



СОЛИТОННОЕ РЕШЕНИЕ СВЯЗАННОЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ КЛЕЙНА–ГОРДОНА НА МЕТРИЧЕСКИХ ГРАФАХ

Асадов Кувончбек Уринович*

Аннотация

В данной работе рассматривается связанная система нелинейных уравнений Клейна–Гордона на простой сети, представляющей собой звездообразный граф. Доказана теорема о существовании солитонного решения рассматриваемой системы и его безотражательном прохождении через вершину графа. Основное внимание уделяется поведению волн в точке соединения, где накладываются условия непрерывности с весовыми коэффициентами и обобщённое правило Кирхгофа. С помощью аналитического подхода, основанного на склеивании солитонных решений на вершине графа, выводится правило суммы для нелинейностей связанной системы уравнений Клейна–Гордона на метрическом звездообразном графе. Это правило позволяет найти такие солитонные решения, которые проходят через вершину без отражения. Также показано, что для рассматриваемых солитонных решений на метрических звездообразных графах сохраняются функциональные выражения законов сохранения.

Ключевые слова: связанная система нелинейных уравнений Клейна–Гордона; вершинные граничные условия; обобщенное правило Кирхгофа; безотражательное прохождение; солитонное решение; звездообразный граф.

Предметная классификация AMS (2020): Основная: 35R02 ; Дополнительная: 35C08; 35L10.

1. Введение

В течение прошедшего столетия нелинейные эволюционные уравнения, такие как нелинейное уравнение Шрёдингера (НУШ), уравнение Кортевега–де Фриза (УКдФ), уравнение синус-Гордона и нелинейное уравнение Клейна–Гордона (НУКГ), исследовались во многих работах [1]–[4] благодаря широкому спектру их приложений. Для нахождения солитонных, кинк-антикинковых и «дышащих» решений на вещественной прямой эти уравнения могут быть решены с помощью метода обратной задачи рассеяния. Вместе с тем численные решения получают с использованием различных дискретных схем, в том числе обусловленных интегрируемостью нелинейных эволюционных уравнений (см., например, [5]–[7]).

В данной работе мы основываемся на нелинейном уравнении Клейна–Гордона, которое находит широкое применение в теории частиц и полей, физике конденсированного состояния и физике твёрдого тела, теории сверхпроводимости и джозефсоновских переходов, нелинейной оптике, космологии и общей теории относительности (см., например, [8]–[14]). Связанные системы нелинейных уравнений

Клейна–Гордона с кубической нелинейностью представляют собой модельные системы, в которых два волновых поля взаимодействуют посредством как собственного, так и перекрёстного взаимодействия. Наиболее непосредственное применение таких систем связано с нелинейной оптикой, где они описывают две поляризационные или частотные компоненты света в оптическом волокне с учётом самофазовой и перекрёстной фазовой модуляции и допускают существование векторных солитонов. Кроме того, такие системы возникают при описании двухкомпонентных конденсатов Бозе–Эйнштейна, взаимодействующих скалярных полей в космологии и теории элементарных частиц, связанных высоко- и низкочастотных мод в плазме, а также динамики двух цепей ДНК. Помимо физических приложений, данная система служит стандартной тестовой моделью для проверки численных методов, сохраняющих энергию (см. [15]–[25]).

Вместе с тем нелинейные эволюционные уравнения на метрических графах привлекли значительное внимание после появления пионерских работ [26]–[27]. В работе [28] была доказана глобальная корректность задачи в энергетическом пространстве, а также установлены законы сохранения для нелинейного уравнения Шрёдингера на звездообразных графах при некоторых самосопряжённых граничных условиях на вершине, в частности при граничном условии Кирхгофа, а также при так называемых граничных условиях δ и δ' . Модель Манакова или, в более общем случае, векторное нелинейное уравнение Шрёдингера на полуоси исследовалось в работе [29]. В работе [30] было показано, что столкновения солитонов приводят к интересным изменениям фаз в связанных нелинейных системах Шрёдингера типа Манакова и смешанного типа с двумя компонентами на исходном звездообразном графе. Другие результаты, касающиеся нелинейных эволюционных уравнений на метрических графах, представлены в работах [31]–[37].

