котором определена эта максимальная компактификация, обозначил через $\beta_f(X)$.

*Замечание* 3.1. Заметим, что отображения $b_1 f$, $b_2 f$, $\beta f$ являются компактификациями отображения $f$. Пространства $b_1 X$, $b_2 X$, $\beta_f X$ являются некоторыми расширениями пространства $X$, но они не обязаны быть компактификациями самого пространства $X$.

Отображение Тихонова $f\colon X \to Y$ называется П-полным, если для каждой точки $x \in \beta_f X \setminus X$ существует попарно непересекающееся открыто-замкнутое покрытие $X$, прокалывающее точку $x$ в $\beta_f X$ [5, pp. 120–121].

Рассмотрим следующее понятие.

**Определение 3.1** ([14])**.** Компактификация $b\,f\colon\ b\,X \to Y$ отображения Тихонова $f\colon\ X \to Y$ называется совершенной компактификацией $f$, если для каждой точки $y \in Y$ и для любых двух непересекающихся открытых множеств $U_1$ и $U_2$ в $X$ существует открытая окрестность $O \subset Y$ точки $y$ такая, что выполняется равенство

$$O_{\beta X}(U_1 \cup U_2) \cap (\beta f)^{-1} O \;=\; \big(O_{\beta X}(U_1) \cup O_{\beta X}(U_2)\big) \cap (\beta f)^{-1} O.$$

Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение тихоновского пространства $X$ в пространство $Y$. Известно, что существует компактификация $\nu X$ пространства $X$ такая, что отображение $f$ допускает непрерывное продолжение $\nu f\colon \nu X \to Y$. Ясно, что отображение $\nu f$ является совершенной компактификацией отображения $f$.

Следующий результат является аналогом теоремы 1.1 для случая отображений.

**Теорема 3.1.** *Пусть $b\,f\colon b_f X \to Y$ — совершенная компактификация отображения Тихонова $f\colon X \to Y$. Отображение $f$ является* П*-полным тогда и только тогда, когда для каждой точки $x \in b_f X \setminus X$ существует попарно непересекающееся открыто-замкнутое покрытие $X$, прокалывающее точку $x$ в $b_f X$.*

*Доказательство.* Пусть $\beta f\colon \beta_f X \to Y$ — максимальная компактификация отображения Тихонова $f\colon X \to Y$ (в смысле Пасынкова). Для любой компактификации $bf\colon b_f X \to Y$ отображения $f$ существует единственная непрерывная сюръекция

$$p\colon \beta_f X \longrightarrow b_f X$$

такая, что $p|_X = \mathrm{id}_X$ и $bf \circ p = \beta f$.

Для любого подмножества $A \subset X$ имеет место равенство

$$\overline{A}^{\,b_f X} = p\Big(\overline{A}^{\,\beta_f X}\Big). \tag{3.1}$$

Действительно, отображение $p$ является непрерывной сюръекцией между компактными хаусдорфовыми пространствами, а потому является замкнутым. Следовательно, множество $p(\overline{A}^{\,\beta_f X})$ замкнуто в $b_f X$ и содержит $A$ (так как $p|_X = \mathrm{id}_X$), откуда следует, что

$$\overline{A}^{\,b_f X} \subset p(\overline{A}^{\,\beta_f X}).$$

С другой стороны, пусть $x \in \overline{A}^{\,b_f X}$. Тогда существует сеть $(a_i) \subset A$, сходящаяся к $x$ в пространстве $b_f X$. Рассматривая ту же сеть в $\beta_f X$ (где $X$ плотно), из компактности $\beta_f X$ следует существование сходящейся подсети $(a_{i_j}) \to \tilde{x} \in \beta_f X$. По непрерывности отображения $p$ имеем

$$p(\tilde{x}) = \lim p(a_{i_j}) = \lim a_{i_j} = x,$$

причём $\tilde{x} \in \overline{A}^{\,\beta_f X}$. Следовательно, $x \in p(\overline{A}^{\,\beta_f X})$, что и доказывает равенство (3.1).

