



# Исследование Устойчивости Цилиндрических Оболочек, Связанных с Кольцевой Пластиной

Саъдуллаева Мавжуда, Салимов Шоолим Музаффарович\* и Мавланов Тулкин

## Аннотация

В работе представлены постановка и методы решения динамических задач многосвязных структурно-неоднородных оболочечных конструкций, позволяющие свести задачу расчета широкого класса инженерных конструкций к задачам автоматизированного проектирования. На основе численных экспериментов и многопараметрического анализа системы в целом решен ряд принципиально важных прикладных задач расчета динамических характеристик колебаний (частот, форм, определяющих резонансных амплитуд и коэффициентов затухания) специальных конструкций в зависимости от параметров структурной неоднородности. А также рассмотрены устойчивости цилиндрических оболочек связанных с кольцевой пластиной под действием динамических нагрузок. Предложено методика комплексной оценки деформационных свойств с целью получения наиболее рациональных механических и геометрических характеристик. На основе математического моделирования деформационных и релаксационных процессов.

*Ключевые слова:* конструкция; оболочка; деформация; релаксация; кольцевая пластина; устойчивость; вязкоупругий.

## 1. Введение

Теоретические и экспериментальные основы проявления нелинейных реологических свойств в различных элементах структурно-неоднородных, сложных многосвязных оболочечных конструкций изложены в фундаментальных работах [1–12]. Несмотря на это, оценка напряженно-деформированного состояния оболочечных конструкций с учетом неоднородных, вязкоупругих свойств осуществляется только в рамках линейной вязко упругости. В [13] представлена расчетная модель деформаций основания фундамента, основанная на методе послойного суммирования с учетом компонент девиатора и тензора шаровой деформации, соотношение между которыми различно в разных точках фундамента. Рассматривалось нелинейное объемное деформирование грунта во времени с учетом уплотнения несущего слоя грунта. На основании результатов экспериментов построены локальные закономерности взаимодействия протяженных подземных трубопроводов и фрагментов наружной поверхности подземных сооружений с грунтами нарушенной и ненарушенной структуры [14]. В [15] с использованием нелинейных реологических моделей исследовано напряженное состояние плотины. Возможность использования модели продемонстрирована путем сравнения численных результатов с результатами лабораторных испытаний.

В [16] предложены обобщенные реологические модели ненасыщенных и вод насыщенных грунтов и выведены соответствующие уравнения, используемые для количественной оценки дополнительных остаточных деформаций

и напряжений в грунте. Решена одномерная задача консолидации слоя не полностью вод насыщенного грунта при циклическом изменении внешней нагрузки.

В работе [17] предложены модель и набор определяющих соотношений для реологической модели слабых грунтов. Возможность использования этой модели подтверждена рядом экспериментов по реологической консолидации при различных скоростях нагруженные.

В [18] показана тенденция к увеличению мгновенного модуля деформации с ростом ползучести. Для мягких грунтов предложена нелинейная модель ползучести, в которой затухание ползучести описывалось нелинейной функцией упрочнения и коэффициентом вязкости, а нелинейные кривые ползучести хорошо согласуются с экспериментальными данными. Поведение конкретных конструкций, использующих наследственную теорию вязко упругости, при динамическом нагруженные изучено недостаточно, хотя и широко представлено в литературе [19–20]. Подавляющее число публикаций, посвященных динамическим задачам наследственной теории вязко упругости, посвящено расчету (линейных и геометрически нелинейных) тонкостенных конструкций — балок, пластин и оболочек.