В настоящей работе мы рассматриваем связанную систему нелинейных уравнений Клейна–Гордона на метрических графах. Прежде всего, мы вводим два типа граничных условий на вершине звездообразного графа с тремя полубесконечными рёбрами. Затем мы устанавливаем, что солитонное решение удовлетворяет всем трём законам сохранения на данном графе, и получаем правило суммирования, обеспечивающее склеивание солитонных решений на вершине звездообразного графа.

2. Связанная система уравнений Клейна–Гордона с кубической нелинейностью на звездообразном графе

Мы рассматриваем следующее связанной системы нелинейного уравнения Клейна–Гордона на каждом ребре метрического звездообразного графа (рис. 1) с полубесконечными рёбрами [17], при $k = a_1 = a_2 = 1$ и $b_1 = b_2 = c_1 = c_2 = -\alpha_j$:

$$\partial_{tt}^2 q_j - \partial_{xx}^2 q_j + q_j - \alpha_j q_j^3 - \alpha_j q_j r_j^2 = 0, \quad (2.1)$$

$$\partial_{tt}^2 r_j - \partial_{xx}^2 r_j + r_j - \alpha_j r_j^3 - \alpha_j q_j^2 r_j = 0, \quad (2.2)$$

где $j = 1, 2, 3$.

Точные односолитонные решения уравнений (2.1) и (2.2) имеют вид [24]:

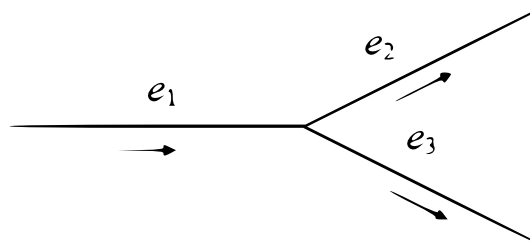


Рис. 1. Метрический звездообразный граф.

$$q_j(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha_j}} \operatorname{sech}(g(x, t)), \quad (2.3)$$

$$r_j(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha_j}} \operatorname{sech}(g(x, t)), \quad (2.4)$$

где $g(x, t) = \frac{x-x_0-vt}{\sqrt{1-v^2}}$, x_0 – центр положения солитона, v – скорость солитона ($0 < v < 1$), α_j , $j = 1, 2, 3$ – произвольные положительные константы.

Здесь мы видим, что $q_j(x, t) = r_j(x, t)$.

Двумя граничными условиями, удовлетворяющими этому требованию, являются условия взвешенной непрерывности:

$$\delta_1 q_1|_{x=0} = \delta_2 q_2|_{x=0} = \delta_3 q_3|_{x=0}, \quad (2.5)$$

$$\rho_1 r_1|_{x=0} = \rho_2 r_2|_{x=0} = \rho_3 r_3|_{x=0}, \quad (2.6)$$

и условия сохранения тока с весами (также рассматривавшиеся в [4]):

$$\frac{1}{\delta_1} \partial_x q_1|_{x=0} = \frac{1}{\delta_2} \partial_x q_2|_{x=0} + \frac{1}{\delta_3} \partial_x q_3|_{x=0}, \quad (2.7)$$

$$\frac{1}{\rho_1} \partial_x r_1|_{x=0} = \frac{1}{\rho_2} \partial_x r_2|_{x=0} + \frac{1}{\rho_3} \partial_x r_3|_{x=0}, \quad (2.8)$$

где $\delta_j \neq 0$, $\rho_j \neq 0$, $j = 1, 2, 3$ — вещественные константы, которые либо все положительны, либо все отрицательны.

