Uzbekistan Journal of Mathematics and Computer Science
Volume-2, Issue-2, Page 143–160 (2026)
DOI: https://doi.org/10.56143/ujmcs.v2i2.13
Research article

Нормальное распределение периодических показателей Ляпунова для двухветвевых расширяющих марковских отображений с неполной ветвью

Мухриддин Хомидов *

Аннотация

Исследуется распределение показателей Ляпунова периодических точек для класса двухветвевых расширяющих марковских отображений интервала с неполной ветвью. Для каждого $n \geq 1$ рассматривается эмпирическое распределение показателей Ляпунова на множестве неподвижных точек $\mathrm{Fix}(f^n)$. При условии положительности асимптотической дисперсии доказывается, что после центрирования относительно показателя Ляпунова по мере максимальной энтропии и естественной $\sqrt{n}$-нормировки эти эмпирические распределения сходятся к стандартному нормальному распределению. Доказательство основано на свойствах оператора переноса, соответствующего рассматриваемой неполной марковской структуре. Приводятся также численные эксперименты, иллюстрирующие гауссово поведение периодических показателей Ляпунова.

Ключевые слова: *Расширяющие марковские отображения; неполные ветви; периодические точки; показатели Ляпунова; центральная предельная теорема; операторы переноса.*

Предметная классификацие AMS (2020): *Основная: 37D20, 37D35; Дополнительная: 60F05.*

1. Введение

Явления центрального предела для расширяющих динамических систем и подсдвигов конечного типа изучены достаточно подробно. В частности, Коэльо и Парри [10] получили количественные центральные предельные асимптотики для гёльдеровских наблюдаемых на подсдвигах конечного типа, включая результаты, связанные с мерами на замкнутых орбитах. Методы операторов переноса и их приложения к статистическим свойствам расширяющих и гиперболических динамических систем развиты, в частности, в [12, 18, 19, 20]. Количественные уточнения в расширяющем случае включают явные оценки типа Берри–Эссеена для отображений интервала [21] и разложения более высокого порядка в локальных и центральных предельных теоремах [22]. Общие сведения о термодинамическом формализме, методах периодических орбит и эргодической теории можно найти в [14, 15, 13, 23, 16, 17].

Недавний результат Драча, Фу, Калошина, Ли и Ливерани [4] устанавливает центральную предельную теорему вместе с количественной скоростью сходимости для эмпирического распределения показателей Ляпунова периодических точек гладких расширяющих отображений окружности. В их постановке естественные обратные

Received : *15–august–2026,* ***Accepted :*** *20–October–2026*
*** Corresponding author***

ветви имеют полноветвевую структуру, а соответствующая символическая динамика моделируется полным сдвигом. Это приводит к аналогичному вопросу для расширяющих марковских отображений, у которых некоторые ветви не являются полными. В этом случае не каждый символический переход допустим, а лежащая в основе символическая динамика описывается собственным подсдвигом конечного типа.

Общий механизм центральной предельной теоремы для гёльдеровских наблюдаемых на смешивающем подсдвиге конечного типа является классическим, и в настоящей работе не заявляется новая абстрактная ЦПТ на этом уровне. Вклад статьи состоит в непосредственном, специфичном для модели исследовании периодических показателей Ляпунова для простейшей примитивной марковской структуры с неполной ветвью. Отсутствующий переход $1 \to 1$ приводит к тому, что периодические точки организуются не произвольными словами, а допустимыми замкнутыми путями Фибоначчи. Эта комбинаторика входит в доказательство явно через диагональные блоки оператора переноса и через $\operatorname{tr}(A^n)$. Для данной конкретной интервальной модели получены: (i) явное операторное представление средних по периодическим точкам; (ii) экспоненциальная сходимость этих средних; (iii) формула Грина–Кубо для предельной дисперсии вместе с критерием её невырожденности через периодические орбиты; (iv) прямое доказательство гауссовского предела методом характеристических функций. В численном разделе та же неполная марковская комбинаторика реализуется посредством равномерного выбора замкнутых допустимых путей, что обеспечивает воспроизводимую иллюстрацию теоремы.

Пусть $I = [0,1]$, $c \in (0,1)$, и положим $I_1 = [0,c]$, $\qquad I_2 = [c,1]$. Пусть $f : I \to I$ двухветвевое кусочно-$C^{1+\alpha}$-отображение для некоторого $\alpha > 0$. Предполагается, что при $i = 1,2$ ограничение $f_i := f|_{I_i}$ продолжается до $C^{1+\alpha}$-диффеоморфизма I_i на свой образ, а f_i' является α-гёльдеровой на I_i. Кроме того, предполагается, что:

(i) f равномерно расширяет на обеих ветвях, то есть

$$\inf_{x \in I_i} |f_i'(x)| > 1, \qquad i = 1,2;$$

(ii) интервалы I_1 и I_2 образуют марковское разбиение и

$$f(I_1) = I_2, \qquad f(I_2) = I_1 \cup I_2 = I.$$

Такое отображение будем называть *двухветвевым расширяющим марковским отображением с неполной ветвью*. Соответствующая матрица переходов имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Её собственное значение Перрона–Фробениуса равно $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, и поэтому $h_{\mathrm{top}}(f) = \log \varphi$.

Поскольку две ветви соприкасаются в точке c, производные в граничных точках марковского разбиения понимаются по соответствующей ветви. Для них используется обозначение $D_{\mathrm{br}} f$. Вне границы разбиения $D_{\mathrm{br}} f = f'$.

Во всей статье периодические точки понимаются через их допустимые периодические марковские кодировки. Эквивалентно можно использовать стандартное соглашение о полуоткрытых элементах марковского разбиения. Это устраняет неоднозначность в граничных точках и даёт взаимно однозначное соответствие между допустимыми периодическими словами длины n и неподвижными точками n-й итерации. Обозначим

$$\operatorname{Fix}(f^n) = \{p : f^n(p) = p\}$$

соответствующее множество кодированных неподвижных точек и положим $K_n := \#\operatorname{Fix}(f^n)$.

В частности, $K_n = \operatorname{tr}(A^n)$. Для $p \in \operatorname{Fix}(f^n)$ определим периодический показатель Ляпунова равенством

$$\chi_n(p) := \frac{1}{n} \log |D_{\mathrm{br}} f^n(p)| = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log \left| D_{\mathrm{br}} f\left(f^j(p)\right) \right|.$$

Эта величина постоянна вдоль периодической орбиты точки p. Кроме того, $\exp\big(n\chi_n(p)\big) = |D_{\mathrm{br}} f^n(p)|$ есть абсолютная величина мультипликатора соответствующей периодической орбиты, а $n\chi_n(p) = \log|D_{\mathrm{br}} f^n(p)|$

— её логарифмический мультипликатор; в терминологии [3] эту величину можно интерпретировать как длину периодической орбиты.

Для каждого $n \geq 1$ на $\mathrm{Fix}(f^n)$ вводится равномерная вероятностная мера, и определяется эмпирическая вероятностная мера периодических показателей Ляпунова

$$\mathbb{P}_n = \frac{1}{K_n} \sum_{p \in \mathrm{Fix}(f^n)} \delta_{\chi_n(p)}.$$

Эквивалентно, для интервала $[x, y] \subset \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}_n\big(\chi_n \in [x, y]\big) = \frac{\#\{p \in \mathrm{Fix}(f^n) : \chi_n(p) \in [x, y]\}}{K_n}.$$

Пусть μ — единственная f-инвариантная вероятностная мера максимальной энтропии. Её существование и единственность следуют из примитивности матрицы переходов и классической теории мер Парри; см. [1, 2]. Положим $h(x) := \log|D_{\mathrm{br}} f(x)|$ и $\chi := \int_I h\, d\mu, \qquad \widehat{h} := h - \chi.$

Соответствующая асимптотическая дисперсия задаётся корреляционной формулой Грина–Кубо [6, 7]:

$$\sigma^2 = \int_I \widehat{h}^2\, d\mu + 2\sum_{k=1}^{\infty} \int_I \widehat{h}(x)\widehat{h}(f^k(x))\, d\mu(x).$$

Как показано в разделе 2, этот ряд сходится абсолютно.

