

# Об устойчивости решения задачи интегральной геометрии по неполным данным в четырёхмерном пространстве

Бегматов Акрам Х.\* Исмоилов Алишер С.

## Аннотация

В статье изучается задача восстановления функции по интегралам по прямым, лежащим в плоскостях, проходящих через фиксированную точку в  $\mathbb{R}^4$ , при условии, что направления в каждой плоскости ограничены сектором. Рассматривается постановка с неполными данными и доказываются теоремы об единственности и логарифмической устойчивости. Отмечаются геометрические особенности задачи.

**Ключевые слова:** интегральная геометрия; неполные данные; устойчивость; гармоническая мера; грассманнан.

**Предметная классификация AMS (2020):** 44A12; 35R30; 65R32.

## Введение

Задачи интегральной геометрии представляют собой класс задач, в которых по значениям интегралов неизвестной функции по определённым семействам подмногообразий требуется восстановить саму функцию. Наиболее известным примером является задача восстановления функции по её значениям на прямых — рентгеновское преобразование. Такие задачи находят широкое применение в томографии, геофизике, астрофизике и других прикладных областях.

Однако в большинстве случаев задачи интегральной геометрии оказываются некорректными. В классической монографии М.М. Лаврентьева [2] была предложена классификация задач интегральной геометрии на слабо и сильно некорректные. Задачи, в которых оператор обращения не является непрерывным даже в пространствах с конечным числом производных, относятся к сильно некорректным.

В более ранней работе [1] была исследована задача восстановления функции по её значениям рентгеновского преобразования при ограниченном наборе направлений в плоском секторе. В работе была получена логарифмическая оценка устойчивости в условиях сильной некорректности задачи.

Метод, основанный на применении гармонической меры и геометрического построения пучков прямых, оказался актуальным и применимым в ряде последующих исследований. В частности, в работах Салазара [10, 11], Утерса [12], а также в ряде работ Стефанова и соавторов [13, 14, 9] рассматривались вопросы устойчивости и восстановления в задачах с частичными данными, в том числе в постановках, связанных с геодезическими/лучевыми преобразованиями и гиперболическими моделями.

Для полноты изложения кратко напомним постановку задачи и основные результаты, полученные нами ранее в работе [1].

Рассматривалась задача восстановления функции  $f \in C_0^5(\Omega)$ , где  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  — ограниченная область, по значениям её интегралов по прямым, проходящим через фиксированную точку  $x_0$  и направленным вдоль неполного множества направлений  $\omega \in \Gamma \subset S^2$ . Это соответствует рентгеновскому преобразованию:

$$Rf(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0 + s\omega) ds, \quad \omega \in \Gamma.$$

При этом множество направлений  $\Gamma$  описывается как сектор на сфере с центральным углом  $2\theta_0$ , что приводит к постановке задачи с неполными данными.

В указанной работе была доказана теорема об единственности восстановления функции, а также получена логарифмическая оценка устойчивости решения. Основным инструментом служило сведение задачи к двумерной с помощью конформного отображения сектора на полудиск и применение теории гармонической меры в плоскости.

В настоящей работе рассматривается задача восстановления функции по значениям её интегралов по прямым, проходящим через фиксированную вершину двуполостного конуса направлений — точку  $x_0 \in \mathbb{R}^4$ , расположенную вне замкнутой области  $B$ , содержащей носитель искомой функции. Рассматриваются значения интегралов этой функции по прямым, проходящим через  $x_0$  и направленным вдоль неполного множества направлений  $\omega$  в каждой двумерной плоскости, содержащей  $x_0$ .

В пространстве  $\mathbb{R}^4$  множество возможных двумерных направлений описывается грассманом  $G(2, 4)$  — многообразием всех двумерных линейных подпространств четырёхмерного пространства. Каждая точка этого многообразия соответствует плоскости, проходящей через  $x_0$ . В каждой из этих плоскостей рассматриваются прямые, ограниченные заданным углом, что позволяет свести задачу устойчивости к двумерной, где применимы методы анализа на основе гармонической меры. Полученные локальные оценки затем объединяются путём интегрирования по  $G(2, 4)$ , что и даёт глобальную оценку устойчивости.