3. Безотражательное прохождение солитона связанной системы нелинейных уравнений Клейна–Гордона через вершину звездообразного графа

Теорема 3.1. Если система уравнений (2.1) и (2.2) с граничными условиями на вершине графа (2.5) и (2.7) имеет солитонные решения вида (2.3) и (2.4), то необходимым и достаточным условием для безотражательного перехода солитона через вершину графа справедливо правило сумма коэффициентов нелинейности:

$$\frac{1}{\alpha_1} = \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3}. \quad (3.1)$$

Доказательство. Очевидно, что система уравнений имеет решения вида (2.3) и (2.4). Выполняя условия (2.5), получаем первое тождество:

$$\delta_1 \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} \operatorname{sech}\left(\frac{-x_0 - vt}{\sqrt{1-v^2}}\right) = \delta_2 \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \operatorname{sech}\left(\frac{-x_0 - vt}{\sqrt{1-v^2}}\right) = \delta_3 \frac{1}{\sqrt{\alpha_3}} \operatorname{sech}\left(\frac{-x_0 - vt}{\sqrt{1-v^2}}\right),$$

тогда

$$\frac{\delta_1}{\sqrt{\alpha_1}} = \frac{\delta_2}{\sqrt{\alpha_2}} = \frac{\delta_3}{\sqrt{\alpha_3}}. \quad (3.2)$$

Выполняя условия (2.7) и находя производные солитонного решения по x :

$$\partial_x q_j(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha_j}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-v^2}} \operatorname{sech}(g) \cdot \tanh(g),$$

$$(\partial_x r_j(x, t) = \partial_x q_j(x, t))$$

получаем следующие тождество

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\delta_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-v^2}} \operatorname{sech} \left(\frac{-x_0 - vt}{\sqrt{1-v^2}} \right) \cdot \tanh \left(\frac{-x_0 - vt}{\sqrt{1-v^2}} \right) = \\ & = \left[\frac{1}{\delta_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} + \frac{1}{\delta_3} \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha_3}} \right] \frac{-1}{\sqrt{1-v^2}} \operatorname{sech} \left(\frac{-x_0 - vt}{\sqrt{1-v^2}} \right) \cdot \tanh \left(\frac{-x_0 - vt}{\sqrt{1-v^2}} \right), \\ & \frac{1}{\delta_1 \sqrt{\alpha_1}} = \frac{1}{\delta_2 \sqrt{\alpha_2}} + \frac{1}{\delta_3 \sqrt{\alpha_3}}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Из равенства (3.2) находим δ_2 и δ_3 относительно δ_1 , так как $\delta_{2,3} = \frac{\delta_1}{\sqrt{\alpha_1}} \sqrt{\alpha_{2,3}}$, далее подставляя их в (3.3),

$$\frac{1}{\delta_1 \sqrt{\alpha_1}} = \frac{\sqrt{\alpha_1}}{\delta_1 \sqrt{\alpha_2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} + \frac{\sqrt{\alpha_1}}{\delta_1 \sqrt{\alpha_3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha_3}},$$

получаем правило сумма для нелинейностей (3.1).

Таким образом, Теорема 3.1 доказана. $\square$

Теорема 3.2. Если система уравнений (2.1) и (2.2) с граничными условиями на вершине графа (2.6) и (2.8) имеет солитонные решения вида (2.3) и (2.4), то необходимым и достаточным условием для безотражательного перехода солитона через вершине графа справедливо правило сумма нелинейностей (3.1).

Доказательство. Из условий (2.6) и (2.8) аналогично получаем следующие формулы с учётом ρ_j :

$$\frac{\rho_1}{\sqrt{\alpha_1}} = \frac{\rho_2}{\sqrt{\alpha_2}} = \frac{\rho_3}{\sqrt{\alpha_3}}, \quad (3.4)$$

$$\frac{1}{\rho_1 \sqrt{\alpha_1}} = \frac{1}{\rho_2 \sqrt{\alpha_2}} + \frac{1}{\rho_3 \sqrt{\alpha_3}}. \quad (3.5)$$

Следовательно, для (3.4) и (3.5) справедливо правило суммы для нелинейностей (3.1). Таким образом, теорема 3.2 доказывается аналогично теореме 3.1. $\square$

Замечание 3.1. Правило суммы необходимо для солитонного решения на графе, чтобы это решение имело поведение как на прямой линии, то есть солитон подходит к вершине графа по первому ребру хоть бы ее часть обратно не возвращается. Мы не рассматриваем задачу рассеяния, а исследуем безотражательного прохождения солитона через вершине графа.