Основной результат работы формулируется следующим образом.

Теорема 1.1. Пусть f — двухветвевое расширяющее марковское отображение с неполной ветвью, удовлетворяющее сформулированным выше условиям. Предположим, что $\sigma^2 > 0$.

Тогда для любых $a < b$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_n\left(\frac{\sqrt{n}\,(\chi_n - \chi)}{\sigma} \in [a, b]\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-t^2/2}\, dt.$$

Близкое по смыслу явление возникает в геометрии замкнутых геодезических на гиперболических поверхностях. Гехтман, Тейлор и Тиоццо [8] доказали центральную предельную теорему для эмпирического распределения длин замкнутых геодезических, подтвердив тем самым гипотезу Час, Ли и Маскит [9]. Точнее, они рассматривали замкнутые геодезические, комбинаторная длина которых относительно фиксированной системы образующих фундаментальной группы не превосходит n, и доказали, что соответствующие нормированные геометрические длины удовлетворяют центральной предельной теореме при $n \to \infty$.

2. Предварительные сведения

Сохраним обозначения, введённые в разделе 1. В частности,

$$I_1 = [0, c], \qquad I_2 = [c, 1], \text{ и } f(I_1) = I_2, \qquad f(I_2) = I_1 \cup I_2 = I.$$

Соответствующая матрица переходов равна $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, а её собственное значение Перрона–Фробениуса имеет вид $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Положим

$$\Lambda := \min_{i=1,2} \inf_{x \in I_i} |f_i'(x)| > 1.$$

2.1. Марковское кодирование и периодические точки

Пусть

$$\Sigma_A = \{\omega = (\omega_0, \omega_1, \ldots) \in \{1,2\}^{\mathbb{N}} : A_{\omega_j \omega_{j+1}} = 1 \text{ для всех } j \geq 0\}$$

— односторонний подсдвиг конечного типа, соответствующий матрице A, а

$$S(\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots) = (\omega_1, \omega_2, \ldots)$$

— левый сдвиг.

Для допустимого слова

$$\omega = (\omega_0, \ldots, \omega_{n-1})$$

обозначим через

$$I_\omega = I_{\omega_0} \cap f^{-1}(I_{\omega_1}) \cap \cdots \cap f^{-(n-1)}(I_{\omega_{n-1}})$$

соответствующий n-цилиндр. Поскольку f равномерно расширяет, существует $C > 0$ такое, что

$$\operatorname{diam}(I_\omega) \leq C\Lambda^{-n}$$

для любого допустимого слова ω длины n.

Следовательно, отображение кодирования

$$\pi : \Sigma_A \longrightarrow I, \qquad \{\pi(\omega)\} = \bigcap_{n \geq 1} I_{\omega_0 \ldots \omega_{n-1}}$$

корректно определено и удовлетворяет соотношению $f \circ \pi = \pi \circ S$.

В концах марковского разбиения используется зафиксированное в разделе 1 соглашение о полуоткрытых интервалах. Поэтому каждой допустимой периодической кодировке соответствует единственная периодическая точка. Производные вдоль такой орбиты всегда понимаются по ветвям; в частности,

$$D_{\mathrm{br}} f^n(p) = \prod_{j=0}^{n-1} D_{\mathrm{br}} f\big(f^j(p)\big).$$

Лемма 2.1. *Для каждого* $n \geq 1$

$$K_n = \#\operatorname{Fix}(f^n) = \operatorname{tr}(A^n).$$

Следовательно, $K_n = \varphi^n + (-\varphi^{-1})^n$.

Доказательство. В силу марковского кодирования неподвижные точки f^n находятся во взаимно однозначном соответствии с n-периодическими точками подсдвига (Σ_A, S). Для подсдвига конечного типа число n-периодических точек равно

$$\#\operatorname{Fix}(S^n) = \operatorname{tr}(A^n);$$

см., например, [5]. Поэтому $K_n = \operatorname{tr}(A^n)$.

Собственные значения матрицы A равны φ и $-\varphi^{-1}$, откуда следует

$$K_n = \varphi^n + (-\varphi^{-1})^n.$$

□

2.2. Мера Парри и нормированный оператор переноса

Поскольку матрица A примитивна, подсдвиг (Σ_A, S) имеет единственную меру максимальной энтропии — меру Парри [1, 2]. Её образ при отображении кодирования π есть единственная f-инвариантная вероятностная мера максимальной энтропии, обозначаемая через μ. Соответствующая марковская матрица переходов равна

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varphi^{-2} & \varphi^{-1} \end{pmatrix},$$

а её стационарное распределение имеет вид $\left(\frac{1}{1+\varphi^2}, \frac{\varphi^2}{1+\varphi^2}\right)$. В частности, $h_\mu(f) = h_{\mathrm{top}}(f) = \log\varphi$. Пусть $\mathcal{B} = C^\alpha(I_1) \oplus C^\alpha(I_2)$ с нормой $\|u\|_{\mathcal{B}} = \max_{i=1,2}\|u_i\|_\infty + \max_{i=1,2}[u_i]_\alpha$. Через $\tau_{21} : I_1 \to I_2$, $\tau_{12} : I_2 \to I_1$, $\tau_{22} : I_2 \to I_2$ обозначим обратные ветви, соответствующие переходам $2 \to 1$, $1 \to 2$, $2 \to 2$.

Каждая из них удовлетворяет оценке

$$|\tau_{ij}(x) - \tau_{ij}(y)| \le \Lambda^{-1}|x - y|.$$

Для $u = (u_1, u_2) \in \mathcal{B}$ определим $(\mathcal{L}u)_1(x) = u_2(\tau_{21}(x))$, $x \in I_1$, и $(\mathcal{L}u)_2(x) = u_1(\tau_{12}(x)) + u_2(\tau_{22}(x))$, $x \in I_2$. Пусть

$$H = \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi \end{pmatrix}.$$

Так как $AH = \varphi H$, то $\mathcal{L}H = \varphi H$. Поэтому нормированный оператор переноса определяется формулой

$$\widehat{\mathcal{L}}u = \frac{1}{\varphi H}\,\mathcal{L}(Hu),$$

где умножение и деление на H понимаются покомпонентно. Явно,

$$(\widehat{\mathcal{L}}u)_1(x) = u_2(\tau_{21}(x)),$$

а

$$(\widehat{\mathcal{L}}u)_2(x) = \frac{1}{\varphi^2}u_1(\tau_{12}(x)) + \frac{1}{\varphi}u_2(\tau_{22}(x)).$$