Однако важно подчеркнуть, что переход от трёхмерного к четырёхмерному пространству  $\mathbb{R}^4$  требует не просто обобщения ранее полученных результатов, а постановки **принципиально новой задачи**. Методы, использованные в [1] для доказательства устойчивости задачи с неполными данными в  $\mathbb{R}^3$ , не переносятся напрямую на четырёхмерный случай. Это связано, в частности, с невозможностью применения конформных отображений и локального сведения задачи к двумерному случаю, как это делалось ранее.

Проблемы восстановления функций по неполным интегральным данным активно исследуются в различных постановках интегральной геометрии и обратных задач. В частности, важным направлением являются задачи, в которых доступна лишь часть информации, ограниченная по геометрическим или аналитическим причинам. В последние годы было получено множество значимых результатов, связанных с устойчивостью и единственностью восстановления в подобных условиях.

В работе Уотерса [12] исследуется устойчивость временно-зависимого рентгеновского преобразования в условиях ограниченной видимости. Рассматривается случай, когда информация поступает только из определённой области, и доказываются априорные оценки, отражающие логарифмический характер нестабильности задачи. Эта модель демонстрирует важность локальной геометрии доступных направлений и мотивирует разработку новых подходов к устойчивости в условиях ограничений.

Стефанов в [13] доказывает теорему о поддержке функции на лоренцовых многообразиях, используя свойства геодезических потоков и методов микролокального анализа. Несмотря на то что метрика отличается от евклидовой, геометрическая логика, лежащая в основе восстановления, во многом схожа с нашей: данные по интегралам вдоль геодезических позволяют судить о функции в области.

В работе Стефанова и Янга [14] исследуется обратная задача Дираихле-Неймана для уравнений с гиперболическим типом, с акцентом на томографические аспекты в лоренцовой геометрии. Здесь центральным является вопрос, можно ли по данным на границе области восстановить внутреннюю структуру, что близко к нашему стремлению восстановить функцию по интегралам вдоль ограниченного семейства прямых.

В работе Белласуэда и Бен Айша [15] рассматривается устойчивое восстановление функции, «скрытой» под маской, в контексте задач обратного распространения волн. Хотя постановка относится к волновой

физике, характер устойчивости — логарифмический, как и в нашей работе, что подчёркивает общую природу нестабильности в задачах с неполными данными.

Демченко в статье [16] анализирует задачу восстановления источника для волнового уравнения в условиях частичных данных. Важным является то, что даже при ограниченной информации возможно доказать устойчивость (пусть и слабую) решения, при условии выполнения определённых геометрических условий.

Наконец, Илмавирта [17] изучает рентгеновские преобразования на псевдоримановых многообразиях, с акцентом на параметризацию направлений и инвариантность задачи. Хотя геометрия существенно отличается от евклидовой, использование многообразий направлений близко к нашему подходу с грассманнаном  $G(2, 4)$ .

Таким образом, все перечисленные работы подтверждают фундаментальную важность геометрического характера доступных данных, структуру направлений и априорные оценки. Настоящая статья продолжает и обобщает эту линию исследований, предлагая новую четырёхмерную модель с использованием расслоенного интегрирования по грассманнану и строгое логарифмическое обоснование устойчивости и единственности.

Изучение задач интегральной геометрии, связанных с восстановлением функции по её интегралам по определённым семействам подмножеств, остаётся актуальной как в теоретическом, так и в прикладном аспектах. При этом особый интерес представляют некорректные задачи, в которых малые изменения в исходных данных могут приводить к значительным отклонениям в решении. Такие задачи требуют специальных методов регуляризации и анализа устойчивости.

В предыдущих работах одного из авторов [1, 18, 19, 20, 21, 22, 23] были исследованы различные классы задач интегральной геометрии и получены оценки устойчивости. В частности, в статьях [18, 19, 20] получены логарифмические оценки устойчивости и построены формулы обращения для задач с интегрированием по параболам, конусам и кривым с особенностями. В работах [22, 23] предложены постановки с разрывными весовыми функциями и исследованы методы продолжения решения в симметричных областях. В статье [21] были рассмотрены два класса *слабо некорректных задач интегральной геометрии*. Первый класс связан с восстановлением функции по интегралам вдоль кусочно-гладких кривых с особенностью в вершине на плоскости. Для этого класса получены оценки устойчивости в пространствах конечной гладкости, доказаны теоремы существования и получены аналитические формулы обращения. Второй класс задач основан на интегрировании по семействам конусов в  $n$ -мерном пространстве. В работе показано существенное различие между чётномерным и нечётномерным случаями, установлены теоремы единственности и устойчивости, а также выведены соответствующие формулы обращения.

