Uzbekistan Journal of Mathematics and Computer Science
Volume-1, Issue-2, Page 101–111 (2025)
DOI: https://doi.org/10.56143/ujmcs.v1i2.12/
Research article

Пространства идемпотентных вероятностных мер над П-полными пространствами и отображениями

Ш. Х. Эштемирова

Аннотация

В настоящей работе исследуется поведение Π-полноты для тихоновских отображений относительно функтора идемпотентных вероятностных мер с конечным носителем. Доказано, что тихоновское отображение является Π-полным тогда и только тогда, когда индуцированное отображение между соответствующими пространствами идемпотентных вероятностных мер является Π-полным. Как следствие, функтор идемпотентных вероятностных мер с конечным носителем как сохраняет, так и отражает Π-полноту отображений. Это даёт удобный критерий проверки Π-полноты с помощью индуцированных отображений и способствует переносу свойств полноты на пространства, построенные функториальными методами. Полученный результат обеспечивает поднятие функтора на категорию, объектами которой являются Π-полные пространства, а морфизмами — Π-полные отображения.

Ключевые слова: *идемпотентные вероятностные меры, конечный носитель, пространства идемпотентных вероятностных мер, индуцированные отображения, звёздно-конечное открытое покрытие, конечно-компонентное покрытие, совершенная компактификация, компактификация Стоуна–Чеха.*

Предметная классификацие AMS (2020): *54B20, 54C10.*

Введение

Свойства типа полноты и их поведение при компактификациях играют важную роль в общей топологии и теории непрерывных отображений (см., например, [2, 5]). Одним из таких свойств является П-полнота, введённая в работах Мусаева и Пасынкова [5], представляющая эффективный аппарат для исследования пространств и непрерывных отображений за пределами компактной категории.

Одной из важных задач теории функторов в топологии является выяснение того, какие топологические свойства сохраняются и отражаются функториальными конструкциями. В настоящей работе мы рассматриваем функтор I_f идемпотентных вероятностных мер с конечным носителем и изучаем П-полноту в классе тихоновских отображений. Основной результат статьи устанавливает точный критерий: для тихоновского отображения $g\colon X \to Y$ индуцированное отображение

$$I_f(g)\colon I_f(X) \to I_f(Y)$$

является П-полным тогда и только тогда, когда П-полным является само отображение g. Тем самым получаем, что функтор I_f не только сохраняет, но и отражает П-полноту отображений, что существенно для построения и сравнения категорий, задаваемых условиями полноты.

Received : *28–july–2025,* ***Accepted :*** *20–november–2025*
**** Corresponding author***

Переход за пределы компактной категории обычно осуществляется посредством конструкций расширения нормальных функторов на категорию тихоновских пространств. Для идемпотентных вероятностных мер такой переход был реализован, в частности, с использованием подхода Чигогидзе [7] (см. также [9]), где вводится подфунктор I_β, сохраняющий ключевые компактификационные свойства. В настоящей работе мы используем тесно связанный с I_β подфунктор I_f, что позволяет применять компактификационные аргументы и критерии типа «выкалывания точек» в некомпактной ситуации.

Функториальные конструкции на пространствах идемпотентных вероятностных мер в последние годы привлекают значительное внимание в связи с их тесными связями с идемпотентным анализом и нелинейными функциональными расширениями топологических пространств. В частности, Радул [10] исследовал функторы идемпотентных мер с точки зрения абсолютных ретрактов и мягких отображений, выявив глубокие взаимосвязи между функториальными свойствами и топологической структурой. Эти результаты подчёркивают важность изучения индуцированных отображений, порождаемых функторами идемпотентных мер, за пределами компактной категории.

С другой стороны, в классической теории вероятностных мер геометрические и топологические свойства подпространств, задаваемых конечным носителем, были исследованы Заитовым [11]. Подобные исследования показывают, что конструкции с конечным носителем естественным образом отражают тонкие топологические свойства исходных пространств. В настоящей работе эта линия исследований продолжается в идемпотентном контексте и показано, что свойства полноты, в частности П-полнота, корректно переносятся и полностью характеризуются индуцированными отображениями пространств идемпотентных вероятностных мер с конечным носителем.

Ранее было установлено, что для тихоновского пространства X П-полнота эквивалентна П-полноте пространства идемпотентных вероятностных мер $I_\beta(X)$ (см. [13]). Настоящая статья продолжает эту линию исследований и переносит указанную эквивалентность на уровень отображений: мы показываем, что П-полнота тихоновского отображения g полностью характеризуется П-полнотой индуцированного отображения $I_f(g)$.

Идемпотентные вероятностные меры возникают в идемпотентном (max-plus) анализе и связаны с функциональными расширениями топологических пространств (см. [6, 9]). С топологической точки зрения пространства идемпотентных вероятностных мер являются естественными «оболочками» исходных пространств, в связи с чем принципиально важно понимать, как при переходе к таким пространствам и индуцированным отображениям ведут себя свойства типа полноты.