Поскольку $\frac{1}{\varphi^2} + \frac{1}{\varphi} = 1$, имеем $\widehat{\mathcal{L}}\mathbf{1} = \mathbf{1}$, $\mathbf{1} = (1, 1)$. Если $u = (u_1, u_2) \in \mathcal{B}$, то будем отождествлять u с соответствующей кусочно-гёльдеровой функцией на I и писать

$$\mu(u) := \int_I u\, d\mu.$$

2.3. Спектральный разрыв и убывание корреляций

Предложение 2.1. *Нормированный оператор переноса $\widehat{\mathcal{L}} : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ имеет простое максимальное собственное значение 1 и спектральный разрыв. Точнее, существуют ограниченный оператор $Q : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$, константа $C > 0$ и $\theta \in (0, 1)$ такие, что*

$$\widehat{\mathcal{L}}u = \mu(u)\mathbf{1} + Qu,$$

и

$$\widehat{\mathcal{L}}^n u = \mu(u)\mathbf{1} + Q^n u, \qquad \|Q^n u\|_{\mathcal{B}} \le C\theta^n\|u\|_{\mathcal{B}}.$$

Доказательство. Поскольку веса в $\widehat{\mathcal{L}}$ постоянны, а каждая обратная ветвь сжимает расстояния по крайней мере с коэффициентом Λ^{-1}, имеем

$$\|\widehat{\mathcal{L}}u\|_\infty \le \|u\|_\infty$$

и

$$[\widehat{\mathcal{L}}u]_\alpha \le \Lambda^{-\alpha}[u]_\alpha.$$

Следовательно, $\widehat{\mathcal{L}}$ удовлетворяет неравенству Дёблина–Форте в пространстве $\mathcal{B}$, а значит является квазикомпактным.

На двумерном подпространстве функций, постоянных на каждом I_i, оператор действует как стохастическая матрица

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varphi^{-2} & \varphi^{-1} \end{pmatrix}.$$

Её собственные значения равны

$$1 \qquad \text{и} \qquad -\varphi^{-2}.$$

В частности, собственное значение 1 простое.

Остаётся исключить другие собственные значения на единичной окружности. Предположим, что

$$\widehat{\mathcal{L}}u = \lambda u, \qquad |\lambda| = 1.$$

Тогда для каждого $n \geq 1$

$$[u]_\alpha = [\widehat{\mathcal{L}}^n u]_\alpha \leq \Lambda^{-\alpha n}[u]_\alpha.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем $[u]_\alpha = 0$. Значит, u постоянно на каждой ветви, и λ должно быть собственным значением матрицы P. Поскольку единственным собственным значением P на единичной окружности является 1, утверждение доказано.

Соответствующий инвариантный функционал задаётся мерой Парри μ, что и завершает доказательство. □

Нормированный оператор удовлетворяет также стандартному тождеству вынесения множителя

$$\widehat{\mathcal{L}}^n\big(u\,(v \circ f^n)\big) = v\,\widehat{\mathcal{L}}^n u$$

для $u, v \in \mathcal{B}$. Следовательно,

$$\int_I u\,(v \circ f^n)\,d\mu = \int_I v\,\widehat{\mathcal{L}}^n u\,d\mu.$$

Следствие 2.1. *Существуют $C > 0$ и $\theta \in (0,1)$ такие, что для любых $u, v \in \mathcal{B}$*

$$\left|\int_I u\,(v \circ f^n)\,d\mu - \int_I u\,d\mu \int_I v\,d\mu\right| \leq C\theta^n \|u\|_{\mathcal{B}} \|v\|_\infty.$$

Доказательство. Запишем

$$u = \mu(u)\mathbf{1} + \big(u - \mu(u)\mathbf{1}\big).$$

По предложению 2.1,

$$\left\|\widehat{\mathcal{L}}^n\big(u - \mu(u)\mathbf{1}\big)\right\|_\infty \leq C\theta^n \|u\|_{\mathcal{B}}.$$

Остаётся воспользоваться тождеством вынесения множителя. □

2.4. Дисперсия Грина–Кубо

Напомним, что

$$h(x) = \log|D_{\mathrm{br}} f(x)|, \qquad \chi = \int_I h\,d\mu, \qquad \widehat{h} = h - \chi.$$

Из условий регулярности ветвей следует $\widehat{h} \in \mathcal{B}$.

Лемма 2.2. *Корреляционный ряд Грина–Кубо $\sum_{k=1}^{\infty} \int_I \widehat{h}(x)\widehat{h}(f^k(x))\,d\mu(x)$ сходится абсолютно.*

Доказательство. Поскольку $\int_I \widehat{h}\, d\mu = 0$, из следствия 2.1 получаем

$$\left| \int_I \widehat{h}(x)\widehat{h}(f^k(x))\, d\mu(x) \right| \le C\theta^k \|\widehat{h}\|_{\mathcal{B}}^2.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_I \widehat{h}(x)\widehat{h}(f^k(x))\, d\mu(x) \right| < \infty.$$

□

Таким образом, введённая в разделе 1 асимптотическая дисперсия

$$\sigma^2 = \int_I \widehat{h}^2\, d\mu + 2\sum_{k=1}^{\infty} \int_I \widehat{h}(x)\widehat{h}(f^k(x))\, d\mu(x)$$

корректно определена.

2.5. *Критерий невырожденности через периодические орбиты*

Условие $\sigma^2 > 0$, входящее в теорему 1.1, можно проверить непосредственно по периодическому спектру показателей Ляпунова.

Предложение 2.2. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $\sigma^2 = 0$*;*

(ii) для всех $n \ge 1$ *и всех* $p \in \mathrm{Fix}(f^n)$

$$\chi_n(p) = \log \varphi.$$

Эквивалентно,

$$\sigma^2 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, n \ge 1,\ p \in \mathrm{Fix}(f^n) \text{ такое, что } \chi_n(p) \ne \log \varphi.$$

Доказательство. Поскольку матрица A примитивна, подсдвиг (Σ_A, S) топологически смешивающий. Наблюдаемая $g := \widehat{h} \circ \pi$ гёльдерова на Σ_A. Используем стандартный критерий “нулевая дисперсия — кограница” для гёльдеровских наблюдаемых на смешивающем подсдвиге конечного типа совместно с теоремой Лившица [11, 23, 12]: дисперсия Грина–Кубо равна нулю тогда и только тогда, когда g является гёльдеровской кограницей, $g = v - v \circ S$ для некоторой гёльдеровой функции $v : \Sigma_A \to \mathbb{R}$. Эквивалентно, сумма g по любой периодической орбите равна нулю. Необходимые здесь условия — именно примитивность A, обеспечивающая смешивание Σ_A, и гёльдерова регулярность g.

Пусть сначала $\sigma^2 = 0$. Для каждого $p \in \mathrm{Fix}(f^n)$, выбирая его периодическую кодировку $\omega \in \mathrm{Fix}(S^n)$, получаем

$$\sum_{j=0}^{n-1} \widehat{h}(f^j(p)) = \sum_{j=0}^{n-1} g(S^j\omega) = v(\omega) - v(S^n\omega) = 0.$$

Следовательно, $\chi_n(p) = \chi$ для каждой периодической точки.