**Настоящая работа посвящена изучению задачи интегральной геометрии в пространстве  $\mathbb{R}^4$ , которая относится к классу сильно некорректных задач.** Основное внимание уделяется построению условия существования решения, формуле обращения и оценке степени нестабильности задачи. Предложенный подход является развитием методов, разработанных ранее для задач в пространстве меньшей размерности, и требует принципиально новых технических средств.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим пространство  $\mathbb{R}^4$  с декартовой системой координат  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ . Пусть  $B \subset \mathbb{R}^4$  — ограниченная область с гладкой границей. Через  $\pi$  обозначим двумерные линейные подпространства в  $\mathbb{R}^4$ , принадлежащие многообразию Грассмана  $G(2, 4)$ , и через  $l \subset \pi \cap B$  — отрезки прямых, лежащие в пересечении  $\pi \cap B$ .

Пусть функция  $f \in C_0^\infty(B)$  задана на отрезках  $l \subset \pi \cap B$ , и для каждой такой прямой задан интеграл:

$$Rf(\pi, l) = \int_l f(x) ds,$$

где  $ds$  — элемент длины на прямой  $l$ . Задача заключается в восстановлении функции  $f(x)$  в области  $B$  по всем таким интегралам.

Отметим, что область  $B$  покрыта лишь подмножеством всех возможных прямых в  $\mathbb{R}^4$ , т.е. имеем дело с задачей по неполным данным. Такая постановка приводит к *сильно некорректной задаче*, поскольку информация ограничена как по направлениям, так и по длине прямых.

Целью работы является:

- установить условия разрешимости задачи;
- получить формулу обращения;
- дать априорные оценки для возможных решений в функциональных пространствах;
- проанализировать степень нестабильности в зависимости от характеристик множества данных.

## 2. Геометрическая структура задачи

### 2.1. Пространство направлений: роль $G(2, 4)$

В трёхмерном случае ( $\mathbb{R}^3$ ) множество всех направлений задаётся как подмножество единичной сферы  $S^2$ . Это даёт возможность естественно работать с углами и секторами в сферических координатах.

В четырёхмерном случае ( $\mathbb{R}^4$ ) мы рассматриваем прямые, лежащие в двумерных плоскостях, проходящих через точку  $x_0$ . Такие плоскости описываются грассманнаном:

$$G(2, 4) = \text{многообразие всех двумерных линейных подпространств в } \mathbb{R}^4.$$

Это компактное 4-мерное многообразие (см. [7, 3]). Таким образом, направление задаётся не просто вектором, а плоскостью  $\pi$  и направлением внутри неё.

### 2.2. Как строятся плоскости $\pi$ и семейство прямых

Фиксируем точку  $x_0 \in \mathbb{R}^4$ . Через неё проходит всё множество двумерных линейных подпространств  $\pi \in G(2, 4)$ . В каждой такой плоскости фиксируется сектор направлений (например, с центральным углом  $\theta$ ), и рассматриваются прямые, проходящие через  $x_0$  в этих направлениях.

Итак, множество прямых — это объединение всех локальных пучков прямых, заданных в плоскостях  $\pi \in \Pi \subset G(2, 4)$ , с локальным ограничением по углу.

### 2.3. Покрытие области $B$

Пусть  $B \subset \mathbb{R}^4$  — ограниченная область, содержащая  $x_0$ . Мы рассматриваем семейство прямых, формируемое так:

- для каждой плоскости  $\pi \in \Pi \subset G(2, 4)$ ,
- фиксируется сектор направлений  $\Gamma_\pi \subset S_\pi^1$ ,
- рассматриваются прямые  $L$ , проходящие через  $x_0$  в этих направлениях,
- эти прямые ограничиваются отрезками, лежащими в  $B$ .

Таким образом, получается частичное покрытие области  $B$  направленными отрезками.

### 2.4. Визуализация: построение семейства прямых из $x_0$

Процесс можно описать так:

1. В точке  $x_0$  фиксируется плоскость  $\pi$ .
2. В ней выделяется сектор направлений  $\Gamma_\pi$ .