Схема решения динамических задач вязко для тонкостенных конструкций достаточно стандартна. Выбором координатной функции, удовлетворяющей граничным условиям, исходная задача может быть сведена к задаче о колебаниях системы с конечным числом степеней свободы, то есть к системе линейных или нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с одной независимой временной переменной. В качестве координатных функций, как правило, используют тригонометрические или балочные функции. Такой выбор координатных функций ограничивает класс решаемых задач конструкциями простейших конфигураций – балками постоянного сечения, прямоугольной пластиной, цилиндрической оболочкой [12]. Авторы этих публикаций, допуская ряд неточностей в выборе координатных функций, пытались повысить точность решения системы интегро-дифференциальных уравнений. Однако для конструкций с реальной геометрией подобрать аналитические координатные функции, удовлетворяющие граничным условиям задачи, невозможно. Приведенный выше обзор известных работ показывает необходимость оценки напряженно-деформированного состояния и динамического поведения структурно-неоднородных оболочечных конструкций грунтовых сооружений с учетом не только реологических свойств оболочечных конструкций, но и особенностей неоднородной структуры и реальной геометрии. В данной работе представлены методы, алгоритм и результаты исследования динамического поведения многосвязных структурно-неоднородных оболочечных конструкций с учетом вязкоупругих свойств материала при различных динамических воздействиях.

Постановка задачи и принятые допущения. В настоящей работе рассматривается осесимметричная многосвязная конструкция, состоящая из цилиндрической оболочки длиной  $L$  и кольцевой пластины, расположенной в средней части. Для решения задачи устойчивости используются следующие допущения и модельные предпосылки:

Модель оболочки:

- используется тонкая цилиндрическая оболочка по теории Тимошенко–Власова;
- деформации предполагаются малыми, материал линейно-упругий;
- радиальная жёсткость кольцевой пластины предполагается значительно большей, что приводит к локальной концентрации моментов и усилий. Принятые допущения:
- осесимметричность конструкции и нагрузки;
- отсутствие начальных несовершенств;
- отсутствие влияния температурных напряжений;
- взаимодействие оболочки и пластины моделируется через упругие условия на линии стыка.

**Основная цель задачи.** Определить критическое внешнее давление, при котором цилиндрическая оболочка или кольцевая пластина теряют устойчивость, а также выявить зоны преобладающего характера потери устойчивости.

## 2. Методы исследования

Многосвязные конструкции, нагруженные внешним давлением на цилиндрические части, исследуются на устойчивость. Цилиндрические оболочки, один из торцов которых жестко защемлен, в обеих конструкциях имеют одну и ту же геометрию

$$\frac{L_1}{R} = \frac{L_2}{R} = 1, \quad R/h_\mu = 400. \quad (2.1)$$

Задача сводится к поиску минимального значения критической нагрузки внешнего давления, которую будем определять по формуле

$$q = \xi q_c, \quad (2.2)$$

где

$$q_c = \frac{\pi\sqrt{6}}{9z} \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \frac{h^2}{R^2}, \quad Z = \frac{L^4\sqrt{(1-\nu^2)}}{\sqrt{Rh}}, \quad (2.3)$$

Прежде чем непосредственно перейти к анализу всей конструкции, рассмотрим поведение отдельных элементов конструкции. Общая длина цилиндрической части конструкции равна  $2L$ , но в силу подкрепления в середине её кольцевой пластиной, которая имеет большую жесткость в радиальном направлении, можно ограничиться рассмотрением только цилиндрической оболочки длиной  $L$ . Остается вопрос о выборе граничных условий в месте стыка кольцевой пластины и цилиндрической части конструкции. В месте стыка кольцевой пластины и цилиндрической оболочки применяются упругие граничные условия, которые в зависимости от жёсткости пластины принимают вид:

Шарнирное опирание

$$\Gamma_6 : w = M_{11} = T_{11} = \vartheta = 0 \quad (2.4)$$

до жесткого защемления

$$\Gamma_1 : w = \theta_1 = u = \vartheta = 0. \quad (2.5)$$

В реальной конструкции стык имеет промежуточную жёсткость, поэтому кривая критических нагрузок располагается между теоретическими пределами, соответствующими (2.4) и (2.5). Это принципиально влияет на вид форм потери устойчивости. Для комбинаций из этих граничных условий на торцах цилиндрической оболочки в широкой области изменения относительной длины  $z$  из работы [2] следует, что зависимости критического параметра  $\xi^*$  при  $z \geq 10$  практически совпадают с пунктирными линиями на рис.1, полученными Н.А.Алфутковым на основе полубезмоментной теории В.З.Власова. С учетом реальной жесткости стыка кривая, описывающая зависимость критического параметра  $\xi^*$  от относительной длины оболочки  $z$ , будет лежать между этими линиями. Поведение кольцевой пластины со свободным внутренним краем от радиального сжатия по внешнему краю слабо изучено, поэтому было проведено исследование устойчивости кольцевой пластины с двумя вариантами граничных условий на внешнем краю