4. Функциональные представления законов сохранения на звездообразном графе

I_1 — интеграл буста, или интеграл центра энергии. У данного солитона центр в момент $t = 0$ находится в точке $x = 0$ и движется по закону $x = vt$, поэтому $I_1 = 0$. I_2 — полная энергия (гамильтониан) двух связанных полей. Она складывается из кинетической энергии (q_t^2), градиентной энергии ($k^2 q_x^2$), массовой энергии ($a q^2$), энергии самодействия ($b q^4$) и энергии перекрёстной связи ($c_1 c_2 q^2 r^2$). Она сохраняется, потому что коэффициенты не зависят от t . I_3 — полный линейный импульс, который переносит солитон. Он сохраняется, потому что коэффициенты не зависят от x . Он равен нулю для неподвижного солитона ($v = 0$) и меняет знак при смене направления движения. Знак минус возникает только из-за плотности $q_t q_x$, которая отрицательна при $v > 0$.

Первая функциональная форма, названной интегралом центра энергии для связанной системы нелинейных уравнений Клейна–Гордона на метрическом звездообразном графе определяется следующим образом:

$$I^{(1)} = \sum_{j=1}^3 I_j^{(1)}, \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned}
 I_j^{(1)} = & \frac{1}{4} \int_{e_j} [-\alpha_j x q_j^4 + 2x r_j^2 - \alpha_j x r_j^4 + 2x q_j^2 - 2\alpha_j x q_j^2 r_j^2 + \\
 & + 2x(\partial_t q_j)^2 + 2t \partial_t q_j \partial_x q_j + 2x(\partial_t r_j)^2 + 2t \partial_x r_j \partial_t r_j - 2q_j \partial_x q_j + \\
 & + 2t q_j \partial_{xt}^2 q_j - 2x q_j \partial_{xx}^2 q_j - 2r_j \partial_x r_j + 2t r_j \partial_{xt}^2 r_j - 2x r_j \partial_{xx}^2 r_j] dx.
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Из (4.1) и (4.2) получаем:

$$\begin{aligned}
 I^{(1)} = & \sum_{j=1}^3 \int_{e_j} \frac{1}{\alpha_j} \left[\frac{x}{1-v^2} \cdot \operatorname{sech}^4(g) + \frac{vt}{1-v^2} \cdot \operatorname{sech}^2(g)(1-3 \tanh^2(g)) + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \cdot \operatorname{sech}^2(g) \cdot \tanh(g) \right] dx = \\
 = & \frac{1}{\alpha_1} \int_{-\infty}^0 \left[\frac{x}{1-v^2} \cdot \operatorname{sech}^4(g) + \frac{vt}{1-v^2} \cdot \operatorname{sech}^2(g)(1-3 \tanh^2(g)) + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \cdot \operatorname{sech}^2(g) \cdot \tanh(g) \right] dx + \\
 + & \left(\frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} \right) \int_0^{+\infty} \left[\frac{x}{1-v^2} \cdot \operatorname{sech}^4(g) + \frac{vt}{1-v^2} \cdot \operatorname{sech}^2(g)(1-3 \tanh^2(g)) + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \cdot \operatorname{sech}^2(g) \cdot \tanh(g) \right] dx = \\
 = & \frac{1}{\alpha_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{x}{1-v^2} \cdot \operatorname{sech}^4(g) + \frac{vt}{1-v^2} \cdot \operatorname{sech}^2(g)(1-3 \tanh^2(g)) + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \cdot \operatorname{sech}^2(g) \cdot \tanh(g) \right] dx = \\
 = & \frac{1}{\alpha_1} \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \cdot \left[x \cdot \left(\tanh(g) - \frac{\tanh^3(g)}{3} \right) \right] \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\tanh(g) - \frac{\tanh^3(g)}{3} \right] dx + \right. \\
 & \left. + \frac{vt}{\sqrt{1-v^2}} \cdot [\tanh(g) - \tanh^3(g)] \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2} \cdot \tanh^2(g) \Big|_{-\infty}^{+\infty} \right) = \\
 = & \frac{1}{\alpha_1} \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \cdot \left(\frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow -\infty} x \right) - \ln |\cosh(g)| \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{3} \ln |\cosh(g)| \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{6} \tanh^2(g) \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{vt}{\sqrt{1-v^2}} \cdot [\tanh(g) \cdot \operatorname{sech}^2(g)] \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2} \cdot \tanh^2(g) \Big|_{-\infty}^{+\infty} \right) = \\
 = & \frac{1}{\alpha_1} \left[-\frac{4}{3} \cdot \ln |\cosh(g)| \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{3} \cdot \tanh^2(g) \Big|_{-\infty}^{+\infty} \right] = \\
 = & \frac{1}{\alpha_1} \cdot \frac{-4}{3} \left(\lim_{g \rightarrow +\infty} \ln |\cosh(g)| - \lim_{g \rightarrow -\infty} \ln |\cosh(g)| \right) = 0.
 \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим вторая функциональная форма, которого связывается с полной энергией:

$$I^{(2)} = \sum_{j=1}^3 I_j^{(2)} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}
 I^{(2)} = & \frac{1}{4} \int_{e_j} [-\alpha_j q_j^4 + 2r_j^2 - \alpha_j r_j^4 + 2q_j^2 - 2\alpha_j q_j^2 r_j^2 + \\
 & + 2(\partial_t q_j)^2 + 2(\partial_t r_j)^2 - 2q_j \partial_{xx}^2 q_j - 2r_j \partial_{xx}^2 r_j] dx.
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Следовательно, из (4.3) и (4.4) полная энергия $I^{(2)}$ имеет вид:

$$\begin{aligned}
 I^{(2)} &= \sum_{j=1}^3 \int_{e_j} \left[\frac{1}{\alpha_j} \cdot \frac{1}{1-v^2} \cdot \operatorname{sech}^4(g) \right] dx = \\
 &= \frac{1}{1-v^2} \left[\frac{1}{\alpha_1} \int_{-\infty}^0 \operatorname{sech}^4(g) dx + \left(\frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} \right) \int_0^{+\infty} \operatorname{sech}^4(g) dx \right] = \\
 &= \frac{1}{1-v^2} \cdot \frac{1}{\alpha_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^4(g) dx = \frac{1}{\alpha_1} \cdot \frac{1}{1-v^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(g) \cdot [1 - \tanh^2(g)] dx = \\
 &= \frac{1}{\alpha_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} [1 - \tanh^2(g)] d(\tanh(g)) = \\
 &= \frac{1}{\alpha_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \cdot \left(\tanh(g) - \frac{\tanh^3(g)}{3} \right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \\
 &= \frac{1}{\alpha_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3\alpha_1 \sqrt{1-v^2}}.
 \end{aligned}$$

Третья функциональная форма задаётся величиной $I^{(3)}$ которого связывается с полным линейным импульсом:

$$I^{(3)} = \sum_{j=1}^3 I_j^{(3)}. \quad (4.5)$$

$$I^{(3)} = \frac{1}{2} \int_{e_j} [\partial_t q_j \partial_x q_j + \partial_t r_j \partial_x r_j - q_j \partial_{xt}^2 q_j - r_j \partial_{xt}^2 r_j] dx. \quad (4.6)$$

Таким образом, из (4.5) и (4.6) полная энергия $I^{(3)}$ имеет вид:

$$\begin{aligned}
 I^{(3)} &= \sum_{j=1}^3 \int_{e_j} \left[\frac{1}{\alpha_j} \cdot \frac{-v}{1-v^2} \cdot \operatorname{sech}^4(g) \right] dx = \\
 &= \frac{-v}{1-v^2} \left[\frac{1}{\alpha_1} \int_{-\infty}^0 \operatorname{sech}^4(g) dx + \left(\frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} \right) \int_0^{+\infty} \operatorname{sech}^4(g) dx \right] = \\
 &= \frac{-v}{1-v^2} \cdot \frac{1}{\alpha_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^4(g) dx = \frac{1}{\alpha_1} \cdot \frac{-v}{1-v^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(g) \cdot [1 - \tanh^2(g)] dx = \\
 &= \frac{1}{\alpha_1} \cdot \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} [1 - \tanh^2(g)] d(\tanh(g)) = \\
 &= \frac{1}{\alpha_1} \cdot \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}} \cdot \left(\tanh(g) - \frac{\tanh^3(g)}{3} \right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \\
 &= \frac{1}{\alpha_1} \cdot \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}} \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{-4v}{3\alpha_1 \sqrt{1-v^2}}.
 \end{aligned}$$