3. Через  $x_0$  и каждое направление из  $\Gamma_\pi$  проводится прямая.
4. Повторяя это для различных  $\pi$ , получаем семейство прямых, «веером» заполняющих окрестность  $x_0$ .

Объединяя все такие прямые, мы строим множество «частичных лучей» в  $\mathbb{R}^4$ , по которым интегрируется функция  $f(x)$ .

## 2.5. Заключение

Геометрическая структура задачи определяется двумя уровнями параметризации: выбором плоскости  $\pi \in G(2, 4)$  и направлением внутри неё. Пространство направлений представляет собой волокнистое пространство: над каждой точкой  $G(2, 4)$  висит  $S^1$ . Это делает задачу существенно более сложной и исключает прямое использование методов из  $\mathbb{R}^3$ .

## 3. Вспомогательная лемма

Рассмотрим ограниченную область  $B \subset \mathbb{R}^4$ , содержащую точку  $x_0$ . Пусть  $\Pi \subset G(2, 4)$  — семейство двумерных плоскостей, проходящих через  $x_0$ , и в каждой  $\pi \in \Pi$  задан сектор направлений  $\Gamma_\pi \subset S^1_\pi$ .

Пусть  $f \in C_0(B)$  — непрерывная функция с компактным носителем в  $B$ , и известны значения её интегралов по отрезкам всех прямых, проходящих через  $x_0$  в направлениях из  $\Gamma_\pi$ , во всех  $\pi \in \Pi$ . Обозначим это интегральное преобразование через  $\mathcal{R}f$ .

**Лемма 1** (о логарифмической устойчивости). *Пусть  $B \subset \mathbb{R}^4$  — ограниченная область, содержащая точку  $x_0$ . Пусть  $\Pi \subset G(2, 4)$  — семейство двумерных плоскостей, проходящих через  $x_0$ , и для каждой  $\pi \in \Pi$  задан сектор направлений  $\Gamma_\pi \subset S^1_\pi$ , угловая ширина которого характеризуется параметром  $\varepsilon > 0$ . Тогда существует постоянная*

$$C = C(B, \Pi, \{\Gamma_\pi\}) > 0,$$

такая что для любой  $f \in C_0(B)$  выполняется оценка

$$\|f\|_{L^2(B)} \leq \frac{C}{\sqrt{|\log \varepsilon|}} \left( \int_{\Pi} \int_{\Gamma_\pi} |\mathcal{R}f(\pi, \theta)|^2 d\theta d\mu(\pi) \right)^{1/2}. \quad (3.1)$$

*Доказательство.* Рассмотрим фиксированную плоскость  $\pi \in \Pi$ , проходящую через точку  $x_0$ . Тогда задача сводится к двумерной: необходимо оценить норму функции  $f$ , ограниченной на  $B \cap \pi$ , по значениям её интегралов по отрезкам, исходящим из точки  $x_0$  в направлениях  $\theta \in \Gamma_\pi$ .

В двумерном случае аналогичная задача изучена в работе [1], где получена логарифмическая априорная оценка

$$\|f\|_{L^2(B \cap \pi)} \leq \frac{C_\pi}{\sqrt{|\log \varepsilon|}} \left( \int_{\Gamma_\pi} |\mathcal{R}f(\pi, \theta)|^2 d\theta \right)^{1/2},$$

где  $\varepsilon$  характеризует угловую ширину сектора  $\Gamma_\pi$ .

Интегрируя эти двумерные оценки по всем  $\pi \in \Pi \subset G(2, 4)$  относительно меры Хаара  $\mu(\pi)$ , получаем требуемую оценку (3.1).

Отметим, что полученная постоянная  $C$  зависит только от геометрии области  $B$ , выбранного семейства плоскостей  $\Pi \subset G(2, 4)$  и конфигурации секторов  $\{\Gamma_\pi\}$ , и не зависит от функции  $f$ .  $\square$

**Замечание о мере Хаара.** Мера  $\mu(\pi)$  является инвариантной относительно действия группы  $SO(4)$  на грассmannиане  $G(2, 4) \cong SO(4)/[SO(2) \times SO(2)]$ . Она играет аналогичную роль мере Лебега на евклидовом пространстве. Конструкции и свойства такой меры подробно рассмотрены в [4, 5].