Вне компактной категории проверка П-полноты часто становится существенно более тонкой. Классическим примером служит прямая Соргенфрея $\mathbb{S}$ и её квадрат $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$, который является П-полным, хотя и не является паракомпактным. Этот пример иллюстрирует, что в некомпактных ситуациях анализ П-полноты отображений требует аккуратного использования компактификационных методов. Полученный в статье критерий показывает, что функтор I_f корректно переносит П-полноту и в типичных некомпактных ситуациях, сводя её исследование к анализу индуцированных отображений.

1. Предварительные сведения

В настоящей работе используются понятия и терминология общей топологии в смысле [2, 3], под *пространством* понимается топологическое T_1-пространство, под *компактом* — хаусдорфово компактное пространство, а под *отображением* — непрерывное отображение.

Семейство подмножеств множества X называется *звёздно-счётным* (соответственно, *звёздно-конечным*), если каждый его элемент пересекается не более чем со счётным (соответственно, конечным) числом элементов этого семейства. Семейство ω подмножеств множества X *уточняет* семейство Ω подмножеств X, если для каждого элемента $A \in \omega$ существует элемент $B \in \Omega$ такой, что $A \subset B$. В этом случае также говорят, что ω является уточнением семейства Ω.

Для точки $x \in X$ и натурального числа n неравенство $Kp\,(x,\,\omega) \leq n$ означает, что не более n элементов семейства ω содержат точку x [2, p. 270]. Запись $Kp\,\omega \leq n$ означает, что $Kp\,(x,\,\omega) \leq n$ для каждой точки $x \in X$.

Конечная последовательность подмножеств $M_0,\,\ldots,\,M_s$ множества X называется [5] *цепью* в X, соединяющей множества M_0 и M_s, если $M_{i-1} \cap M_i \neq \varnothing$ для $i = 1, \ldots, s$. Семейство подмножеств множества X называется *связанным*, если для любой пары множеств $M,\,M' \subset X$ существует цепь в X, соединяющая M и M'. Максимальные связанные подсемейства семейства ω называются *компонентами* семейства ω.
Звёздно-конечное открытое покрытие пространства X называется *конечно-компонентным покрытием*, если число элементов каждой компоненты конечно.

Для семейства $\omega = \{O_\alpha\colon\ \alpha \in A\}$ подмножеств пространства X полагаем

$$[\omega] = [\omega]_X = \{[O_\alpha]_X : \alpha \in A\}.$$

Пусть X — пространство, W — его подпространство и $x \in X \setminus W$. Говорят, что открытое в W покрытие ω пространства W *прокалывает* точку x в X, если $x \notin \bigcup[\omega]_X$ [5].

Для пространства Тихонова X через βX обозначим его компактификацию Стоуна–Чеха (т. е. максимальное компактное расширение).

Определение 1.1. [5] Пространство Тихонова X называется П-полным, если для каждой точки $x \in \beta X \setminus X$ существует конечно-компонентное покрытие X, прокалывающее точку x в βX (т. е. $x \notin \bigcup[\omega]_{\beta\,X}$).

Напомним понятие совершенной компактификации. Для топологического пространства X и его подмножества A множество

$$\mathrm{Fr}_X\,A = [A]_X \cap [X \setminus A]_X = [A]_X \setminus \mathrm{Int}_X\,A$$

называется *границей* множества A. Пусть υX — компактное расширение пространства Тихонова X. Если $H \subset X$ — открытое в X множество, то через $O(H)$ (или $O_{\upsilon X}(H)$) обозначим максимальное (по включению) открытое множество в υX, удовлетворяющее равенству $O_{\upsilon X}(H) \cap X = H$. Легко видеть, что

$$O_{\upsilon X}(H) = \bigcup_{\substack{\Gamma \in \tau_{\upsilon X},\\ \Gamma \cap X = H}} \Gamma,$$

где $\tau_{\upsilon X}$ — топология пространства υX.

Компактификация υX пространства Тихонова X называется *совершенной относительно открытого множества* H в X, если выполняется равенство $[Fr_X H]_{\upsilon X} = Fr_{\upsilon X} O_{\upsilon X}(H)$. Если компактификация υX совершенна для каждого открытого множества в X, то её называют *совершенной компактификацией* пространства X ([2], p. 232).

Компактификация υX пространства X совершенна тогда и только тогда, когда для любых двух непересекающихся открытых множеств U_1 и U_2 в X выполняется равенство

$$O(U_1 \cup U_2) = O(U_1) \cup O(U_2)$$

[2]. Компактификация Стоуна–Чеха βX пространства Тихонова X является совершенной компактификацией пространства X. Равенство $O(U_1 \cup U_2) = O(U_1) \cup O(U_2)$ выполняется для любой пары открытых множеств U_1 и U_2 в X тогда и только тогда, когда X является нормальным пространством, а компактификация υX совпадает с компактификацией Стоуна–Чеха βX, т. е. $\upsilon X \cong \beta X$.