$$\Gamma_2 : w = \theta_1 = T_{11} = \vartheta = 0, \quad (2.6)$$

$$\Gamma_6 : w = M_{11} = T_{11} = \vartheta = 0. \quad (2.7)$$

Величина критического усилия определяется по формуле

$$T = -\zeta^* \cdot \frac{Eh_n}{(1-\nu^2)} \cdot \left(\frac{R}{h_n}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{r_0}{R}\right)^3. \quad (2.8)$$

Зависимости критического параметра  $\zeta^*$  в широкой области изменения внутреннего радиуса для различных значений волн в кольцевом направлении представлены на рис.2.(а). В случае шарнирного закрепления (2.7) минимальное значение критической нагрузки получается при осесимметричной потере устойчивости ( $n = 0$ ), но при  $r_0 \rightarrow R$ , когда пластина может работать как кольцо, возможно иное значение критической нагрузки с

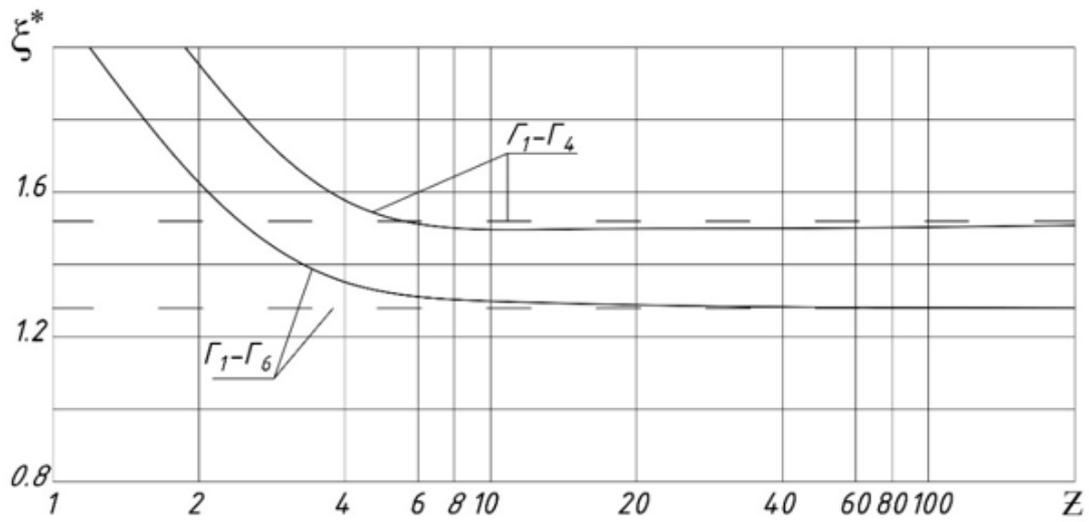