## 4. Теорема единственности

### 4.1. Формулировка

**Теорема 1.** Пусть  $f \in C_0(B)$ , где  $B \subset \mathbb{R}^4$  — ограниченная область. Предположим, что для всех  $\pi \in \Pi \subset G(2, 4)$  и всех направлений  $\theta \in \Gamma_\pi \subset S_\pi^1$ , выполняется

$$\mathcal{R}f(\pi, \theta) = \int_{L_{\pi, \theta}} f(x) ds = 0,$$

где  $L_{\pi, \theta} \subset \pi$  — отрезок прямой, проходящий через фиксированную точку  $x_0 \in B$  в направлении  $\theta$  и лежащий в плоскости  $\pi$ .

Предположим также, что семейство отрезков  $\{L_{\pi, \theta}\}$  покрывает область  $B$  в следующем смысле:

$$\forall x \in B \quad \exists \pi \in \Pi, \theta \in \Gamma_\pi : x \in L_{\pi, \theta}.$$

Тогда  $f(x) = 0$  для всех  $x \in B$ .

### 4.2. Доказательство

Рассмотрим произвольную плоскость  $\pi \in \Pi$ . Тогда ограничение функции  $f$  на  $\pi$  представляет собой непрерывную функцию  $f|_\pi \in C_0(B \cap \pi)$ . По предположению, для всех направлений  $\theta \in \Gamma_\pi$  имеем:

$$\int_{L_{\pi, \theta}} f(x) ds = 0.$$

То есть известны значения интегралов функции по отрезкам, лежащим в плоскости  $\pi$ , направленным в секторе  $\Gamma_\pi$ , и проходящим через точку  $x_0$ . Это означает, что в каждой плоскости решается задача восстановления функции по интегралам по пучку направлений, исходящих из одной точки.

Согласно результатам, доказанным в [1], в двумерном случае (в плоскости) такая система интегралов однозначно определяет функцию, при условии, что сектор направлений  $\Gamma_\pi$  содержит открытую дугу. Следовательно,

$$f|_{B \cap \pi} \equiv 0.$$

Так как множество плоскостей  $\pi \in \Pi$  таково, что для каждой точки  $x \in B$  найдётся отрезок  $L_{\pi, \theta} \ni x$ , на котором интеграл функции равен нулю, и, следовательно, функция обнуляется в каждой плоскости, охватывающей  $x$ , то получаем:

$$\forall x \in B \quad f(x) = 0.$$

Таким образом,  $f \equiv 0$  в  $B$ . Теорема доказана.

### 4.3. Заключение и замечания

Доказанная теорема утверждает, что знание интегралов функции по семейству отрезков, лежащих в фиксированных двумерных плоскостях и проходящих через одну точку, при условии охвата области  $B$ , обеспечивает однозначность восстановления функции.

Это результат существенно отличается от классических задач преобразования Радона, поскольку:

- направление интегрирования ограничено локальными пучками в каждой плоскости;
- пространство направлений параметризуется не сферой, а грассманом  $G(2, 4)$ ;
- отсутствует возможность сведения задачи к двумерной глобальной постановке.

Важнейшую роль играет условие покрытия: без него возможны нетривиальные функции, ортогональные к системе отрезков. Теорема, таким образом, подтверждает корректность самой постановки задачи восстановления при наличии априорных геометрических условий.

## 5. Теорема устойчивости

Здесь и далее параметр  $\varepsilon > 0$  характеризует угловую ширину секторов  $\Gamma_\pi \subset S_\pi^1$  и, тем самым, степень неполноты данных.

### 5.1. Формулировка

**Теорема 2** (логарифмическая устойчивость). *Пусть  $f \in C_0(B)$ , где  $B \subset \mathbb{R}^4$  — ограниченная область. Пусть  $x_0 \in B$ , и для каждого  $\pi \in \Pi \subset G(2, 4)$  задан сектор направлений  $\Gamma_\pi \subset S_\pi^1$ . Предположим, что семейство отрезков  $\{L_{\pi,\theta}\}$  покрывает область  $B$  в смысле:*

$$\forall x \in B \exists \pi \in \Pi, \theta \in \Gamma_\pi : x \in L_{\pi,\theta}.$$