Остаётся определить константу χ. Пусть $\omega = (\omega_0, \dots, \omega_{n-1})$ — допустимое слово, а $x \in I_\omega$ имеет кодировку $\widetilde{\omega}$, начинающуюся с этого слова. Из $g = v - v \circ S$ следует

$$\sum_{j=0}^{n-1} h(f^j(x)) = n\chi + v(\widetilde{\omega}) - v(S^n\widetilde{\omega}).$$

Поскольку v ограничена, существует константа $C_0 > 1$, не зависящая от n, цилиндра и точки x, такая, что

$$C_0^{-1} e^{n\chi} \le |D_{\mathrm{br}} f^n(x)| \le C_0 e^{n\chi}.$$

По теореме о среднем существуют $C_1, C_2 > 0$ такие, что для каждого допустимого n-цилиндра

$$C_1 e^{-n\chi} \le |I_\omega| \le C_2 e^{-n\chi}.$$

Пусть N_n — число допустимых слов длины n. По теореме Перрона–Фробениуса $N_n \asymp \varphi^n$. Цилиндры длины n образуют разбиение I с точностью до концов, поэтому

$$1 = \sum_{|\omega|=n} |I_\omega| \asymp N_n e^{-n\chi} \asymp \varphi^n e^{-n\chi}.$$

Беря логарифмы, деля на n и переходя к пределу, получаем $\chi = \log\varphi$. Значит, $\chi_n(p) = \log\varphi$ для каждой периодической точки.

Обратно, предположим, что $\chi_n(p) = \log\varphi$ для всех $n \ge 1$ и всех $p \in \mathrm{Fix}(f^n)$. Тогда гёльдерова наблюдаемая $g_0 := (h - \log\varphi) \circ \pi$ имеет нулевую сумму по каждой периодической орбите смешивающего подсдвига (Σ_A, S). По теореме Лившица $g_0 = v - v \circ S$ для некоторой гёльдеровой функции v. Интегрируя по мере Парри и используя её S-инвариантность, получаем $\chi = \log\varphi$. Следовательно, $g = \widehat{h} \circ \pi$ является кограницей, и критерий нулевой дисперсии даёт $\sigma^2 = 0$.

□

3. Доказательство основного результата

В этом разделе используем обозначения $h(x) := \log|D_{\mathrm{br}} f(x)|$ и

$$\widehat{h}(x) := h(x) - \chi, \qquad \chi = \int_I h\, d\mu.$$

Напомним, что

$$\chi_n(p) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} h(f^j(p)), \qquad p \in \mathrm{Fix}(f^n).$$

Сначала исследуем математическое ожидание периодических показателей Ляпунова.

Лемма 3.1. *При $n \to \infty$*

$$\mathbb{E}(\chi_n) \longrightarrow \chi.$$

Более того, сходимость является экспоненциальной: существуют постоянные $C > 0$ и $\vartheta \in (0,1)$, не зависящие от n, такие, что для всех $n \ge 1$

$$|\mathbb{E}(\chi_n) - \chi| \le C\vartheta^{\,n}.$$

Доказательство. Положим $h(x) := \log|D_{\mathrm{br}} f(x)|$.

Поскольку f биективно переставляет множество $\mathrm{Fix}(f^n)$, для каждого $j = 0, \dots, n-1$

$$\sum_{p \in \mathrm{Fix}(f^n)} h(f^j(p)) = \sum_{p \in \mathrm{Fix}(f^n)} h(p).$$

Следовательно,

$$\mathbb{E}(\chi_n) = \frac{1}{K_n} \sum_{p \in \mathrm{Fix}(f^n)} h(p).$$

Таким образом, достаточно оценить среднее значение h по периодическим точкам.

Зафиксируем $z_i \in I_i^\circ$, $i = 1, 2$. Для $i = 1, 2$ обозначим через $\mathcal{C}_n^{(i)}$ совокупность допустимых n-цилиндров $J \subset I_i$, для которых $f^n(J) = I_i$. Для $J \in \mathcal{C}_n^{(i)}$ обозначим через $\tau_J : I_i \longrightarrow J$ обратную ветвь отображения $f^n|_J$ и положим

$$y_J := \tau_J(z_i).$$

Сжатие τ_J имеет единственную неподвижную точку $p_J \in J$, причём точки p_J, соответствующие $\mathcal{C}_n^{(1)} \cup \mathcal{C}_n^{(2)}$, в точности образуют кодированное множество $\mathrm{Fix}(f^n)$.

Равномерное расширение даёт оценку $\mathrm{diam}(J) \le C_0 \Lambda^{-n}$. Поскольку h гёльдерова на каждой ветви,

$$|h(y_J) - h(p_J)| \le C_1 \Lambda^{-\alpha n},$$

и потому

$$\left| \sum_{p \in \mathrm{Fix}(f^n)} h(p) - \sum_{i=1}^{2} \sum_{J \in \mathcal{C}_n^{(i)}} h(y_J) \right| \le C_1 K_n \Lambda^{-\alpha n}. \tag{3.1}$$

Теперь явно установим связь с диагональными блоками оператора переноса. Пусть $\mathbf{e}_1 = (1,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1)$, а $h_i = h|_{I_i}$. Раскрывая $\mathcal{L}^n$ по допустимым обратным ветвям, получаем

$$\sum_{J \in \mathcal{C}_n^{(i)}} h(y_J) = \left[\mathcal{L}^n(\mathbf{e}_i h_i)\right]_i (z_i) = \left(\mathcal{L}_{ii}^n h_i\right)(z_i). \tag{3.2}$$

Следовательно, диагональные блоки выделяют в точности те допустимые пути длины n, которые начинаются и заканчиваются в одном и том же марковском состоянии, то есть замкнутые пути, соответствующие $\mathrm{Fix}(f^n)$.

Спектральный разрыв нормированного оператора после сопряжения с $H = (1, \varphi)^{\mathsf{T}}$ эквивалентен разложению

$$\mathcal{L}^n u = \varphi^n H\, \nu(u) + R_n u, \qquad \|R_n u\|_{\mathcal{B}} \le C_2 \rho^n \|u\|_{\mathcal{B}}, \qquad 0 < \rho < \varphi,$$

где $\nu(H) = 1$, а

$$\mu(u) = \nu(Hu).$$

Применяя эту формулу к $\mathbf{e}_i h_i$ и беря i-ю компоненту в точке z_i, имеем

$$\left(\mathcal{L}_{ii}^n h_i\right)(z_i) = \varphi^n H_i\, \nu(\mathbf{e}_i h_i) + O(\rho^n).$$

Суммируя по $i = 1, 2$ и используя

$$\sum_{i=1}^{2} H_i \nu(\mathbf{e}_i h_i) = \nu(Hh) = \mu(h) = \chi,$$

получаем

$$\sum_{i=1}^{2} \sum_{J \in \mathcal{C}_n^{(i)}} h(y_J) = \varphi^n \chi + O(\rho^n). \tag{3.3}$$

Тот же расчёт при $h \equiv 1$ даёт

$$K_n = \varphi^n + O(\rho^n),$$

что согласуется с точной формулой $K_n = \varphi^n + (-\varphi^{-1})^n$.

Объединяя (3.1) и (3.3) и деля затем на K_n, получаем

$$|\mathbb{E}(\chi_n) - \chi| \le C \left(\Lambda^{-\alpha n} + \left(\frac{\rho}{\varphi} \right)^n \right).$$

Следовательно, утверждение леммы выполняется при $\vartheta = \max\left\{ \Lambda^{-\alpha}, \frac{\rho}{\varphi} \right\} < 1$. □

Введём центрированный периодический показатель Ляпунова $\widehat{\chi}_n := \chi_n - \chi$. По лемме 3.1,

$$\mathbb{E}(\widehat{\chi}_n) \longrightarrow 0.$$

Лемма 3.2. *Существует константа $\sigma^2 \geq 0$ такая, что $\lim_{n\to\infty} n\ \mathrm{Var}(\chi_n) = \sigma^2$. Эквивалентно,*

$$\mathrm{Var}(\chi_n) = \frac{\sigma^2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Кроме того,

$$\sigma^2 = \int_I \widehat{h}^2\, d\mu + 2\sum_{j=1}^{\infty} \int_I \widehat{h}(x)\widehat{h}(f^j(x))\, d\mu(x).$$

Доказательство. Положим $\widehat{\chi}_n := \chi_n - \chi$ и для $0 \leq j < n$ определим

$$A_{n,j} := \frac{1}{K_n} \sum_{p\in \mathrm{Fix}(f^n)} \widehat{h}(p)\widehat{h}(f^j(p)), \qquad C_j := \int_I \widehat{h}(x)\widehat{h}(f^j(x))\, d\mu(x).$$

По лемме 3.1,

$$\mathbb{E}(\widehat{\chi}_n) = O(\vartheta^n),$$

поэтому достаточно вычислить предел $n\,\mathbb{E}(\widehat{\chi}_n^2)$.