Пусть отображение $f$ является П-полным и $x \in b_f X \setminus X$. Выберем точку $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$. Тогда $\tilde{x} \in \beta_f X \setminus X$. По П-полноте отображения $f$ существует дизъюнктное покрытие, состоящее из открыто-замкнутых множеств $\omega$ пространства $X$ такое, что

$$\tilde{x} \notin \bigcup [\omega]_{\beta_f X}.$$

Предположим противное, а именно, что $x \in \bigcup[\omega]_{b_f X}$. Тогда $x \in \overline{U}^{\,b_f X}$ для некоторого $U \in \omega$. В силу равенства (3.1) имеем

$$\overline{U}^{\,b_f X} = p(\overline{U}^{\,\beta_f X}),$$

откуда следует существование точки $\tilde{x}' \in \overline{U}^{\,\beta_f X}$ такой, что $p(\tilde{x}') = x$. В частности, $\tilde{x}' \in p^{-1}(x)$, а значит, $\tilde{x}' \in \bigcup[\omega]_{\beta_f X}$, что противоречит условию $\tilde{x} \notin \bigcup[\omega]_{\beta_f X}$, поскольку прообраз $p^{-1}(x)$ непуст, и приведённое рассуждение показывает, что *каждая* точка из $p^{-1}(x)$ должна избегать $\bigcup[\omega]_{\beta_f X}$ в случае, если $x$ избегает $\bigcup[\omega]_{b_f X}$. Следовательно,

$$x \notin \bigcup[\omega]_{b_f X},$$

то есть покрытие $\omega$ прокалывает точку $x$ в пространстве $b_f X$.

Предположим теперь, что для каждой точки $x \in b_f X \setminus X$ существует дизъюнктное клопен-покрытие пространства $X$, прокалывающее точку $x$ в $b_f X$. Применим это предположение к частному случаю совершенной компактификации $b_f X = \beta_f X$. Тогда для любой точки $x \in \beta_f X \setminus X$ существует дизъюнктное клопен-покрытие пространства $X$, прокалывающее точку $x$ в $\beta_f X$, что в точности означает, что отображение $f$ является П-полным. □

Следующий результат является вариантом теоремы 2.1 для случая отображений.

**Теорема 3.2.** *Пусть $g\colon X \to Y$ — отображение Тихонова. Тогда отображение*

$$I_f(\beta g)\colon I_f(\beta_g X) \to I_f(Y)$$

*является совершенной компактификацией отображения*

$$I_f(g)\colon I_f(X) \to I_f(Y).$$

*Доказательство.* Пусть $\beta g\colon \beta_g X \to Y$ — максимальная компактификация отображения Тихонова $g\colon X \to Y$. Тогда пространство $\beta_g X$ компактно и хаусдорфово, следовательно, $I_f(\beta_g X)$ также является компактным хаусдорфовым пространством. Поскольку $X$ плотно в $\beta_g X$ и

$$I_f(X) = I_\beta(X) \cap I_f(\beta X),$$

отсюда следует, что $I_f(X)$ плотно в $I_f(\beta_g X)$. По функториальности имеем

$$I_f(\beta g)|_{I_f(X)} = I_f(g),$$

следовательно, отображение $I_f(\beta g)\colon I_f(\beta_g X) \to I_f(Y)$ является компактификацией отображения $I_f(g)$.

Покажем, что эта компактификация является *совершенной*. Пусть $\nu \in I_f(Y)$ и пусть $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \subset I_f(X)$ — непересекающиеся открытые множества. Выберем точки $\mu_i \in \mathcal{U}_i$ $(i = 1, 2)$. Тогда $\mu_i \in I_f^{x_i}(X)$ для некоторых $x_i \in X$ таких, что $\chi_{\mu_i}(x_i) = 0$. Так как $\mathcal{U}_i$ открыто, существует открытая окрестность $U_i \subset X$ точки $x_i$ такая, что

$$\mu_i \in \langle U_i \rangle \subset \mathcal{U}_i.$$

По Предложению 2.2 из непересекаемости $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ следует, что $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.

Пусть теперь $\nu \in I_f^{y_0}(Y)$, где $y_0 \in \operatorname{supp} \nu$ и $\chi_\nu(y_0) = 0$. Так как $\beta g$ является совершенной компактификацией отображения $g$, существует открытая окрестность $V \subset Y$ точки $y_0$ такая, что

$$O_{\beta_g X}(U_1 \cup U_2) \cap (\beta g)^{-1}(V) = \big(O_{\beta_g X}(U_1) \cup O_{\beta_g X}(U_2)\big) \cap (\beta g)^{-1}(V). \tag{3.2}$$

Переведём тождество (3.2) на уровень функтора $I_f$.

**Утверждение 1.** Для любого открытого множества $W \subset Y$ имеет место равенство

$$\big(I_f(\beta g)\big)^{-1}\langle W\rangle = \langle(\beta g)^{-1}(W)\rangle.$$

Действительно, $I_f(\beta g)(\mu) \in \langle W\rangle$ тогда и только тогда, когда существует точка $x \in \operatorname{supp}\mu$ такая, что $\chi_\mu(x) = 0$ и $\beta g(x) \in W$, что эквивалентно условию $\mu \in \langle(\beta g)^{-1}(W)\rangle$.