5. Заключение

В данной работе исследована связанная система нелинейных уравнений Клейна–Гордона на метрических графах. На основе обобщённых условий непрерывности и сохранения тока в точках разветвления (вершинах графа) получено ограничение на коэффициенты нелинейности, имеющее вид правила сумм.

С использованием точных односолитонных решений показано, что выражения для трёх законов сохранения сохраняются при выполнении указанного правила сумм, что обеспечивает безотражательное прохождение солитонов через вершину графа. Анализ показывает, что отражение в точке разветвления отсутствует только при выполнении этого правила.

Полученные результаты могут быть использованы для моделирования динамики солитонов в классических теориях поля, например, при исследовании солитонов Янга–Миллса в разветвлённых структурах, а также в сетях космических струн. В случае сетей космических струн теоретико-полевое описание струн может быть сведено к различным нелинейным эволюционным уравнениям на метрических графах, включая связанные системы нелинейных уравнений Клейна–Гордона.

Результаты работы могут также применяться для моделирования распространения, рассеяния и разделения солитонов и кинков в узлах взаимосвязанных волноводных каналов, например, в разветвлённых схемах джозефсоновских переходов, сетях оптических волокон и волноводов, а также в древовидных молекулярных цепочках и цепочках с петлями, таких как разветвлённые молекулы ДНК. Исследование нелинейных уравнений на таких графах позволяет определить вершинные условия, обеспечивающие безотражательное прохождение солитонов через соединения. Это важно для проектирования систем маршрутизации сигналов и переноса энергии, использующих нелинейные волны.

Список литературы

- [1] Ablowitz, M.J. and Segur, H.: Solitons and the inverse scattering transform. SIAM. Philadelphia (1981).
- [2] Ablowitz, M.J. and Clarkson, P.A.: Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering. Cambridge university press. Cambridge (1991).
- [3] Greiner, W.: Relativistic quantum mechanics-wave equations. 3rd edition. Springer-Verlag, Berlin (2000).
- [4] Berkolaiko, G. and Kuchment, P.: Introduction to quantum graphs. Mathematical surveys and monographs. American mathematical society. **186**, (2012).
- [5] Ablowitz, M.J., Kruskal, M.D. and Ladik, J.F.: *Solitary wave collisions*. SIAM journal on applied mathematics. **36** (3), 428-437 (1979). <https://doi.org/10.1137/0136033>
- [6] Clarkson, P.A., McLeod, J.B., Olver P.J., & Ramani A.: *Integrability of Klein–Gordon equations*. SIAM journal on mathematical analysis. **17** (4), 798-802 (1986).
- [7] Jiménez, S., Vázquez, L.: *Analysis of four numerical schemes for a nonlinear Klein-Gordon equation*. App. Math. and Comp. **35**, 61-94 (1990).
- [8] Fukang, Yin, Song, J., & Lu, F.: *A coupled method of Laplace transform and Legendre wavelets for nonlinear Klein-Gordon equations*. Mathematical methods in the applied sciences. **37** (6), 781-792 (2013). <https://doi.org/10.1002/mma.2834>
- [9] Kumbinarasaiah, S., Ramane, H.S., Pise, K.S., Hariharan, G.: *Numerical solution for nonlinear Klein–Gordon equation via operational-matrix by clique polynomial of complete graphs*. Int. J. Appl. Comput. Math. **7** (12), 1-19 (2021).
- [10] Alzaleq, L. and Manoranjan, V.: *An energy conserving numerical scheme for the Klein–Gordon equation with cubic nonlinearity*. Fractal and fractional. **6** (8), 461 (2022). <https://doi.org/10.3390/fractalfract6080461>
- [11] Matsuno, Y.: *Exact solutions for the nonlinear Klein–Gordon and Liouville equations in four-dimensional Euclidean space*. J. Math. Phys. **28**, 2317–2322 (1987).
- [12] Strauss, W.A.: *Nonlinear wave equations*. CBMS regional conference series in mathematics - 73. American mathematical society, Providence. **73**, 1-91 (1989).
- [13] Grundland, A.M. and Infeld, E.: *A family of nonlinear Klein–Gordon equations and their solutions*. J. Math. Phys. **33**, 2498–2503 (1992).
- [14] Los, Vu-Quoc and Shaofan, Li.: *Invariant-conserving finite difference algorithms for the nonlinear Klein-Gordon equation*. Computer meth. in app. mech. and eng. **107** (3), 341-391 (1993).
- [15] Takahito, Arai and Tajiri, M.: *Resonance of breathers in one dimension: solutions to the nonlinear coupled Klein–Gordon equation*. Physics letters A. **274** (1–2), 18-26 (2000). [https://doi.org/10.1016/S0375-9601\(00\)00521-1](https://doi.org/10.1016/S0375-9601(00)00521-1)
- [16] Alagesan, T., Chung, Y. and Nakkeeran, K.: *Soliton solutions of coupled nonlinear Klein–Gordon equations*. Chaos, solitons & fractals. **21** (4), 879-882 (2004). <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2003.12.052>.
- [17] Biswas, A., Kara, A.H., Moraru, L., Bokhari, A.H., Zaman, F.D.: *Conservation laws of coupled Klein-Gordon equations with cubic and power law nonlinearities*. Proceedings of the Romanian academy series A - Mathematics physics technical sciences information science. **15** (2), 123-129 (2014).