Сначала установим равномерную оценку периодических корреляций, необходимую ниже. Пусть β — мера Парри на Σ_A, а $\mathcal{R}$ — нормированный оператор Рюэлля для нулевого потенциала на смешивающем подсдвиге (Σ_A, S). Если $g := \widehat{h} \circ \pi$, то g гёльдерова, и из спектрального разрыва следует

$$\mathcal{R}^m = \Pi + N^m, \qquad \Pi u = \beta(u)\mathbf{1}, \qquad \|N^m u\|_\alpha \leq C\eta^m \|u\|_\alpha$$

для некоторого $\eta \in (0,1)$. Разрезая замкнутое слово длины n после j символов и сначала суммируя по дополнительному блоку длины $n-j$, получаем стандартную оценку корреляций по периодическим орбитам (см., например, [23, 12])

$$A_{n,j} = \beta\big(g\,\mathcal{R}^j g\big) + O(\eta^{n-j}) = C_j + O(\eta^{n-j}), \qquad 0 \leq j \leq \frac{n}{2}. \tag{3.4}$$

Остаток равномерен в указанном диапазоне. Действительно, $\|\mathcal{R}^j g\|_\alpha \leq C\|g\|_\alpha$ равномерно по j, а дополнительный блок содержит множитель N^{n-j}. После перехода через отображение кодирования это в точности тот же разбор по замкнутым путям и диагональным блокам, который использован в лемме 3.1. Тождество вынесения множителя даёт

$$\beta(g\,\mathcal{R}^j g) = \int_I \widehat{h}(x)\widehat{h}(f^j(x))\, d\mu(x) = C_j.$$

Тем самым также явно объясняется равномерность оценки при изменении j.

Раскрывая квадрат и используя тот факт, что f переставляет $\mathrm{Fix}(f^n)$, имеем

$$n\,\mathbb{E}(\widehat{\chi}_n^2) = A_{n,0} + 2\sum_{j=1}^{n-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) A_{n,j}.$$

Та же перестановочность даёт точную симметрию $A_{n,j} = A_{n,n-j}$. Поэтому, если $r_n = \lfloor (n-1)/2 \rfloor$, то

$$n\,\mathbb{E}(\widehat{\chi}_n^2) = A_{n,0} + 2\sum_{j=1}^{r_n} A_{n,j} + \mathbf{1}_{\{2|n\}} A_{n,n/2}. \tag{3.5}$$

Именно это попарное объединение контролирует члены, для которых j близко к n: они точно заменяются корреляциями с лагом $n - j \leq n/2$.

Из (3.4) следует

$$\sum_{j=0}^{r_n} |A_{n,j} - C_j| \leq C \sum_{j=0}^{r_n} \eta^{n-j} \leq Cn\eta^{n/2} \longrightarrow 0.$$

Если n чётно, то

$$|A_{n,n/2}| \le |C_{n/2}| + C\eta^{n/2} \longrightarrow 0,$$

поскольку из следствия 2.1 вытекает

$$|C_j| \le C\theta^j.$$

Следовательно, из (3.5) получаем

$$\lim_{n\to\infty} n\,\mathbb{E}(\widehat{\chi}_n^2) = C_0 + 2\sum_{j=1}^{\infty} C_j.$$

Ряд абсолютно сходится по лемме 2.2, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} n\,\mathbb{E}(\widehat{\chi}_n^2) = \int_I \widehat{h}^2\,d\mu + 2\sum_{j=1}^{\infty}\int_I \widehat{h}(x)\widehat{h}(f^j(x))\,d\mu(x) = \sigma^2.$$

Наконец,

$$n\big(\mathbb{E}\widehat{\chi}_n\big)^2 = O(n\vartheta^{2n}) \longrightarrow 0,$$

что доказывает $\lim_{n\to\infty} n\ \mathrm{Var}(\chi_n) = \sigma^2$.

□

Замечание 3.1. Асимптотическая дисперсия обращается в нуль в точности в вырожденном случае, когда $\widehat{h}$ когомологична нулю. Поэтому, если $\widehat{h} \neq u - u\circ f$ для любой гёльдеровой функции u, то $\sigma^2 > 0$. Далее предполагается выполнение этого условия невырожденности.

Положим

$$S_n := \frac{\sqrt{n}\,(\chi_n - \chi)}{\sigma}$$

и обозначим его характеристическую функцию через

$$\Psi_n(t) := \mathbb{E}\left(e^{itS_n}\right).$$

Тогда

$$\Psi_n(t) = \frac{1}{K_n}\sum_{p\in\mathrm{Fix}(f^n)} \exp\left(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{j=0}^{n-1}\widehat{h}(f^j(p))\right).$$

Лемма 3.3. *Для каждого фиксированного* $t\in\mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty}\Psi_n(t) = e^{-t^2/2}.$$

Доказательство. Напомним, что

$$h(x) = \log|D_{\mathrm{br}}f(x)|, \qquad \widehat{h}(x) = h(x) - \chi.$$

Для $z\in\mathbb{C}$ в окрестности нуля определим возмущённый нормированный оператор переноса

$$\widehat{\mathcal{L}}_z u := \frac{1}{\varphi H}\mathcal{L}\left(e^{z\widehat{h}}Hu\right), \qquad H = \begin{pmatrix}1\\ \varphi\end{pmatrix}.$$

При $z=0$ это оператор $\widehat{\mathcal{L}}$.

Банахово пространство $\mathcal{B} = C^\alpha(I_1)\oplus C^\alpha(I_2)$ является банаховой алгеброй относительно покомпонентного умножения. Поскольку $\widehat{h}\in\mathcal{B}$, отображение

$$z\longmapsto e^{z\widehat{h}} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^m\widehat{h}^m}{m!}$$

является целой $\mathcal{B}$-значной функцией. Следовательно, $z \mapsto \widehat{\mathcal{L}}_z$ аналитично в операторной норме в некоторой окрестности нуля. Собственное значение 1 оператора $\widehat{\mathcal{L}}_0$ простое и изолированное по предложению 2.1. Поэтому аналитическая теория возмущений [24, 12] даёт $\delta > 0$, $\rho \in (0,1)$, аналитическое простое собственное значение $\kappa(z)$, аналитические спектральные проекторы Π_z и операторы N_z, для которых после возможного уменьшения δ

$$\widehat{\mathcal{L}}_z^n = \kappa(z)^n \Pi_z + N_z^n, \qquad \sup_{|z|\le\delta} \|N_z^n\|_{\mathcal{B}} \le C\rho^n. \tag{3.6}$$

Кроме того,

$$\kappa(0) = 1, \qquad \Pi_0 u = \mu(u)\mathbf{1}.$$

Пусть $\mathbf{e}_1 = (1,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1)$, выберем $z_i \in I_i^\circ$ и положим

$$R_n(z) := \sum_{i=1}^{2} \left(\widehat{\mathcal{L}}_z^n \mathbf{e}_i\right)_i (z_i).$$