Рис. 1

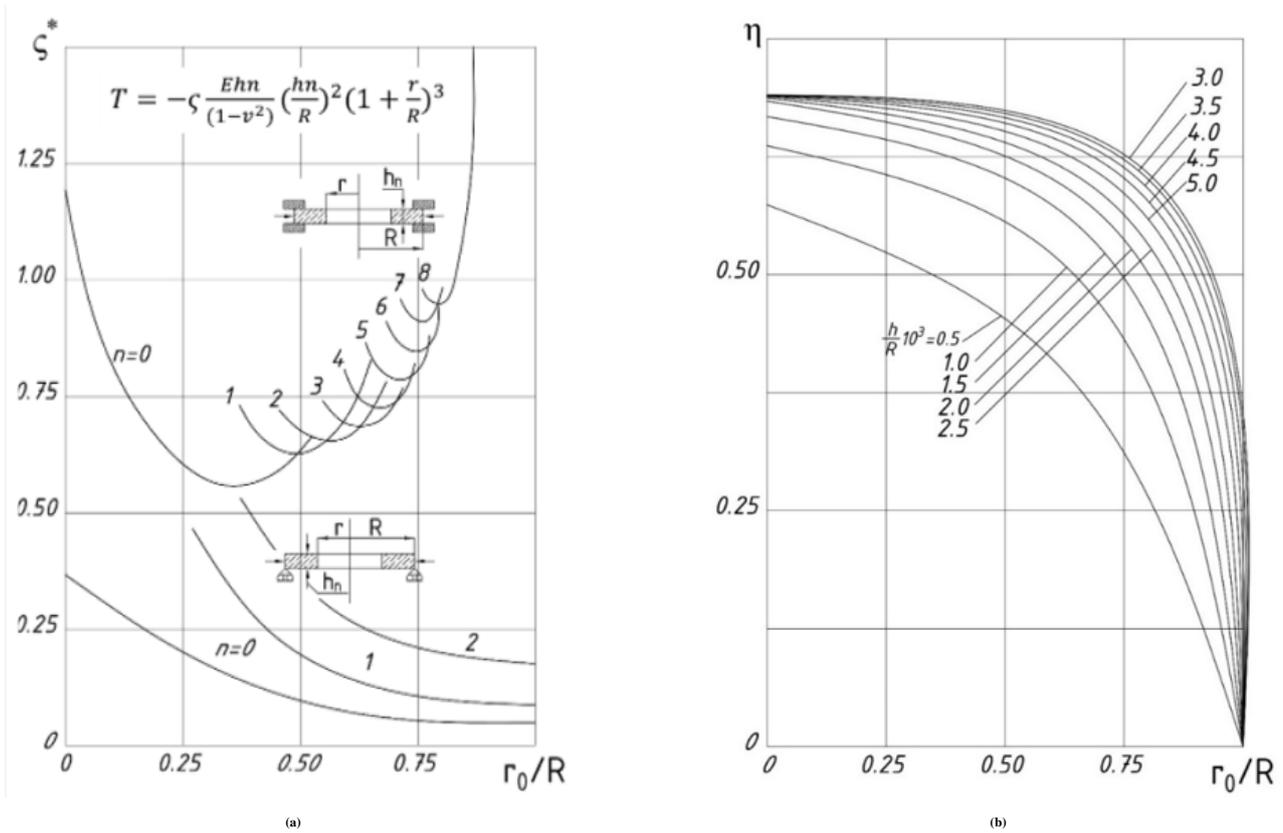


Рис. 2

неосесимметричной формой потери устойчивости ( $n > 0$ ). В этом случае необходимо вычислить критическую нагрузку для пластины по схеме кольца ( $n = 2$ ).

$$T = 2h_n E \cdot \left( \frac{R - r_0}{R + r_0} \right)^3 \tag{2.9}$$

и сравнить с полученными значениями из (2.8). Минимальное значение из них и определит истинную величину расчётного критического усилия. При рассмотрении граничного условия (2.6) величина параметра критической нагрузки значительно увеличивается, причём минимальные значения его наблюдаются как при осесимметричной ( $r_0/R \leq 0.5$ ), так и при неосесимметричной ( $r_0/R > 0.5$ ) потере устойчивости. В случае неосесимметричной потери устойчивости число волн в окружном направлении растёт с увеличением  $r_0/R$ .