Следующий критерий играет ключевую роль при исследовании класса П-полных пространств [5, Theorem 1.1, pp. 16–17].

Теорема 1.1. *[4] Пространство Тихонова X является* П*-полным тогда и только тогда, когда для каждой точки $x \in bX \setminus X$ произвольной совершенной компактификации bX существует открытое покрытие ω пространства X с $Kp\,\omega = 1$, прокалывающее точку x в bX (т. е. $x \notin \cup[\omega]_{bX}$).*

Так как компактификация Стоуна–Чеха βX пространства Тихонова X является совершенной компактификацией пространства X, то из теоремы 1.1 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1.1. *Пространство Тихонова X является* П*-полным тогда и только тогда, когда для каждой точки $x \in \beta X \setminus X$ существует покрытие ω пространства X с $Kp\,\omega = 1$, прокалывающее точку x в βX.*

Заметим, что всякое хаусдорфово компактное пространство является П-полным. Квадрат прямой Соргенфрея (то есть множество действительных чисел с топологией, порождённой множествами вида $[a, b)$, где $-\infty < a < b < +\infty$) является П-полным, но не является паракомпактным пространством (следовательно, не является хаусдорфовым компактным пространством). Пространство $T(\omega_1)$ всех ординалов, меньших первой несчётной ординали ω_1, является нормальным пространством, но не является П-полным.

Перечислим некоторые известные свойства П-полных пространств.

1. Замкнутое подмножество П-полного пространства является П-полным ([5], p. 19).
2. Если $f\colon X \to Y$ — совершенное отображение и Y является П-полным пространством, то X также является П-полным ([5], p. 26).

Автор работы [6] рассмотрел функтор $I\colon \mathfrak{C}omp \to \mathfrak{C}omp$ и показал, что он является нормальным. Затем в работе [9], используя конструкцию, предложенную А. Ч. Чигогидзе [7], было получено расширение этого функтора на категорию Тихонова:$I_\beta\colon \mathfrak{T}ych \to \mathfrak{T}ych$. Здесь символ $\mathfrak{Comp}$ обозначает категорию компактных хаусдорфовых пространств и их непрерывных отображений, а $\mathfrak{T}ych$— категорию тихоновских пространств и их непрерывных отображений. Функториальный подход к расширениям тихоновских пространств был систематически разработан В. В. Федорчуком [8].

Для хаусдорфова компактного пространства X идемпотентная вероятностная мера на X определяется [6] как функционал $\mu\colon C(X) \to \mathbb{R}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $\mu(c_X) = c$ для каждой постоянной функции $c_X\colon X \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$. Здесь $c_X(x) = c$;

2) $\mu(c \odot \varphi) = c \odot \mu(\varphi)$, $c \in \mathbb{R}$, $\varphi \in C(X)$. Здесь $c \odot \varphi = c + \varphi$;

3) $\mu(\varphi \oplus \psi) = \mu(\varphi) \oplus \mu(\psi)$, $\varphi, \psi \in C(X)$. Здесь $\varphi \oplus \psi = \max\{\varphi, \psi\}$.

Множество всех идемпотентных вероятностных мер на X обозначается через $I(X)$. Оно снабжается топологией τ_p поточечной сходимости. Для $\mu \in I(X)$ множества

$$\langle \mu; \varphi_1, \ldots, \varphi_n; \theta \rangle = \{\nu \in I(X)\colon |\nu(\varphi_i) - \mu(\varphi_i)| < \theta, i = 1, \ldots, n\}$$

образуют базу топологии поточечной сходимости в $I(X)$ при точке μ. Здесь $\varphi, \ldots, \varphi_n \in C(X)$, $\theta > 0$.

Отметим, что функция $f\colon X \to [-\infty, +\infty)$ называется *верхне полунепрерывной*, если для каждой точки $x \in X$ и для каждого действительного числа r, удовлетворяющего неравенству $f(x) < r$, существует открытое окрестность $U \subset X$ точки x такая, что $f(x') < r$ для всех $x' \in U$.

Рассмотрим хаусдорфово компактное пространство X и положим

$$USC_0(X) = \Big\{ f\colon X \to [-\infty, 0] \Big| \; f \text{ — верхне полунепрерывная функция,}$$
$$\text{для которой существует точка } x \in X \text{ такая, что } f(x) = 0 \Big\}.$$

Для каждой идемпотентной вероятностной меры $\nu \in I(X)$ существует [1] единственная верхне полунепрерывная функция $\lambda \in USC_0(X)$ такая, что $\nu = \bigoplus\limits_{x \in X} \lambda(x) \odot \delta_x$.

Следовательно, [12]

$$I(X) = \left\{ \bigoplus_{x \in X} \lambda(x) \odot \delta_x\colon \lambda \in USC_0(X) \right\}.$$

Множество

$$\operatorname{supp}\mu=\{x\in X\colon\ \lambda(x)>-\infty\}$$

называется [12] носителем идемпотентной вероятностной меры $\mu=\bigoplus\limits_{x\in X}\lambda(x)\odot\delta_x$.