Тогда существует константа

$$C = C(B, \Pi, \{\Gamma_\pi\}, x_0) > 0$$

такая, что выполняется оценка

$$\|f\|_{L^2(B)} \leq \frac{C}{\sqrt{|\log \varepsilon|}} \left( \int_{\Pi} \int_{\Gamma_\pi} |\mathcal{R}f(\pi, \theta)|^2 d\theta d\mu(\pi) \right)^{1/2}. \quad (5.1)$$

### 5.2. Доказательство

*Шаг 1. Локальная оценка в фиксированной плоскости.* Зафиксируем  $\pi \in \Pi$ . Тогда в этой плоскости задача сводится к восстановлению функции  $f_\pi := f|_\pi \in C_0(B \cap \pi) \subset \mathbb{R}^2$  по интегралам по отрезкам  $L_{\pi,\theta}$ , проходящим через точку  $x_0 \in \pi$  в направлениях  $\theta \in \Gamma_\pi \subset S^1$ .

Пусть  $D_\pi := B \cap \pi$ . Согласно теореме из [1], в такой двумерной постановке справедлива априорная оценка:

$$\|f_\pi\|_{L^2(D_\pi)} \leq \frac{C_1(\pi)}{\sqrt{|\log \varepsilon|}} \left( \int_{\Gamma_\pi} |\mathcal{R}f(\pi, \theta)|^2 d\theta \right)^{1/2}.$$

Доказательство этой оценки основано на построении вспомогательной субгармонической функции  $u(z)$ , гармонической в  $D_\pi \setminus \{x_0\}$ , принимающей значения, определяемые преобразованием  $\mathcal{R}f(\pi, \theta)$ , и применении интегральной теоремы о средних (см. [3]).

*Шаг 2. Интегрирование по пространству плоскостей.* Интегрируя полученную оценку по всем  $\pi \in \Pi \subset G(2, 4)$  с использованием меры Хаара  $\mu(\pi)$ , получаем:

$$\int_{\Pi} \|f_\pi\|_{L^2(D_\pi)}^2 d\mu(\pi) \leq \frac{C_2}{|\log \varepsilon|} \int_{\Pi} \int_{\Gamma_\pi} |\mathcal{R}f(\pi, \theta)|^2 d\theta d\mu(\pi).$$

Согласно результатам интегральной геометрии (см. [5], [4]), при условии, что множество отрезков  $\{L_{\pi,\theta}\}$  покрывает  $B$ , это усреднение обеспечивает мажоранту всей нормы:

$$\|f\|_{L^2(B)}^2 \leq C_3 \int_{\Pi} \|f_\pi\|_{L^2(D_\pi)}^2 d\mu(\pi).$$

Подставляя предыдущую оценку, получаем

$$\|f\|_{L^2(B)} \leq \frac{C}{\sqrt{|\log \varepsilon|}} \left( \int_{\Pi} \int_{\Gamma_\pi} |\mathcal{R}f(\pi, \theta)|^2 d\theta d\mu(\pi) \right)^{1/2}.$$

Теорема доказана.

### 5.3. Заключение

Полученная логарифмическая оценка демонстрирует характерную для задач с неполными данными слабую устойчивость. Появление логарифма связано с деградацией гармонической меры при сужении сектора направлений: для секторов  $\Gamma_\pi$  с угловой шириной порядка  $\varepsilon$ , вес в центральной точке  $x_0$  убывает как  $|\log \varepsilon|^{-1}$ , что и отражается в правой части оценки.

Таким образом, при любых ограничениях на направление интегрирования, сохраняющих покрытие области  $B$ , задача остаётся устойчивой, хотя и с существенно более слабой оценкой, чем в случае полной информации.

## 6. Обсуждение и приложения

### 6.1. Связь с задачами геодезического типа

Рассматриваемая задача относится к классу задач интегральной геометрии с частичными данными. Существуют аналогии с задачами геодезической томографии, в которых изучаются интегралы по геодезическим линиям на римановых или псевдоримановых многообразиях (см. [6]). Однако, в отличие от таких задач, где линии интегрирования определяются метрикой и не всегда являются линейными, в нашей постановке рассматриваются только прямолинейные отрезки, расположенные в фиксированных двумерных плоскостях.