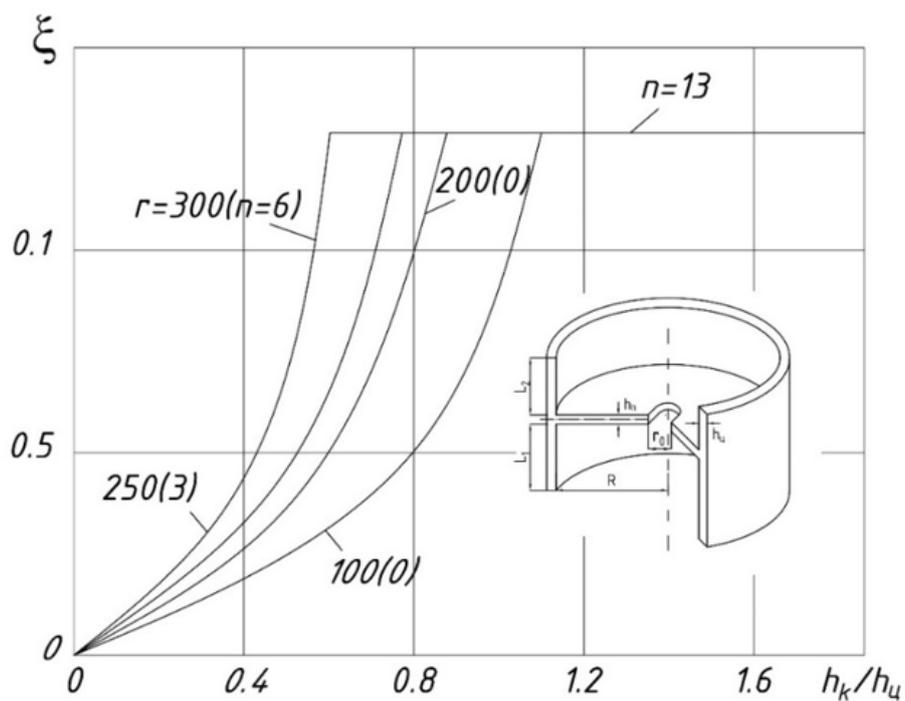


Рис. 3

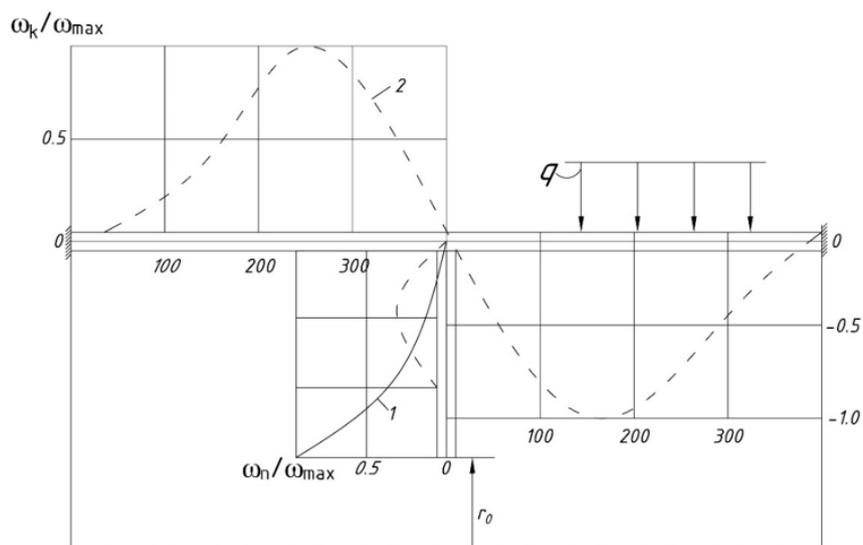


Рис. 4

### 3. Результаты и обсуждения.

В результате исследования устойчивости всей конструкции по разработанному методу получены зависимости  $\xi^*$ , относящиеся к соответствующей геометрии кольцевой пластины (рис.3). На рис.4 приведены формы потери устойчивости элементов конструкции. Форма, отмеченная цифрой 1 на рис.4, показывает, что устойчивость теряет преимущественно пластина. В области геометрии, где в потере устойчивости участвуют явным образом все элементы конструкции (форма 2 на рис.4), величина критической нагрузки практически не изменяется, форма остается постоянной с образованием 13 волн в кольцевом направлении. Области критических значений  $\xi^*$  практически совпадают со значениями этого параметра для цилиндра длиной  $L$ , у которого реализуется граничные условия (2.4) и (2.5). Это подтверждает тот факт, что для исследования устойчивости рассматриваемой многосвязной конструкции можно использовать результаты работы [2], которые представлены на рис.1, совместно с формулой (2.2).