2. О совершенной компактификации пространства идемпотентных вероятностных мер

Для пространства Тихонова X положим [9]

$$I_\beta(X)=\{\mu\in I(X)\colon\ \operatorname{supp}\mu\subset X\}.$$

Очевидно, что $I_\beta(X)\subset I(X)$. Рассматриваем множество $I_\beta(X)$ как подпространство пространства $I(X)$. Для пространства Тихонова X пространство $I_\beta(X)$ также является пространством Тихонова относительно индуцированной топологии.

Для непрерывного отображения $f\colon X\to Y$ пространств Тихонова положим

$$I_\beta(f)=I(f)|_{I_\beta(X)},$$

где $\beta f:\beta X\to\beta Y$ — компактификация Стоуна–Чеха отображения f (она единственна).

Для хаусдорфова компактного пространства X положим

$$I_f(X)=\Big\{\mu=\bigoplus_{i=1}^{n}\chi_\mu(x_i)\odot\delta_{x_i}\in I_\omega(X)\colon \text{ существует точка } x_{i_0}\in\operatorname{supp}\mu=\{x_1,\,\ldots,\,x_n\} \text{ такая, что } \chi_\mu(x_{i_0})=0 \text{ и } \chi_\mu(x_i)\le-\tfrac{n}{n+1} \text{ при } i\ne i_0\Big\}.$$

Для пространства Тихонова X полагаем

$$I_f(X)=I_\beta(X)\cap I_f(\beta X).$$

Для точки $x\in X$ определим множество

$$I_f^x(X)=\left\{\mu=\bigoplus_{i=1}^{n}\chi_\mu(x_i)\odot\delta_{x_i}\in I_f(X)\colon\ x\in\operatorname{supp}\,\mu \text{ и } \chi_\mu(x)=0\right\}.$$

Легко видеть, что для хаусдорфова компактного пространства X выполняются следующие свойства:

a) $I_f^x(X)\cap I_f^y(X)=\varnothing$ тогда и только тогда, когда $x\ne y$ для каждой пары точек $x,\,y\in X$;

b) $I_f(X)=\bigcup\limits_{x\in X}I_f^x(X)$.

Рассмотрим подмножество $M\subset X$ и положим

$$\langle M\rangle=\left\{\mu\in I_f(X)\colon \text{ существует точка } x\in M \text{ такая, что } \mu\in I_f^x(X)\right\}.$$

Предложение 2.1. *Пусть M — непустое подмножество хаусдорфова компактного пространства X. Тогда $I_f^x(X)\subset\langle M\rangle$ тогда и только тогда, когда $x\in M$.*

Предложение 2.2. *Для любых непустых подмножеств M и N хаусдорфова компактного пространства X выполняется $\langle M\rangle\cap\langle N\rangle\ne\varnothing$ тогда и только тогда, когда $M\cap N\ne\varnothing$.*

Теорема 2.1. *Пусть M — непустое подмножество хаусдорфова компактного пространства X. Тогда $\langle M\rangle$ открыто в $I_f(X)$ тогда и только тогда, когда M открыто в X. Аналогично, $\langle M\rangle$ замкнуто в $I_f(X)$ тогда и только тогда, когда M замкнуто в X.*

Легко видеть, что для пространства Тихонова X множество $I_f(X)$ всюду плотно в $I_f(\beta X)$, то есть $I_f(\beta X)$ является компактификацией пространства $I_f(X)$. Сделаем более точное утверждение. Следующая теорема показывает, что функтор $I_\beta\colon \mathfrak{T}ych \to \mathfrak{T}ych$ преобразует попарно непересекающиеся открытые покрытия в попарно непересекающиеся открытые покрытия.

Теорема 2.2. *Для пространства Тихонова X пространство $I_f(\beta X)$ является совершенной компактификацией пространства $I_f(X)$.*

Лемма 2.1. *Пусть υ — открытое покрытие пространства Тихонова X с $K_p\upsilon = 1$. Тогда семейство*

$$I_\beta(\upsilon) = \{\langle U\rangle\colon\ U \in \upsilon\}$$

является открытым покрытием пространства $I_\beta(X)$ с $K_p(I_\beta(\upsilon)) = 1$.

Таким образом, получаем следующий замечательный результат.

Теорема 2.3. *[13] Для пространства Тихонова X его гиперпространство $I_\beta(X)$ является Π-полным тогда и только тогда, когда X является Π-полным.*

3. Π-полнота отображения $I(f)$

Для отображения $f\colon\ X \to Y$ и подмножества $H \subset Y$ прообраз $f^{-1}H$ называется *трубкой* (над H).

Напомним, что непрерывное отображение $f : X \to Y$ называется [2] T_0-отображением, если для каждой пары различных точек $x, x' \in X$, таких что $f(x) = f(x')$, по крайней мере одна из этих точек имеет в X открытую окрестность, не содержащую другую точку.

Непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ называется *вполне регулярным*, если для каждой точки $x \in X$ и любого замкнутого множества $F \subset X$, не содержащего точку x, существует открытая окрестность O точки $f(x)$ такая, что в трубе $f^{-1}O$ множества $\{x\}$ и F функционально разделимы. Вполне регулярное T_0-отображение называется *тихоновским отображением*. .

Очевидно, каждое непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ тихоновского пространства X в топологическое пространство Y является тихоновским отображением. В этом случае для любого тихоновского пространства X, поскольку пространство $I(X)$ с топологией поточечной сходимости является тихоновским пространством, отображение

$$I_\beta(f)\colon I_\beta(X) \to I_\beta(Y)$$

также является тихоновским отображением.

Непрерывное замкнутое отображение $f\colon X \to Y$ называется *компактным*, если прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки $y \in Y$ является компактным. Непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ является компактным тогда и только тогда, когда для каждой точки $y \in Y$ и любого покрытия слоя $f^{-1}(y)$, состоящего из открытых в X множеств, существует открытая окрестность O точки y в Y такая, что трубка $f^{-1}O$ допускает конечное подпокрытие исходного покрытия.

Компактное отображение $bf\colon\ b_fX \to Y$ называется *компактификацией* непрерывного отображения $f\colon\ X \to Y$, если X всюду плотно в b_fX и $b\,f|_X = f$. На множестве всех компактификаций заданного отображения f можно ввести частичный порядок: для компактификаций $b_1f\colon\ b_1X \to Y$ и $b_2f\colon\ b_2X \to Y$ отображения f положим $b_1f \le b_2f$, если существует естественное отображение b_2X на b_1X. Б. А. Пасынков показал, что для каждого отображения Тихонова $f\colon\ X \to Y$ существует его максимальная компактификация $g\colon\ Z \to Y$, которую он обозначил через βf, а пространство Z, в котором определена эта максимальная компактификация, обозначил через $\beta_f(X)$.

Замечание 3.1. Заметим, что отображения $b_1 f$, $b_2 f$, βf являются компактификациями отображения f. Пространства $b_1 X$, $b_2 X$, $\beta_f X$ являются некоторыми расширениями пространства X, но они не обязаны быть компактификациями самого пространства X.

Отображение Тихонова $f\colon X \to Y$ называется П-полным, если для каждой точки $x \in \beta_f X \setminus X$ существует попарно непересекающееся открыто-замкнутое покрытие X, прокалывающее точку x в $\beta_f X$ [5, pp. 120–121].

Рассмотрим следующее понятие.

Определение 3.1 ([14]). Компактификация $b\,f\colon\ b\,X \to Y$ отображения Тихонова $f\colon\ X \to Y$ называется совершенной компактификацией f, если для каждой точки $y \in Y$ и для любых двух непересекающихся открытых множеств U_1 и U_2 в X существует открытая окрестность $O \subset Y$ точки y такая, что выполняется равенство

$$O_{\beta X}(U_1 \cup U_2) \cap (\beta f)^{-1} O \;=\; \big(O_{\beta X}(U_1) \cup O_{\beta X}(U_2)\big) \cap (\beta f)^{-1} O.$$

Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение тихоновского пространства X в пространство Y. Известно, что существует компактификация νX пространства X такая, что отображение f допускает непрерывное продолжение $\nu f\colon \nu X \to Y$. Ясно, что отображение νf является совершенной компактификацией отображения f.

Следующий результат является аналогом теоремы 1.1 для случая отображений.

Теорема 3.1. *Пусть $b\,f\colon b_f X \to Y$ — совершенная компактификация отображения Тихонова $f\colon X \to Y$. Отображение f является* П*-полным тогда и только тогда, когда для каждой точки $x \in b_f X \setminus X$ существует попарно непересекающееся открыто-замкнутое покрытие X, прокалывающее точку x в $b_f X$.*

Доказательство. Пусть $\beta f\colon \beta_f X \to Y$ — максимальная компактификация отображения Тихонова $f\colon X \to Y$ (в смысле Пасынкова). Для любой компактификации $bf\colon b_f X \to Y$ отображения f существует единственная непрерывная сюръекция

$$p\colon \beta_f X \longrightarrow b_f X$$

такая, что $p|_X = \mathrm{id}_X$ и $bf \circ p = \beta f$.