**Утверждение 2.** Для любого открытого множества $U \subset X$ максимальным открытым подмножеством пространства $I_f(\beta_g X)$, пересечение которого с $I_f(X)$ совпадает с $\langle U\rangle$, является множество $\langle O_{\beta_g X}(U)\rangle$.

В самом деле, по Теореме 2.1 множество $\langle O_{\beta_g X}(U)\rangle$ открыто в $I_f(\beta_g X)$ и

$$\langle O_{\beta_g X}(U)\rangle \cap I_f(X) = \langle O_{\beta_g X}(U) \cap X\rangle = \langle U\rangle.$$

Максимальность следует из максимальности $O_{\beta_g X}(U)$ и монотонности отображения $M \mapsto \langle M\rangle$.

Используя Утверждение 2, из тождества совершенности (3.2) получаем

$$O_{I_f(\beta_g X)}(\langle U_1 \cup U_2\rangle) \cap \langle(\beta g)^{-1}(V)\rangle = \big(O_{I_f(\beta_g X)}(\langle U_1\rangle) \cup O_{I_f(\beta_g X)}(\langle U_2\rangle)\big) \cap \langle(\beta g)^{-1}(V)\rangle.$$

Наконец, по Утверждению 1 имеем

$$\langle(\beta g)^{-1}(V)\rangle = \big(I_f(\beta g)\big)^{-1}\langle V\rangle,$$

а множество $\langle V\rangle$ является открытой окрестностью точки $\nu$ в пространстве $I_f(Y)$. Следовательно, отображение $I_f(\beta g)$ является совершенной компактификацией отображения $I_f(g)$.

$\square$

Следующее утверждение является основным результатом данного раздела.

**Теорема 3.3.** *Отображение Тихонова $I_f(g)\colon\ I_f(X) \to I_f(Y)$ является $\Pi$-полным тогда и только тогда, когда отображение $g\colon\ X \to Y$ является $\Pi$-полным.*

*Доказательство.* Пусть $I_f(g)\colon\ I_f(X) \to I_f(Y)$ является $\Pi$-полным отображением. Из этого следует, что $g\colon\ X \to Y$ является $\Pi$-полным отображением, так как $X = \{\{x\}\colon\ x \in X\} \subset I_f(X)$ является замкнутым подмножеством.

Теперь пусть $g\colon\ X \to Y$ — $\Pi$-полное отображение. Рассмотрим произвольную точку $\mu \in I_f(\beta_g X) \setminus I_f(X)$ и, используя теоремы 3.1 и 3.2, покажем, что существует попарно непересекающееся открыто-замкнутое покрытие пространства $I_f(X)$, прокалывающее точку $\mu$ в $I_f(\beta_g X)$.

По определению, для каждой точки $x \in \operatorname{supp}\mu \setminus X \subset \beta_f X \setminus X$ существует попарно непересекающееся открыто-замкнутое покрытие $\omega_x$ пространства $X$, прокалывающее точку $x$ в $\beta_f X$. Зафиксируем точку $x_0 \in \operatorname{supp}\mu \setminus X$. Тогда $x_0 \notin \bigcup [\omega_{x_0}]_{\beta_f X}$ в $\beta_f X$. Следовательно,

$$\operatorname{supp}\mu \not\subset [U]_{\beta_f X}, \quad \text{для любого } U \in \omega_{x_0}.$$

Отсюда получаем

$$\mu \notin [\langle U\rangle]_{I_f(\beta_g X)}, \quad \text{для каждого } \ U \in \omega_{x_0}.$$

В силу (2.1), применяя лемму 2.1 ещё раз, заключаем, что семейство $I_f(\omega_{x_0})$ является попарно непересекающимся открыто-замкнутым покрытием пространства $I_f(X)$, прокалывающим рассматриваемую точку $\mu$ в $I_f(\beta_g X)$. $\square$

**Следствие 3.1.** *Функтор $I$ поднимается на категорию $\Pi$-полных пространств и их непрерывных отображений.*

## 4. Заключение

В настоящей работе исследованы вопросы сохранения и отражения свойств П-полноты в рамках функториальных конструкций, связанных с пространствами идемпотентных вероятностных мер с конечным носителем. Основное внимание было уделено изучению поведения П-полноты при переходе от тихоновских отображений к индуцированным отображениям в пространствах идемпотентных вероятностных мер.

Главным результатом статьи является установление эквивалентности между П-полнотой тихоновского отображения $g\colon X \to Y$ и П-полнотой индуцированного отображения $I_f(g)\colon I_f(X) \to I_f(Y)$. Полученный критерий носит двусторонний характер и показывает, что функтор $I_f$ не только сохраняет, но и отражает П-полноту отображений. Тем самым существенно расширяются ранее известные результаты, касающиеся П-полноты самих пространств и действия подфунктора $I_\beta$.

