Uzbekistan Journal of Mathematics and Computer Science
Volume-2, Issue-2, Page 143–157 (2026)
DOI: https://doi.org/10.56143/ujmcs.v2i2.12
**Research article**

# Спектральные свойства якобианов в неподвижных точках дискретных отображений Лотка–Вольтерра

**Таджиева Мохбону Акром кизи* и Максимова Сарвиноз Валижон кизи**

## Аннотация

**В данной работе исследуются спектральные свойства матриц Якоби в неподвижных точках с носителями размерностей $3$ и $5$ дискретных отображений Лотки–Вольтерры, соответствующих двум типам однородных турниров с произвольным числом рёбер. Разработан программный скрипт на языке Python для классификации носителей размерности $k$, а также вычисления их спектров при условии, что коэффициенты $a_{ki}$ являются действительными числами.**

**Представлен структурированный алгоритм вычисления неподвижных точек дискретной динамики Лотки–Вольтерры на стандартном симплексе. Программная реализация выполнена на языке Python и организована в виде отдельных модулей для построения кососимметрических матриц взаимодействия, определения носителей, нахождения неподвижных точек и вычисления спектра матрицы Якоби.**

***Ключевые слова:*** *Отображение Лотка–Вольтерра, однородный турнир, неподвижная точка, спектр якобиана.*

***Предметная классификацие AMS (2020):*** *Основная: 37C25 ; Дополнительная: 15A18;*

## 1. Введение

К 1920-м годам Альфред Дж. Лотка и Вито Вольтерра независимо друг от друга опубликовали результаты своих исследований в различных научных областях — автокаталитических химических реакциях и эволюции биологических популяций соответственно, — используя одну и ту же систему дифференциальных уравнений. Впоследствии эта система получила название **системы Лотки–Вольтерры (LV)** в честь её создателей. [1]

Системы Лотки–Вольтерры стали одной из фундаментальных математических моделей, широко применяемых во многих научных дисциплинах, включая физику, химию, биологию, экономику и другие социальные науки [2]. В частности, уравнения Лотки–Вольтерры играют важную роль в теоретической экологии, предоставляя математический аппарат для исследования различных типов взаимодействия между биологическими популяциями, обитающими в фиксированной среде и состоящими из нескольких взаимодействующих видов [1].

Основной целью данной работы является исследование неподвижных точек с носителем мощности $k$ отображений Лотки–Вольтерры, соответствующих однородным турнирам, а также описание спектральных свойств соответствующих матриц Якоби в случае, когда коэффициенты $a_{ki} = \pm 1$ [6,8].

***Received :*** *12–may–2026,* ***Accepted :*** *10–november–2026*
**** Corresponding author***

## 2. Методы исследования

Рассмотрим стандартный симплекс

$$S^{n-1} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n_+ : \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\}.$$

В общем случае $m$-мерная система Лотки–Вольтерры задаётся отображением

$$x_i' = x_i \left( 1 + \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \right), \qquad i = 1, \ldots, m. \tag{1}$$

Отображение $V : S^{n-1} \to S^{n-1}$ определяется формулой (1). Обозначим через

$$\mathrm{Fix}(V) = \{ x \in S^{n-1} : V(x) = x \}$$

множество всех неподвижных точек отображения $V$.

Поскольку $V : S^{n-1} \to S^{n-1}$, матрица Якоби в каждой неподвижной точке имеет одно собственное значение, равное 1. Кроме того, отображение $V : S^{n-1} \to S^{n-1}$ является гомеоморфизмом [7], а каждая грань симплекса инвариантна относительно $V$. В частности, каждая вершина симплекса $S^{n-1}$ является неподвижной точкой отображения $V$, а спектр матрицы Якоби в вершинах состоит из неотрицательных действительных собственных значений

$$\lambda_i = 1 + a_{ki}.$$

Рассмотрим кососимметрическую матрицу $A = [a_{ij}]$ порядка $m$, удовлетворяющую условиям

$$a_{ij} = -a_{ji}, \qquad a_{ii} = 0.$$

То есть

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -a_{1m} & -a_{2m} & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку матрица $A$ является кососимметрической, все её главные миноры нечётного порядка равны нулю, тогда как все главные миноры чётного порядка неотрицательны.

**Определение.** Кососимметрическая матрица $A$ называется *матрицей общего положения*, если все её главные миноры чётного порядка строго положительны.

Хорошо известно, что множество кососимметрических матриц общего положения образует открытое и всюду плотное подмножество пространства всех кососимметрических матриц.