Раскрывая n-ю итерацию по замкнутым допустимым путям, получаем

$$R_n(z) = \varphi^{-n} \sum_{J \in \mathcal{C}_n^{(1)} \cup \mathcal{C}_n^{(2)}} \exp\left(z \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{h}(f^k(y_J))\right),$$

где $y_J = \tau_J(z_i)$, если $J \in \mathcal{C}_n^{(i)}$. Множители, связанные с H, телескопируются вдоль каждого замкнутого пути. В частности,

$$R_n(0) = \varphi^{-n} K_n = 1 + (-\varphi^{-2})^n. \tag{3.7}$$

Пусть p_J — периодическая точка в J. Из равномерного расширения следует

$$|f^k(p_J) - f^k(y_J)| \le C\Lambda^{k-n}, \qquad 0 \le k \le n-1.$$

Так как $\widehat{h}$ гёльдерова,

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} \widehat{h}(f^k(p_J)) - \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{h}(f^k(y_J))\right| \le C \sum_{r=1}^{n} \Lambda^{-\alpha r} \le C_0,$$

где C_0 не зависит от n и J. Поэтому при

$$z_n = \frac{it}{\sigma\sqrt{n}}$$

неравенство $|e^{ia} - e^{ib}| \le |a-b|$ даёт

$$\Psi_n(t) = \frac{R_n(z_n)}{R_n(0)} + O\left(\frac{|t|}{\sqrt{n}}\right). \tag{3.8}$$

Из (3.6) имеем

$$R_n(z) = \kappa(z)^n a(z) + O(\rho^n), \qquad a(z) := \sum_{i=1}^{2} (\Pi_z \mathbf{e}_i)_i (z_i),$$

равномерно при $|z| \le \delta$. Функция a аналитична, и из (3.7) следует $a(0) = 1$.

Для полноты вычислим первые две производные ведущего собственного значения. Дифференцирование в точке $z = 0$ даёт

$$\widehat{\mathcal{L}}_0' u = \widehat{\mathcal{L}}(\widehat{h}\, u), \qquad \widehat{\mathcal{L}}_0'' u = \widehat{\mathcal{L}}(\widehat{h}^2 u).$$

Нормируем аналитическую собственную функцию v_z условиями

$$\widehat{\mathcal{L}}_z v_z = \kappa(z) v_z, \qquad \mu(v_z) = 1.$$

Тогда $v_0 = \mathbf{1}$, и применение μ к первой производной уравнения на собственную функцию даёт

$$\kappa'(0) = \mu(\widehat{h}) = 0.$$

На подпространстве функций с нулевым средним оператор $I - \widehat{\mathcal{L}}$ обратим, а его обратный задаётся сходящимся рядом Неймана. Поэтому

$$v_0' = \sum_{m=1}^{\infty} \widehat{\mathcal{L}}^{\,m} \widehat{h}.$$

Дифференцируя уравнение на собственную функцию второй раз и применяя μ, получаем

$$\begin{aligned} \kappa''(0) &= \mu(\widehat{h}^2) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \mu\Big(\widehat{h}\, \widehat{\mathcal{L}}^{\,m} \widehat{h}\Big) \\ &= \int_I \widehat{h}^2 \, d\mu + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \int_I \widehat{h}(x) \widehat{h}(f^m(x)) \, d\mu(x) = \sigma^2, \end{aligned}$$

где во втором равенстве использовано тождество вынесения множителя. Так как $\kappa(0) = 1$ и $\kappa'(0) = 0$,

$$(\log \kappa)'(0) = 0, \qquad (\log \kappa)''(0) = \sigma^2.$$

Из аналитичности теперь следует равномерная оценка Тейлора: для некоторых $\delta_0 > 0$ и $C > 0$

$$\left| \log \kappa(z) - \frac{\sigma^2}{2} z^2 \right| \le C|z|^3, \qquad |z| \le \delta_0.$$

Для каждого фиксированного t точка z_n принадлежит этому кругу при всех достаточно больших n, и поэтому

$$n \log \kappa(z_n) = -\frac{t^2}{2} + O\left(\frac{|t|^3}{\sqrt{n}} \right).$$

Следовательно, $\kappa(z_n)^n \longrightarrow e^{-t^2/2}$. Одновременно

$$a(z_n) \longrightarrow a(0) = 1, \qquad R_n(0) \longrightarrow 1, \qquad \rho^n \longrightarrow 0.$$

Объединяя эти факты с (3.8), получаем

$$\Psi_n(t) \longrightarrow e^{-t^2/2}.$$

□

Доказательство теоремы 1.1. По лемме 3.3 характеристические функции величин

$$X_n = \frac{\sqrt{n}\,(\chi_n - \chi)}{\sigma}$$

сходятся поточечно к $e^{-t^2/2}$, то есть к характеристической функции стандартного нормального распределения. По теореме непрерывности Леви

$$\frac{\sqrt{n}\,(\chi_n - \chi)}{\sigma} \Longrightarrow \mathcal{N}(0,1).$$

Следовательно, для любых $a < b$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_n \left(\frac{\sqrt{n}\,(\chi_n - \chi)}{\sigma} \in [a,b] \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} \, dx.$$

Это завершает доказательство основной теоремы. □

4. Численные эксперименты

В этом разделе приводятся воспроизводимые численные иллюстрации теоремы 1.1. Вычисления не используются в доказательстве.

Пусть

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad c = \frac{1}{\varphi^2}, \qquad I_1 = [0, c], \qquad I_2 = [c, 1].$$

Для $\varepsilon \in (-1, 1)$ определим

$$s_\varepsilon(u) = u + \varepsilon u(1-u), \qquad 0 \le u \le 1,$$

и рассмотрим семейство

$$f_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(x) = \begin{cases} c + (1-c)s_{\varepsilon_1}\left(\dfrac{x}{c}\right), & x \in I_1, \\ 1 - s_{\varepsilon_2}\left(\dfrac{x-c}{1-c}\right), & x \in I_2. \end{cases}$$

Тогда $f_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(I_1) = I_2, \qquad f_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(I_2) = I$, и

$$|f'_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(x)| = \begin{cases} \varphi\left|1 + \varepsilon_1\left(1 - \dfrac{2x}{c}\right)\right|, & x \in I_1, \\ \varphi\left|1 + \varepsilon_2\left(1 - \dfrac{2(x-c)}{1-c}\right)\right|, & x \in I_2. \end{cases}$$

Следовательно, условие $|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2| < \frac{1}{\varphi^2}$ обеспечивает равномерное расширение.

Рассматриваются те же два нелинейных отображения $f_A := f_{0.25,-0.20}, \qquad f_B := f_{-0.30,0.18}$, для значений $n = 20, \qquad n = 50, \qquad n = 100$.