В области параметров конструкции, где преимущественно теряет устойчивость пластина, следует установить какой или какими зависимостями можно ограничиться в исследовании устойчивости конструкции. Для этого выясним в какой связи находятся зависимости критических величин для пластины (2.8) и (2.9) с критическим давлением для всей конструкции. Определим из решения задачи прочности усилия приходящееся на внешний край пластины в зависимости от внешнего давления  $q$  для различной геометрии пластины. В результате проведения расчётов на рис.2.(b). приведены зависимости параметра  $\eta$ , через который определяется действующее на пластину усилие

$$T = \eta q R \quad (3.1)$$

Теперь из рассмотрения конкретного критического давления, для которого из выражений (2.8) и (2.9) с учетом (3.1) определяются критические значения усилия для пластины, следует, что значение критического усилия совпадает с критическим усилием для пластины с граничными условиями (2.6) на внешнем крае и определяется по формуле (2.8). Иными словами, цилиндрические оболочки при потере устойчивости пластины не позволяют ей изгибаться на внешнем крае.

Таким образом, для анализа многосвязной осесимметричной конструкции (рис.3) достаточно иметь зависимости параметров  $\xi^*$ ,  $\zeta^*$  и  $\eta$  от геометрии конструкции (рис.1, 2) и выражения (2.2), (2.8) и (3.1). Минимальное значение нагрузки для всей конструкции будет меньше из двух давлений, соответствующих критическому внешнему давлению для цилиндра длиной  $L$  с граничными условиями (2.4) и (2.5), которое определяется по формуле (2.2) с учетом зависимости  $\xi^*$  на рис.1, или внешнему давлению, вызывающему потерю устойчивости пластины и обделяемому, согласно (2.8), выражением

$$q = -\zeta^* \eta^{-1} \cdot \frac{E}{(1 - \nu^2)} \cdot \left(\frac{h_n}{R}\right)^3 \cdot \left(1 + \frac{r_0}{R}\right)^3, \quad (3.2)$$

где  $\zeta^*$  берется с рис.2.(a). для граничного условия (2.6) на внешнем крае. Форма потери устойчивости конструкции принимает вид кривой 1 или 2 на рис.4 в зависимости от того какая часть конструкции преимущественно теряет устойчивость.

### 4. Выводы.

Основные выводы по результатам моделирования:

- Основная опасная форма потери устойчивости кольцевой пластины - осесимметричная, однако при большом внутреннем радиусе возможно преобладание неосесимметричных форм.
- Цилиндрическая часть конструкции теряет устойчивость при значениях, хорошо согласующихся с классическими зависимостями Власова–Алфурова.

- В переходных областях, где в потере устойчивости одновременно участвуют все элементы, форма имеет 13 волн, что важно для инженерной диагностики.
- Установлено, что цилиндрическая оболочка не позволяет изгибу внешнего края кольцевой пластины — это объясняет преобладание условий типа (2.6) в расчётах.

Таким образом, получены соотношения и зависимости, которые могут быть использованы при анализе и проектировании подобных конструкций в довольно широкой области изменения геометрических параметров конструкции. Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что предложенные теоретические предпосылки с достаточной точностью моделируют динамику реальных объектов. Разработанные методика, алгоритм и программа расчета обеспечивают получение решения задачи с необходимой точностью.