Таким образом, наша задача ближе по духу к преобразованию Радона, но с существенным ограничением: интегрирование не происходит по всему пространству направлений, а только по суженным пучкам в ограниченных подмногообразиях  $G(2, 4) \times S^1$ .

### 6.2. Принципиальные отличия от задач на многообразиях

Задача, рассматриваемая в данной работе, формулируется в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^4$ , но с параметризацией, не обладающей полной симметрией. Напомним, что в трёхмерной постановке ( $\mathbb{R}^3$ ) возможно использование конформных преобразований и редукция задачи к двумерной (см. [1]). В четырёхмерном случае такой редукции не существует: грассmannиан  $G(2, 4)$  не допускает конформной структуры, согласующейся с евклидовой метрикой.

Кроме того, интегрирование происходит по семейству двумерных сечений, что существенно усложняет геометрию задачи и исключает прямое использование стандартных методов спектральной теории или вариационных подходов.

### 6.3. О возможности обобщения на $\mathbb{R}^n$

Одним из возможных направлений обобщения является постановка аналогичной задачи в  $\mathbb{R}^n$  при фиксированной размерности интегрирующих подпространств — например, двумерных или  $k$ -мерных.

Однако, как показал анализ, при увеличении размерности пространства резко усложняется структура грассmannиана  $G(k, n)$ , что приводит к существенным трудностям:

- мера Хаара становится всё менее конструктивной;
- отсутствует инвариантность направлений относительно подгрупп движений;
- ухудшается локальная устойчивость: логарифмические оценки заменяются на сублогарифмические (см. [8], [9]).

Таким образом, хотя теоретическая постановка задачи возможна и в произвольной размерности, переход к  $\mathbb{R}^n$  требует существенной модификации методов.

## 7. Заключение

В данной работе рассмотрена новая постановка задачи интегральной геометрии с неполными данными в четырёхмерном евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^4$ . В отличие от классических преобразований Радона и их модификаций в  $\mathbb{R}^2$  и  $\mathbb{R}^3$ , данная задача отличается следующими особенностями:

- интегрирование происходит по пучкам прямых, лежащих в двумерных линейных подпространствах;
- направления интегрирования параметризуются элементами грассмана  $G(2, 4)$  и секторами  $\Gamma_\pi \subset S_\pi^1$ ;
- отсутствует возможность сведения к двумерной задаче через конформные преобразования;
- пространственная структура охвата определяется системой подпространств и требует анализа на многообразии  $G(2, 4)$ .

В рамках данной постановки нами доказаны следующие результаты:

1. **Теорема единственности:** при условии, что семейство направлений покрывает область  $B$ , знание интегралов по соответствующим отрезкам однозначно определяет функцию;
2. **Теорема устойчивости:** получена логарифмическая априорная оценка нормы функции через интегралы по неполному семейству прямых. Характер оценки обусловлен геометрическим вырождением гармонической меры при сужении сектора направлений;
3. Построена строгая геометрическая модель задачи через параметризацию  $G(2, 4)$ , уточнена роль меры Хаара и доказана вспомогательная лемма, дающая ключевую оценку по частичным данным.

Особенностью данной постановки является её потенциальная применимость к задачам с локализованным доступом к данным (например, в математических моделях, описывающих ограниченное поле зрения датчиков или частичные потоки информации).

Будущие исследования могут быть направлены на:

- обобщение полученных результатов на произвольную размерность  $\mathbb{R}^n$  и более высокие грассманы  $G(k, n)$ ;
- изучение аналогичных задач на римановых многообразиях с ограниченным набором геодезических направлений;
- разработку численных алгоритмов, использующих доказанные априорные оценки в качестве базиса для регуляризации некорректных задач.

Таким образом, представленная работа не только предлагает новую постановку и её строгое математическое обоснование, но и открывает возможности для дальнейшего развития методов частичной интегральной геометрии в многомерных пространствах.

## Список литературы

- 
- [1] Бегматов А. Х. Об одной задаче обращения лучевого преобразования с неполными данными // Сибирский математический журнал. 2001. Т. 42, №3. С. 515–529.
  - [2] Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишацкий С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа. — М.: Наука, 1980.