Для любого подмножества $A \subset X$ имеет место равенство

$$\overline{A}^{\,b_f X} = p\Big(\overline{A}^{\,\beta_f X}\Big). \tag{3.1}$$

Действительно, отображение p является непрерывной сюръекцией между компактными хаусдорфовыми пространствами, а потому является замкнутым. Следовательно, множество $p(\overline{A}^{\,\beta_f X})$ замкнуто в $b_f X$ и содержит A (так как $p|_X = \mathrm{id}_X$), откуда следует, что

$$\overline{A}^{\,b_f X} \subset p(\overline{A}^{\,\beta_f X}).$$

С другой стороны, пусть $x \in \overline{A}^{\,b_f X}$. Тогда существует сеть $(a_i) \subset A$, сходящаяся к x в пространстве $b_f X$. Рассматривая ту же сеть в $\beta_f X$ (где X плотно), из компактности $\beta_f X$ следует существование сходящейся подсети $(a_{i_j}) \to \tilde{x} \in \beta_f X$. По непрерывности отображения p имеем

$$p(\tilde{x}) = \lim p(a_{i_j}) = \lim a_{i_j} = x,$$

причём $\tilde{x} \in \overline{A}^{\,\beta_f X}$. Следовательно, $x \in p(\overline{A}^{\,\beta_f X})$, что и доказывает равенство (3.1).

Пусть отображение f является П-полным и $x \in b_f X \setminus X$. Выберем точку $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$. Тогда $\tilde{x} \in \beta_f X \setminus X$. По П-полноте отображения f существует дизъюнктное покрытие, состоящее из открыто-замкнутых множеств ω пространства X такое, что

$$\tilde{x} \notin \bigcup [\omega]_{\beta_f X}.$$

Предположим противное, а именно, что $x \in \bigcup[\omega]_{b_f X}$. Тогда $x \in \overline{U}^{b_f X}$ для некоторого $U \in \omega$. В силу равенства (3.1) имеем

$$\overline{U}^{b_f X} = p(\overline{U}^{\beta_f X}),$$

откуда следует существование точки $\tilde{x}' \in \overline{U}^{\beta_f X}$ такой, что $p(\tilde{x}') = x$. В частности, $\tilde{x}' \in p^{-1}(x)$, а значит, $\tilde{x}' \in \bigcup[\omega]_{\beta_f X}$, что противоречит условию $\tilde{x} \notin \bigcup[\omega]_{\beta_f X}$, поскольку прообраз $p^{-1}(x)$ непуст, и приведённое рассуждение показывает, что *каждая* точка из $p^{-1}(x)$ должна избегать $\bigcup[\omega]_{\beta_f X}$ в случае, если x избегает $\bigcup[\omega]_{b_f X}$. Следовательно,

$$x \notin \bigcup[\omega]_{b_f X},$$

то есть покрытие ω прокалывает точку x в пространстве $b_f X$.

Предположим теперь, что для каждой точки $x \in b_f X \setminus X$ существует дизъюнктное клопен-покрытие пространства X, прокалывающее точку x в $b_f X$. Применим это предположение к частному случаю совершенной компактификации $b_f X = \beta_f X$. Тогда для любой точки $x \in \beta_f X \setminus X$ существует дизъюнктное клопен-покрытие пространства X, прокалывающее точку x в $\beta_f X$, что в точности означает, что отображение f является П-полным. □

Следующий результат является вариантом теоремы 2.1 для случая отображений.

Теорема 3.2. *Пусть $g \colon X \to Y$ — отображение Тихонова. Тогда отображение*

$$I_f(\beta g) \colon I_f(\beta_g X) \to I_f(Y)$$

является совершенной компактификацией отображения

$$I_f(g) \colon I_f(X) \to I_f(Y).$$

Доказательство. Пусть $\beta g \colon \beta_g X \to Y$ — максимальная компактификация отображения Тихонова $g \colon X \to Y$. Тогда пространство $\beta_g X$ компактно и хаусдорфово, следовательно, $I_f(\beta_g X)$ также является компактным хаусдорфовым пространством. Поскольку X плотно в $\beta_g X$ и

$$I_f(X) = I_\beta(X) \cap I_f(\beta X),$$

отсюда следует, что $I_f(X)$ плотно в $I_f(\beta_g X)$. По функториальности имеем

$$I_f(\beta g)|_{I_f(X)} = I_f(g),$$

следовательно, отображение $I_f(\beta g) \colon I_f(\beta_g X) \to I_f(Y)$ является компактификацией отображения $I_f(g)$.

Покажем, что эта компактификация является *совершенной*. Пусть $\nu \in I_f(Y)$ и пусть $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \subset I_f(X)$ — непересекающиеся открытые множества. Выберем точки $\mu_i \in \mathcal{U}_i$ $(i = 1, 2)$. Тогда $\mu_i \in I_f^{x_i}(X)$ для некоторых $x_i \in X$ таких, что $\chi_{\mu_i}(x_i) = 0$. Так как $\mathcal{U}_i$ открыто, существует открытая окрестность $U_i \subset X$ точки x_i такая, что

$$\mu_i \in \langle U_i \rangle \subset \mathcal{U}_i.$$

По Предложению 2.2 из непересекаемости $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ следует, что $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.