- [18] Jing, Ch., Jie, Y. and Hongxiang, Y.: *Single soliton solutions of the coupled nonlinear Klein–Gordon equations with power law nonlinearity*. Applied mathematics and computation. **246**, 184–191 (2014). <https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.08.012>.
- [19] Arzu, A. and Filiz, T.: *Application of conservation theorem and modified extended tanh-function method to (1+1)-dimensional nonlinear coupled Klein–Gordon–Zakharov equation*. Chaos, solitons & fractals. **104**, 33–40 (2017). <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2017.07.025>.
- [20] Ouahid, L., Abdou, M.A., Kumar, S., Owyed, S., and Saha, R.S.: *A plentiful supply of soliton solutions for DNA Peyrard-Bishop equation by means of a new auxiliary equation strategy*. Int. j. of mod. phys. B, **35** (26), 2150265 (2021).
- [21] Yusufoglu, E. and Bekir, A.: *Exact solutions of coupled nonlinear Klein–Gordon equations*. Mathematical and computer modelling. **48** (11), 1694–1700 (2008). <https://doi.org/10.1016/j.mcm.2008.02.007>
- [22] Bratsos, A.G.: *On the numerical solution of the Klein–Gordon equation*. Numer. methods partial differential eq. **25**, 939–951 (2009).
- [23] Desheng, Sh.: *Exact solutions of coupled nonlinear Klein–Gordon equation*. Applied mathematics and computation. **217** (4), 1577–1583 (2010). <https://doi.org/10.1016/j.amc.2009.06.072>.
- [24] Sassaman, R., Edwards, M., Majid, F., Biswas, A.: *1-soliton solution of the coupled nonlinear Klein–Gordon equations*. Studies in mathematical sciences. **1**, 30–37 (2010).
- [25] Jian, Zh., Gan, Zh. & Guo, B.: *Stability of the standing waves for a class of coupled nonlinear Klein–Gordon equations*. Acta math. appl. sin. Engl. ser. **26**, 427–442 (2010). <https://doi.org/10.1007/s10255-010-0008-z>
- [26] Susanto, H.: *Josephson junctions with phase shifts - Stability analysis of fractional fluxons*. University of Twente press. Twente (2006).
- [27] Sobirov, Z., Matrasulov, D., Sabirov, K., Sawada, S., and Nakamura, K.: *Integrable nonlinear Schrödinger equation on simple networks: Connection formula at vertices*. Phys. rev. E. **81**, 066602 (2010).
- [28] Adami, R., Cacciapuoti, C., Finco, D. and Noja, D.: *Fast solitons on star graphs*. Reviews in math. phys. **23** (4), 409–451 (2011).
- [29] Caudrelier, V. and Zhang, Q.C.: *Vector nonlinear Schrödinger equation on the half-line*. Journal of physics A: Mathematical and theoretical. IOP Publishing. **45** (10), 105201 (2012). doi = 10.1088/1751-8113/45/10/105201,
- [30] Nakamura, K., Kanna, T. and Sakkaravarthi, K.: *Protocol of networks using energy sharing collisions of bright solitons*. Pramana journal of physics. **85** (5), 1009–1021 (2015).
- [31] Sobirov, Z., Babajanov, D., Matrasulov, D., Nakamura, K., and Uecker, H.: *Sine-Gordon solitons in networks: Scattering and transmission at vertices*. EPL. **115**, 50002 (2016).
- [32] Sabirov, K.K., Babajanov, D.B., Matrasulov, D.U. and Kevrekidis, P.G.: *Dynamics of dirac solitons in networks*. J. phys. A: Math. theor. **51**, 435203 (2018).
- [33] Susanto, H., Karjanto, N., Zulkarnain, N.T. and Widjanarko, T.: *Soliton and breather splitting on star graphs from tricrystal Josephson junctions*. Symmetry. **11** (2), 271 (2019).
- [34] Sabirov, K.K. and Asadov, Q.U.: *Transparent relativistic quantum networks*. 2021 International conference on information science and communications technologies (ICISCT-2021). Tashkent, IEEE. 01-03 (2021).
- [35] Akramov, M., Sabirov, K., Matrasulov, D., Susanto, H., Usanov, S., and Karpova, O.: *Nonlocal nonlinear Schrödinger equation on metric graphs: A model for generation and transport of parity-time-symmetric nonlocal solitons in networks*. Phys. rev. E. **105**, 054205 (2022).
- [36] Alrazi, A., Roshid, H-O., and Aldurayhim, A.: *Bright, dark, and rogue wave soliton solutions of the quadratic nonlinear Klein–Gordon equation*. Symmetry. **14** (6), 1223 (2022). <https://doi.org/10.3390/sym14061223>
- [37] Asadov, Q.U., Sabirov, K.K. and Yusupov, J.: *Kink-antikink soliton solutions of the nonlinear Klein–Gordon equation on branched structures*. EPL. **153** (5), 52002-7 (2026). <https://doi.org/10.1209/0295-5075/ae4e56>