Для каждого n равномерно выбираются $120\,000$ допустимых замкнутых слов. Точный алгоритм выборки имеет следующий вид. Сначала начальное состояние $i \in \{1, 2\}$ выбирается с вероятностью

$$\mathbb{P}(\omega_0 = i) = \frac{(A^n)_{ii}}{\operatorname{tr}(A^n)}.$$

После фиксации $\omega_0 = i$, если $\omega_k = r$ и $0 \le k \le n-2$, допустимое следующее состояние s выбирается с условной вероятностью

$$\mathbb{P}(\omega_{k+1} = s \mid \omega_k = r, \omega_0 = i) = \frac{A_{rs}(A^{n-k-1})_{si}}{(A^{n-k})_{ri}}.$$

Числитель равен числу продолжений, проходящих через переход $r \to s$, а знаменатель — общему числу продолжений из r обратно в начальное состояние i. Перемножение условных вероятностей показывает, что каждое замкнутое допустимое слово длины n имеет вероятность

$$\frac{1}{\operatorname{tr}(A^n)}.$$

Для выбранного слова $\omega = (\omega_0, \ldots, \omega_{n-1})$ соответствующая периодическая точка является единственной неподвижной точкой сжимающей композиции обратных ветвей, связанной с данным замкнутым путём. Итерации для нахождения неподвижной точки останавливаются, когда две последовательные итерации отличаются менее чем на 10^{-14}; максимальное число итераций равно 50. Чтобы избежать потери точности из-за прямого расширения при больших n, орбита и сумма

$$\chi_n(p) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \log|D_{\mathrm{br}} f(f^k(p))|$$

вычисляются при обратном обходе периодического цикла по обратным ветвям. Все вычисления выполнены в двойной точности с начальным значением генератора случайных чисел 20261109. Полный код Python, использованный в эксперименте, прилагается к исходным файлам статьи.

Теоретическая нормировка в теореме 1.1 содержит предельные величины χ и σ, которые для двух рассматриваемых нелинейных примеров не имеют замкнутых формул. Поэтому на графиках используется величина

$$Z_n = \frac{\chi_n - \overline{\chi}_n}{s_n}$$

только для визуализации формы распределения, где $\overline{\chi}_n$ и s_n — выборочное среднее и выборочное стандартное отклонение Монте-Карло. Эту графическую стандартизацию не следует смешивать с нормировкой в теореме 1.1. Для отдельного контроля теоретического масштаба в таблице 1 приведены $\overline{\chi}_n$ и $\sqrt{n}\, s_n$. Последняя величина должна стабилизироваться вблизи асимптотического стандартного отклонения σ.

Для количественного сравнения с гауссовским законом обозначим через $\widehat{F}_{n,N}$ эмпирическую функцию распределения стандартизованной выборки Монте-Карло и положим

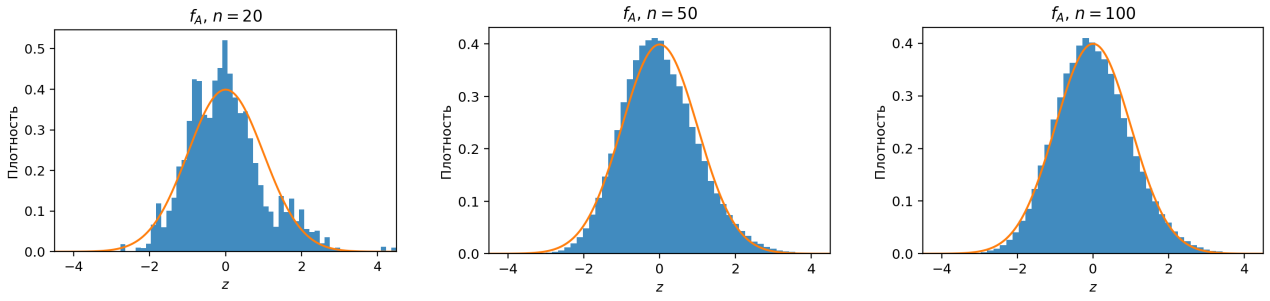
$$D_{n,N} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \widehat{F}_{n,N}(x) - \Phi(x) \right|,$$

где Φ — функция распределения стандартного нормального закона.

Таблица 1. Результаты Монте-Карло по $N = 120\,000$ равномерно выбранным замкнутым допустимым маршрутам.

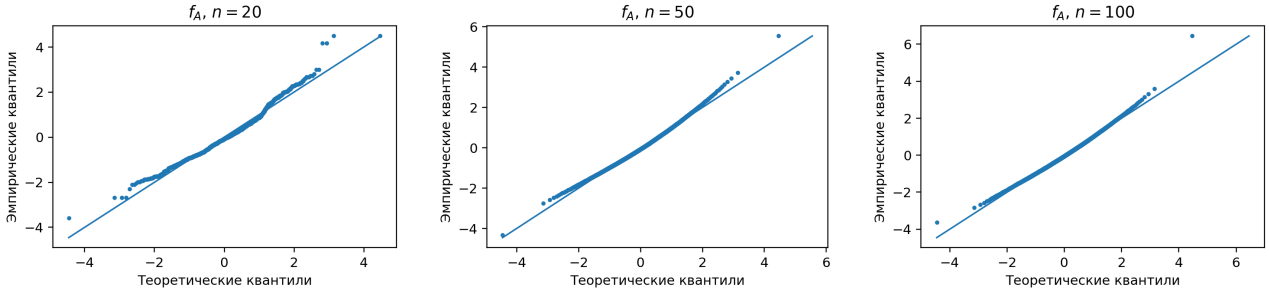
Отображение	n	$\overline{\chi}_n$	s_n	$\sqrt{n}\, s_n$	$D_{n,N}$
f_A	20	0.482260	0.010315	0.046130	0.057088
f_A	50	0.482204	0.006480	0.045820	0.027379
f_A	100	0.482216	0.004597	0.045973	0.018865
f_B	20	0.485309	0.019054	0.085211	0.096854
f_B	50	0.485423	0.011933	0.084380	0.045439
f_B	100	0.485393	0.008479	0.084791	0.031786

Для обоих примеров средние значения и величины $\sqrt{n}\, s_n$ уже достаточно стабильны в рассматриваемом диапазоне n, тогда как эмпирическое расстояние Колмогорова уменьшается с ростом n. На рис. 1–4 приведены соответствующие гистограммы и Q–Q-диаграммы.



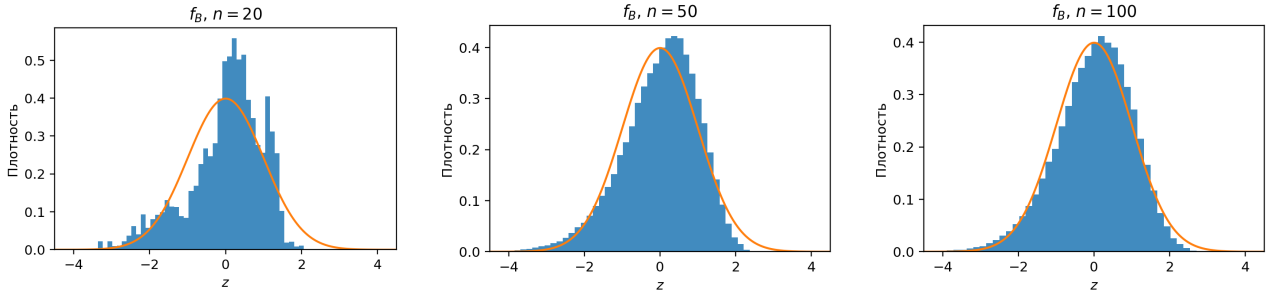
(a) $n = 20$ (b) $n = 50$ (c) $n = 100$

Рис. 1. Стандартизованные эмпирические распределения для f_A. Кривая на каждой панели — плотность стандартного нормального распределения.