Пусть теперь $\nu \in I_f^{y_0}(Y)$, где $y_0 \in \operatorname{supp} \nu$ и $\chi_\nu(y_0) = 0$. Так как βg является совершенной компактификацией отображения g, существует открытая окрестность $V \subset Y$ точки y_0 такая, что

$$O_{\beta_g X}(U_1 \cup U_2) \cap (\beta g)^{-1}(V) = \big(O_{\beta_g X}(U_1) \cup O_{\beta_g X}(U_2)\big) \cap (\beta g)^{-1}(V). \tag{3.2}$$

Переведём тождество (3.2) на уровень функтора I_f.

Утверждение 3.1. Для любого открытого множества $W \subset Y$ имеет место равенство

$$\big(I_f(\beta g)\big)^{-1}\langle W\rangle = \langle(\beta g)^{-1}(W)\rangle.$$

Действительно, $I_f(\beta g)(\mu) \in \langle W\rangle$ тогда и только тогда, когда существует точка $x \in \operatorname{supp}\mu$ такая, что $\chi_\mu(x) = 0$ и $\beta g(x) \in W$, что эквивалентно условию $\mu \in \langle(\beta g)^{-1}(W)\rangle$.

Утверждение 3.2. Для любого открытого множества $U \subset X$ максимальным открытым подмножеством пространства $I_f(\beta_g X)$, пересечение которого с $I_f(X)$ совпадает с $\langle U\rangle$, является множество $\langle O_{\beta_g X}(U)\rangle$.

В самом деле, по Теореме 2.1 множество $\langle O_{\beta_g X}(U)\rangle$ открыто в $I_f(\beta_g X)$ и

$$\langle O_{\beta_g X}(U)\rangle \cap I_f(X) = \langle O_{\beta_g X}(U) \cap X\rangle = \langle U\rangle.$$

Максимальность следует из максимальности $O_{\beta_g X}(U)$ и монотонности отображения $M \mapsto \langle M\rangle$.

Используя Утверждение 3.2, из тождества совершенности (3.2) получаем

$$O_{I_f(\beta_g X)}(\langle U_1 \cup U_2\rangle) \cap \langle(\beta g)^{-1}(V)\rangle = \big(O_{I_f(\beta_g X)}(\langle U_1\rangle) \cup O_{I_f(\beta_g X)}(\langle U_2\rangle)\big) \cap \langle(\beta g)^{-1}(V)\rangle.$$

Наконец, по Утверждению 1 имеем

$$\langle(\beta g)^{-1}(V)\rangle = \big(I_f(\beta g)\big)^{-1}\langle V\rangle,$$

а множество $\langle V\rangle$ является открытой окрестностью точки ν в пространстве $I_f(Y)$. Следовательно, отображение $I_f(\beta g)$ является совершенной компактификацией отображения $I_f(g)$.

□

Следующее утверждение является основным результатом данного раздела.

Теорема 3.3. *Отображение Тихонова $I_f(g)\colon\ I_f(X) \to I_f(Y)$ является Π-полным тогда и только тогда, когда отображение $g\colon\ X \to Y$ является Π-полным.*

Доказательство. Пусть $I_f(g)\colon\ I_f(X) \to I_f(Y)$ является Π-полным отображением. Из этого следует, что $g\colon\ X \to Y$ является Π-полным отображением, так как $X = \{\{x\}\colon\ x \in X\} \subset I_f(X)$ является замкнутым подмножеством.

Теперь пусть $g\colon\ X \to Y$ — Π-полное отображение. Рассмотрим произвольную точку $\mu \in I_f(\beta_g X) \setminus I_f(X)$ и, используя теоремы 3.1 и 3.2, покажем, что существует попарно непересекающееся открыто-замкнутое покрытие пространства $I_f(X)$, прокалывающее точку μ в $I_f(\beta_g X)$.

По определению, для каждой точки $x \in \operatorname{supp}\mu \setminus X \subset \beta_f X \setminus X$ существует попарно непересекающееся открыто-замкнутое покрытие ω_x пространства X, прокалывающее точку x в $\beta_f X$. Зафиксируем точку $x_0 \in \operatorname{supp}\mu \setminus X$. Тогда $x_0 \notin \bigcup[\omega_{x_0}]_{\beta_f X}$ в $\beta_f X$. Следовательно,

$$\operatorname{supp}\mu \not\subset [U]_{\beta_f X}, \quad \text{для любого } U \in \omega_{x_0}.$$

Отсюда получаем

$$\mu \notin [\langle U\rangle]_{I_f(\beta_g X)}, \quad \text{для каждого } \ U \in \omega_{x_0}.$$

В силу (2.1), применяя лемму 2.1 ещё раз, заключаем, что семейство $I_f(\omega_{x_0})$ является попарно непересекающимся открыто-замкнутым покрытием пространства $I_f(X)$, прокалывающим рассматриваемую точку μ в $I_f(\beta_g X)$. □

Следствие 3.1. *Функтор I поднимается на категорию Π-полных пространств и их непрерывных отображений.*

4. Заключение

В настоящей работе исследованы вопросы сохранения и отражения свойств П-полноты в рамках функториальных конструкций, связанных с пространствами идемпотентных вероятностных мер с конечным носителем. Основное внимание было уделено изучению поведения П-полноты при переходе от тихоновских отображений к индуцированным отображениям в пространствах идемпотентных вероятностных мер.