SOLITON SOLUTION OF THE COUPLED NONLINEAR KLEIN-GORDON EQUATIONS ON METRIC GRAPHS

Asadov Quvonchbek Urinovich

Abstract

In this paper, we study the coupled nonlinear Klein-Gordon equations on a simple network in the form of a star graph. A theorem is proved on the existence of a soliton solution of the equation and reflectionless transmission through the vertices of the graph. We focus on how waves behave at the junction, where weighted continuity and generalized Kirchhoff rule conditions are imposed. Applying an analytical approach based on matching soliton solutions at the vertex, we derive the sum rule for the nonlinearities of the coupled nonlinear Klein-Gordon equations on the metric star graph. This sum rule yields soliton solutions that pass through the vertex without reflection. Furthermore, it is shown that the functional forms of the conservation laws are preserved for the considered soliton solutions on metric star graphs.

Keywords

Coupled nonlinear Klein-Gordon equations, vertex boundary conditions, Kirchhoff rule, reflectionless transmission, soliton solution, star graph.

Affiliations

Asadov Quvonchbek Urinovich

Address: Cyber University (of Uzbekistan), Dept. of Cybersecurity, 111500, Nurafshon (Tashkent)-Uzbekistan.

e-mail: quvonchbekurinovichasadov@gmail.com

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-7593-054X>