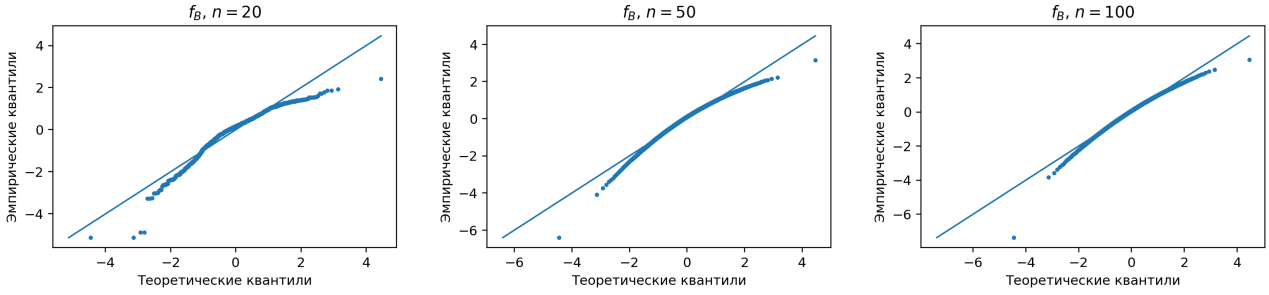
(a) $n = 20$ (b) $n = 50$ (c) $n = 100$

Рис. 2. Нормальные Q–Q-диаграммы для стандартизованных периодических показателей Ляпунова отображения f_A.



(a) $n = 20$ (b) $n = 50$ (c) $n = 100$

Рис. 3. Стандартизованные эмпирические распределения для f_B. Кривая на каждой панели — плотность стандартного нормального распределения.



(a) $n = 20$ (b) $n = 50$ (c) $n = 100$

Рис. 4. Нормальные Q–Q-диаграммы для стандартизованных периодических показателей Ляпунова отображения f_B.

Полученные диагностические результаты согласуются с гауссовским асимптотическим поведением, установленным в теореме 1.1. Они служат только численными иллюстрациями и не заменяют доказательство, основанное на операторе переноса.

5. Заключение

Исследовано эмпирическое распределение периодических показателей Ляпунова для двухветвевых расширяющих марковских отображений с неполной ветвью. Используя марковскую структуру и спектральные свойства соответствующего оператора переноса, получена центральная предельная теорема для показателей Ляпунова на множествах неподвижных точек $\mathrm{Fix}(f^n)$ при естественном условии невырожденности $\sigma^2 > 0$.

Численные эксперименты подтверждают гауссовское асимптотическое поведение, предсказываемое теоремой. Представляет интерес распространить данный подход на расширяющие марковские отображения с произвольной конечной примитивной матрицей переходов, а также исследовать количественные скорости сходимости и более тонкие предельные теоремы для периодических показателей Ляпунова.

Список литературы

[1] W. Parry, *Intrinsic Markov chains*, Trans. Amer. Math. Soc. **112** (1964), 55–66.
[2] W. Parry, *Symbolic dynamics and transformations of the unit interval*, Trans. Amer. Math. Soc. **122** (1966), 368–378.
[3] C. McMullen, *Dynamics on the unit disk: short geodesics and simple cycles*, Comment. Math. Helv. **85** (2010), 723–749.
[4] K. Drach, Z. Fu, V. Kaloshin, Z. Li, and C. Liverani, *Normal distribution of Lyapunov exponents of periodic orbits for expanding circle maps*, arXiv:2511.15662, 2025.
[5] A. Katok and B. Hasselblatt, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 54, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
[6] M. S. Green, *Markoff random processes and the statistical mechanics of time-dependent phenomena. II. Irreversible processes in fluids*, J. Chem. Phys. **22** (1954), 398–413.
[7] R. Kubo, *Statistical-mechanical theory of irreversible processes. I. General theory and simple applications to magnetic and conduction problems*, J. Phys. Soc. Japan **12** (1957), 570–586.
[8] I. Gekhtman, S. J. Taylor, and G. Tiozzo, *A central limit theorem for random closed geodesics: proof of the Chas–Li–Maskit conjecture*, Adv. Math. **358** (2019), 106852.
[9] M. Chas, K. Li, and B. Maskit, *Experiments suggesting that the distribution of the hyperbolic length of closed geodesics sampling by word length is Gaussian*, Exp. Math. **22** (2013), 367–371.
[10] Z. Coelho and W. Parry, *Central limit asymptotics for shifts of finite type*, Israel J. Math. **69** (1990), 235–249.
[11] A. N. Livshits, *Cohomology of dynamical systems*, Math. USSR-Izv. **6** (1972), 1278–1301.
[12] V. Baladi, *Positive Transfer Operators and Decay of Correlations*, Advanced Series in Nonlinear Dynamics, Vol. 16, World Scientific, Singapore, 2000.
[13] P. Walters, *An Introduction to Ergodic Theory*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 79, Springer-Verlag, New York, 1982.
[14] R. Bowen, *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 470, Springer-Verlag, Berlin, 1975.
[15] D. Ruelle, *Thermodynamic Formalism: The Mathematical Structures of Classical Equilibrium Statistical Mechanics*, Addison–Wesley, Reading, MA, 1978.
[16] M. Pollicott and M. Yuri, *Dynamical Systems and Ergodic Theory*, London Mathematical Society Student Texts, Vol. 40, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
[17] F. Przytycki and M. Urbański, *Conformal Fractals: Ergodic Theory Methods*, London Mathematical Society Lecture Note Series, Vol. 371, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
[18] M. F. Demers, N. Kiamari, and C. Liverani, *Transfer Operators in Hyperbolic Dynamics: An Introduction*, 33rd Brazilian Mathematics Colloquium, IMPA, Rio de Janeiro, 2021.
[19] O. Butterley, N. Kiamari, and C. Liverani, *Locating Ruelle–Pollicott resonances*, Nonlinearity **35** (2022), 513–566.
[20] S. Gouëzel, *Limit theorems in dynamical systems using the spectral method*, Proc. Sympos. Pure Math. **89** (2015), 161–193.
[21] L. Dubois, *An explicit Berry–Esséen bound for uniformly expanding maps on the interval*, Israel J. Math. **186** (2011), 221–250.
[22] K. Fernando and F. Pène, *Expansions in the local and the central limit theorems for dynamical systems*, Comm. Math. Phys. **389** (2022), 273–347.
[23] W. Parry and M. Pollicott, *Zeta Functions and the Periodic Orbit Structure of Hyperbolic Dynamics*, Astérisque **187–188** (1990), 1–272.
[24] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, 2nd ed., Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1995.

Normal Distribution of Periodic Lyapunov Exponents for Two-Branch Non-Full Expanding Markov Maps

Mukhriddin Khomidov

Abstract

We study the distribution of Lyapunov exponents of periodic points for a class of two-branch non-full expanding Markov maps of the interval. For each $n \geq 1$, we consider the empirical distribution of the Lyapunov exponents over the fixed-point

set $\mathrm{Fix}(f^n)$. Assuming that the asymptotic variance is positive, we prove that, after centering at the Lyapunov exponent with respect to the measure of maximal entropy and applying the natural $\sqrt{n}$-normalization, these empirical distributions converge to the standard normal distribution. The proof relies on the properties of the transfer operator associated with the underlying non-full Markov structure. We also provide numerical experiments illustrating the Gaussian behavior of the periodic Lyapunov exponents.

Keywords

Expanding Markov maps; non-full branches; periodic points; Lyapunov exponents; central limit theorem; transfer operators.

Сведения об авторе

Мухриддин Каримжон угли Хомидов
Address: Институт математики им. В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан; Международная исламская академия Узбекистана, Ташкент 100011, Узбекистан.
e-mail: mkhomidov0306@mail.ru
ORCID ID: https://orcid.org/0000-0001-5151-6048