Главным результатом статьи является установление эквивалентности между П-полнотой тихоновского отображения $g\colon X \to Y$ и П-полнотой индуцированного отображения $I_f(g)\colon I_f(X) \to I_f(Y)$. Полученный критерий носит двусторонний характер и показывает, что функтор I_f не только сохраняет, но и отражает П-полноту отображений. Тем самым существенно расширяются ранее известные результаты, касающиеся П-полноты самих пространств и действия подфунктора I_β.

В заключение отметим, что доказанные утверждения открывают возможности для дальнейшего изучения функториальных свойств пространств идемпотентных вероятностных мер, а также для исследования других типов полноты и компактностных свойств в аналогичных функториальных конструкциях.

Благодарность

Автор выражает искреннюю благодарность А. А. Заитову за постоянную поддержку, ценные обсуждения, полезные замечания и научное руководство, оказанные в процессе подготовки настоящей работы.

Список литературы

[1] Akian, M.: *Densities of idempotent measures and large deviations*. Transactions of the American Mathematical Society. **351**(11), 4515–4543 (1999).
[2] Arkhangel'skii, A.V., Ponomarev, V.I.: *Fundamentals of General Topology: Problems and Exercises*. D. Reidel Publishing Company. Dordrecht (1983).
[3] Fedorchuk, V.V., Filippov, V.V.: *General Topology. Basic Structures*. Fizmatlit. Moscow (2006).
[4] Buhagiar, D., Miwa, T.: *On superparacompact and Lindelöf GO spaces*. Houston Journal of Mathematics. **24**(3), 443–457 (1998).
[5] Musayev, D.K., Pasynkov, B.A.: *On compactness and completeness properties of topological spaces and continuous maps*. Fan. Tashkent (1994). (in Russian)
[6] Zarichnyi, M.: *Spaces and maps of idempotent measures*. Izvestiya: Mathematics. **74**(3), 481–499 (2010).
[7] Chigogidze, A.Ch.: *Extension of normal functors*. Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya Matematika i Mekhanika. (6), 23–26 (1984).
[8] Fedorchuk, V.V.: *Functors in topology*. Russian Mathematical Surveys. **46**(3), 1–40 (1991). https://doi.org/10.1070/RM1991v046n03ABEH002737
[9] Ishmetov, A.Ya.: *On the functor of idempotent probability measures with compact support*. Uzbek Mathematical Journal. (1), 72–80 (2010).
[10] Radul, T.: *Idempotent Measures: Absolute Retracts and Soft Maps*. Preprint arXiv:1810.09140v1 (2018).
[11] Zaitov, A.A.: *Geometrical and topological properties of a subspace $P_f(X)$ of probability measures*. Russian Mathematics (Izvestiya VUZ). **63**(10), 24–32 (2019).
[12] Zaitov, A.A.: *On a metric on the space of idempotent probability measures*. Applied General Topology. **21**(1), 35–51 (2020).
[13] Ayupov, Sh.A., Zaitov, A.A., Eshtemirova, Sh.H.: П-*completeness of the space of idempotent probability measures*. Uzbek Mathematical Journal. **69**(1), 37–48 (2025).
[14] Zaitov, A.A., Jumaev, D.I.: *Hyperspaces of superparacompact spaces and continuous maps*. Universal Journal of Mathematics and Applications. **2**(2), 8 pp. (2019). https://arxiv.org/abs/1811.05347.

Idempotent probability measures spaces on Π-complete spaces and maps

Sh.Kh. Eshtemirova

Abstract

In this paper we study the behavior of Π-completeness for Tychonoff maps under the functor of idempotent probability measures with finite support. We prove that a Tychonoff map is Π-complete if and only if the induced map between the corresponding spaces of idempotent probability measures is Π-complete. As a consequence, the functor of idempotent probability measures with finite support both preserves and reflects Π-completeness for maps. This provides a convenient criterion for verifying Π-completeness via induced mappings and supports the transfer of completeness-type properties to functorially constructed spaces. The obtained result yields a lifting of the functor to the category whose objects are Π-complete spaces and whose morphisms are Π-complete maps.

Keywords

Idempotent probability measures, finite support, spaces of idempotent probability measures, induced mappings, star-finite open cover, finite-component cover, perfect compactification, Stone–Čech compactification.

Affiliations

Eshtemirova Shaxnoza Haqqul qizi

Address: V. I. Romanovsky Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of Uzbekistan, 9, University Str., 100174, Tashkent, Uzbekistan

e-mail: shaxnoza.eshtemirova@mail.ru

ORCID ID: https://orcid.org/0009-0005-8316-5082