В заключение отметим, что доказанные утверждения открывают возможности для дальнейшего изучения функториальных свойств пространств идемпотентных вероятностных мер, а также для исследования других типов полноты и компактностных свойств в аналогичных функториальных конструкциях.

### Благодарность

Автор выражает искреннюю благодарность А. А. Заитову за постоянную поддержку, ценные обсуждения, полезные замечания и научное руководство, оказанные в процессе подготовки настоящей работы.

## Список литературы

[1] Akian, M.: *Densities of idempotent measures and large deviations*. Transactions of the American Mathematical Society. **351**(11), 4515–4543 (1999).
[2] Arkhangel'skii, A.V., Ponomarev, V.I.: *Fundamentals of General Topology: Problems and Exercises*. D. Reidel Publishing Company. Dordrecht (1983).
[3] Fedorchuk, V.V., Filippov, V.V.: *General Topology. Basic Structures*. Fizmatlit. Moscow (2006).
[4] Buhagiar, D., Miwa, T.: *On superparacompact and Lindelöf GO spaces*. Houston Journal of Mathematics. **24**(3), 443–457 (1998).
[5] Musayev, D.K., Pasynkov, B.A.: *On compactness and completeness properties of topological spaces and continuous maps*. Fan. Tashkent (1994). (in Russian)
[6] Zarichnyi, M.: *Spaces and maps of idempotent measures*. Izvestiya: Mathematics. **74**(3), 481–499 (2010).
[7] Chigogidze, A.Ch.: *Extension of normal functors*. Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya Matematika i Mekhanika. (6), 23–26 (1984).
[8] Fedorchuk, V.V.: *Functors in topology*. Russian Mathematical Surveys. **46**(3), 1–40 (1991). https://doi.org/10.1070/RM1991v046n03ABEH002737
[9] Ishmetov, A.Ya.: *On the functor of idempotent probability measures with compact support*. Uzbek Mathematical Journal. (1), 72–80 (2010).
[10] Radul, T.: *Idempotent Measures: Absolute Retracts and Soft Maps*. Preprint arXiv:1810.09140v1 (2018).
[11] Zaitov, A.A.: *Geometrical and topological properties of a subspace $P_f(X)$ of probability measures*. Russian Mathematics (Izvestiya VUZ). **63**(10), 24–32 (2019).
[12] Zaitov, A.A.: *On a metric on the space of idempotent probability measures*. Applied General Topology. **21**(1), 35–51 (2020).
[13] Ayupov, Sh.A., Zaitov, A.A., Eshtemirova, Sh.H.: П-*completeness of the space of idempotent probability measures*. Uzbek Mathematical Journal. **69**(1), 37–48 (2025).
[14] Zaitov, A.A., Jumaev, D.I.: *Hyperspaces of superparacompact spaces and continuous maps*. Universal Journal of Mathematics and Applications. **2**(2), 8 pp. (2019). https://arxiv.org/abs/1811.05347.

## Организации

Эштемирова Шахноза Хаккул кизи

**Address:** Институт математики им. V. I. Романовского Академии наук Республики Узбекистан, ул. Университетская, 9, 100174, Ташкент, Узбекистан

**e-mail:** shaxnoza.eshtemirova@mail.ru
**ORCID ID:**https://orcid.org/0009-0005-8316-5082

# Idempotent probability measures spaces on Π-complete spaces and maps

Sh.Kh. Eshtemirova

## Abstract

In this paper we study the behavior of Π-completeness for Tychonoff maps under the functor of idempotent probability measures with finite support. We prove that a Tychonoff map is Π-complete if and only if the induced map between the corresponding spaces of idempotent probability measures is Π-complete. As a consequence, the functor of idempotent probability measures with finite support both preserves and reflects Π-completeness for maps. This provides a convenient criterion for verifying Π-completeness via induced mappings and supports the transfer of completeness-type properties to functorially constructed spaces. The obtained result yields a lifting of the functor to the category whose objects are Π-complete spaces and whose morphisms are Π-complete maps.

## Keywords

Idempotent probability measures, finite support, spaces of idempotent probability measures, induced mappings, star-finite open cover, finite-component cover, perfect compactification, Stone–Čech compactification.

## Affiliations

Eshtemirova Shaxnoza Haqqul qizi
**Address:** V. I. Romanovsky Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of Uzbekistan, 9, University Str., 100174, Tashkent, Uzbekistan
**e-mail:** shaxnoza.eshtemirova@mail.ru
**ORCID ID:** https://orcid.org/0009-0005-8316-5082