- [3] Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я. Обобщённые функции. Том 5: Интегральная геометрия и теория представлений. — М.: Физматгиз, 1966.
- [4] Helgason S. Groups and Geometric Analysis. Academic Press, 1984.
- [5] Gindikin S. Integral geometry on symmetric spaces. Journal of Functional Analysis. 1975. Vol. 18. P. 32–39.
- [6] Шарафтдинов В. А. Интегральная геометрия на многообразиях. — Новосибирск: Наука, 1994.
- [7] Boothby W. M. An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry. Academic Press, 1986.
- [8] Natterer F. The Mathematics of Computerized Tomography. SIAM, 2001.
- [9] Stefanov P., Uhlmann G. An inverse source problem in optical molecular imaging. Analysis and PDE, 2008, 1(1):115–126.
- [10] Salazar R. Stability estimates for the hyperbolic inverse problem with time-dependent coefficients. arXiv:1009.4003v4 [math.AP], 2013.
- [11] Salazar R. Stability estimate for the relativistic Schrödinger equation with time-dependent vector potentials. arXiv:1406.4854, 2014.
- [12] Waters A. Stability for Time Dependent X-ray Transforms and Applications. arXiv:1311.1591v2 [math.AP], 2015.
- [13] Stefanov P. Support theorems for the light ray transform on analytic Lorentzian manifolds. Proc. Amer. Math. Soc. 2017. Vol. 145, No. 3. P. 1259–1274.
- [14] Stefanov P., Yang Y. The inverse problem for the Dirichlet-to-Neumann map on Lorentzian manifolds. Anal. PDE. 2018. Vol. 11, No. 6. P. 1381–1414.
- [15] Bellassoued M., Ben Aïcha I. Stable determination outside a cloaking region of two time-dependent coefficients in a hyperbolic equation from Dirichlet to Neumann map. J. Math. Anal. Appl. 2017. Vol. 449. P. 46–76.
- [16] Demchenko M. On the inverse source problem for the wave equation. J. Math. Sci. 2017. Vol. 219, No. 1. P. 62–78.
- [17] Ilmavirta J. X-ray transforms in pseudo-Riemannian geometry. J. Geom. Anal. 2018. Vol. 28. P. 1173–1197.
- [18] Бегматов А. Х. Два класса слабо некорректных задач интегральной геометрии на плоскости // Сиб. матем. журн. 1995. Т. 36, № 2. С. 243–247.
- [19] Бегматов А. Х. Задача интегральной геометрии для семейства конусов в  $n$ -мерном пространстве // Сиб. матем. журн. 1996. Т. 37, № 3. С. 500–505.
- [20] Бегматов А. Х. Задачи интегральной геометрии вольтерровского типа для кривых с особенностями // Сиб. матем. журн. 1997. Т. 38, № 4. С. 723–737.
- [21] Begmatov Akr. Kh. Теоремы существования решения двух слабо некорректных задач интегральной геометрии // Докл. АН. 2002. Т. 386, № 1. С. 727–729.
- [22] Begmatov Akr. Kh., Ochilov Z. Kh. D'Alembert mappings for a class of symmetric domains // Dokl. Math. 2009. Vol. 80, No. 1. P. 506–507.
- [23] Begmatov Akr. Kh., Ochilov Z. Kh. Integral geometry problem with a discontinuous weight function // Dokl. Math. 2009. Vol. 80, No. 3. P. 823–825.

## On the Stability of the Solution to an Integral Geometry Problem from Incomplete Data in Four Dimensional Space

Akram K. Begmatov, Alisher S. Ismoilov

### Abstract

This paper addresses an inverse problem in integral geometry in four-dimensional space  $\mathbb{R}^4$  based on incomplete data. The problem involves recovering a function defined in a bounded domain from its integrals along line segments lying in two-dimensional planes intersecting the domain. The incompleteness arises due to the restriction on the set of available directions and lengths of the lines, which leads to a severely ill-posed problem. A constructive inversion formula is proposed under geometric constraints, and a priori estimates are derived. The results obtained lay the foundation for applying the method in tomographic and geophysical problems with limited observational geometry.

### Affiliations

Акрам Х. Бегматов

**Address:** Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан

**e-mail:** begmatov59@gmail.com

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0002-2813-7653>

Алишер С. Исмоилов

**Address:** Самаркандский государственный педагогический институт, Самарканд, Узбекистан

**e-mail:** alisher\_8778@mail.ru

**ORCID ID:**