## Список литературы

- [1] Urzhumtsev Yu.S., Mayboroda V.P.: *Technical means and methods for determining the strength characteristics of polymer structures*. M.: Engineering, 1984, 168 p.
- [2] Kravchuk A.S., Mayboroda V.P., Urzhumtsev Yu.S.: *Mechanics of Polymer and Composite Materials*. Moscow (M): Nauka, 1985, 300 p.
- [3] Filatov A.N.: *Asymptotic methods in the theory of differential and integro-differential equations*. Tashkent: FAN, 1974, 216 p.
- [4] Koltunov M.A., Maiboroda V.P., Kravchuk A.S.: *Applied mechanics of a deformable rigid body*. M.: Higher School, 1983, 350 p.
- [5] Koltunov M.A.: *Creep and relaxation*. M.: Higher School, 1976, 277 p.
- [6] Ilyushin A.A., Pobedrya B.E.: *Fundamentals of the mathematical theory of thermo-viscoelasticity*. Moscow: Nauka, 1970, 280 p.
- [7] Koltunov M.A., Mayboroda V.P., Zubchaninov V.G.: *Strength calculations of products from polymeric materials*. M.: Engineering, 1983, 239 p.
- [8] Blend D.: *Theory of linear viscoelasticity*. M.: Mir, 1974, 338 p.
- [9] Rzhantsyn A.R.: *Creep theory*. M.: Stroyizdat, 1968, 416 p.
- [10] Grigorenko Ya.M., Vasilenko A.T.: *Methods for shell calculation. Vol. 4, Theory of shells of variable rigidity*. Kiev: Naukova Dumka, 1981, 543 p.
- [11] Karmishin A.V., Lyaskovets V.A., Myachenkov V.I., Frolov A.N.: *Statics and dynamics of thin-walled shell structures*. M.: Mechanical Engineering, 1975, 376 p.
- [12] Myachenkov V.I., Maltsev V.P.: *Methods and algorithms for the calculation of spatial structures at computer*. M.: Mechanical Engineering, 1984, 278 p.
- [13] Mirsaidov M.: *Theory and methods for calculating earth structures for strength and rigidity*. Tashkent: FAN, 2010, 312 p.
- [14] Mirsaidov M., Godovannikov A.M.: *Earthquake Resistance of Structures*. Tashkent: Uzbekistan, 2008, 220 p.
- [15] Sultanov K.S.: *Wave theory of earthquake resistance of underground structures*. Tashkent, 2016, 250 p.
- [16] Sh. Salimov: *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.* **883**, 012191 (2020).
- [17] Sh. Salimov et al.: *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.* **883**, 012192 (2020).
- [18] Sh. M. Salimov, T. Mavlanov: *IOP Conf. Ser.: Earth Environ. Sci.* **614**, 012057 (2020).
- [19] Sh. M. Salimov et al.: "Solutions of vibration problems of structural-inhomogeneous shell structures by the Müller's method", *AIP Conference Proceedings* **2612**, 020003 (2023). <https://doi.org/10.1063/5.0124322>
- [20] Khudainazarov S. et al.: *E3S Web of Conferences* **365**, 03040 (2023). <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202336503040>

## Study of Stability of Cylindrical Shells Connected to an Annular Plate

Sadullaeva Mavjuda, Salimov Shoolim Muzaffarovich, Mavlonov Tolkin

### Abstract

The paper presents the statement and methods for solving dynamic problems of multiply connected structurally inhomogeneous shell structures, which make it possible to reduce the problem of calculating a wide class of engineering structures to computer-aided design tasks. On the basis of numerical experiments and multi-parameter analysis of the system as a whole, a number of fundamentally important applied problems have been solved for calculating the dynamic characteristics of oscillations (frequencies, modes, determinant resonant amplitudes and damping coefficients) of special structures depending on the parameters of structural inhomogeneity. The stabilities of cylindrical shells connected to an annular plate under the action of dynamic loads are also considered. A methodics for comprehensive assessment of deformation properties is proposed in order to obtain the most rational mechanical and geometric characteristics based on mathematical modeling of deformation and relaxation processes.

### Keywords

construction; shell; deformation; relaxation; annular plate; stability; viscoelastic.

### Affiliations

Sadullaeva Mavjuda Ziyadullaevna

**Address:** Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan.

**e-mail:** mavjuda1975m@mail.ru

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0002-6999-3472>

Salimov Shoolim Muzaffarovich

**Address:** Associate Professor, Tashkent University of Applied Sciences, Tashkent, Uzbekistan.

**e-mail:** salimovshoolim@yahoo.com

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0003-0750-8619>

Mavlanov Tulkin

**Address:** Professor, Doctor of Technical Sciences, Scientific Research Institute of Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural Mechanization Engineers, Tashkent, Uzbekistan.

**e-mail:** teormechanics@yandex.com

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0002-4349-5715>