Более того, если матрица $A$ находится в общем положении, то множество неподвижных точек $\mathrm{Fix}(V)$ конечно [5]. При этом каждая неподвижная точка имеет носитель нечётной мощности. В дальнейшем предполагается, что $a_{ki} \neq 0$ при всех $k \neq i$.

В зависимости от знаков коэффициентов $a_{ki}$ кососимметрическая матрица общего положения определяет ориентированный граф на $n$ вершинах, называемый *турниром* и обозначаемый $T = (V, A)$ [3,4,5].

Турнир представляет собой полный ориентированный граф $T = (V, A)$, в котором для каждой пары различных вершин $\{v_i, v_j\}$ существует ровно одна ориентированная дуга: либо $(v_i, v_j)$, либо $(v_j, v_i)$. Турнир с $n$ вершинами содержит

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

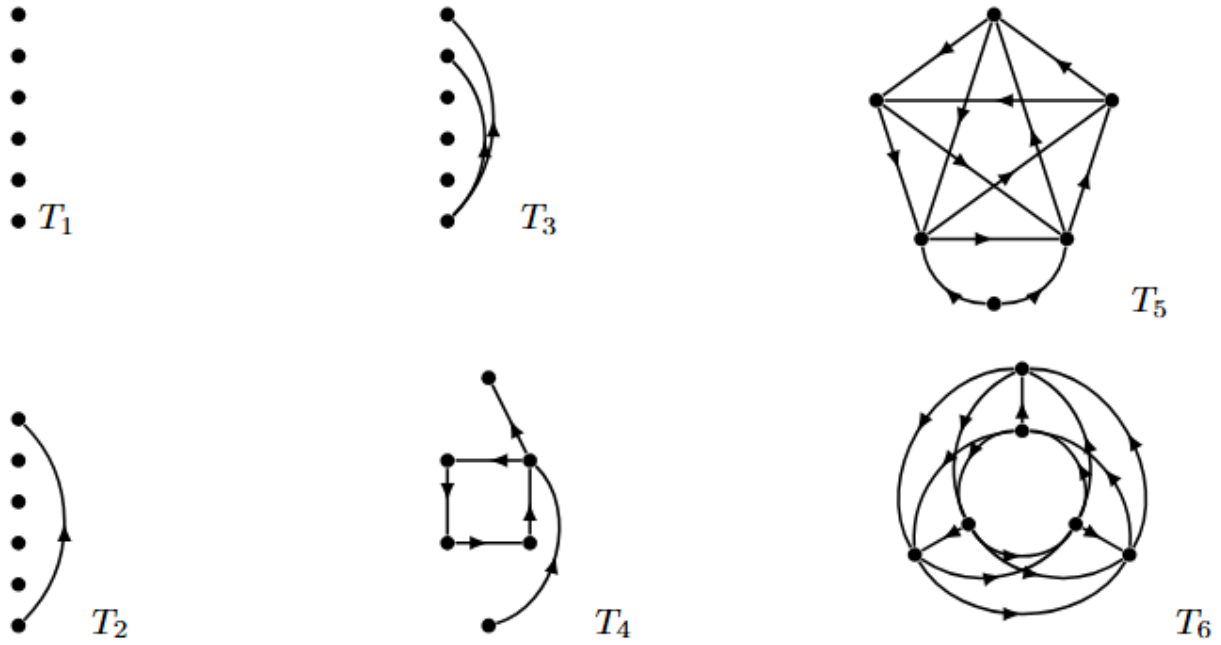



**Рис. 1**

ориентированных дуг.

Если $a_{ki} > 0$, то дуга направлена из вершины $v_i$ в вершину $v_k$; если $a_{ki} < 0$, то дуга направлена из вершины $v_k$ в вершину $v_i$. Обозначение $v_1 \to v_2$ означает ориентированную дугу из вершины $v_1$ в вершину $v_2$.

Турнир называется **сильным**, если для любой пары вершин $v_1, v_2 \in V$ существует ориентированный путь из $v_1$ в $v_2$. Турнир, не содержащий ориентированных циклов, называется **транзитивным**. Турнир называется **однородным**, если каждый его подтурнир является либо сильным, либо транзитивным.

Для $m = 6$ Дж. Мун показал, что существует $56$ попарно неизоморфных турниров. Среди них нами выделены шесть однородных турниров [8].

Для иллюстрации турниров в работе используются специальные рисунки. На рисунках изображены не все ориентированные дуги. Если дуга между двумя вершинами отсутствует, то подразумевается, что она направлена от вершины, расположенной выше, к вершине, расположенной ниже.

Неподвижная точка $x^*$ удовлетворяет условию

$$V(x^*) = x^*.$$

Если неподвижная точка $x^*$ имеет ровно $k$ ненулевых координат, то она называется **неподвижной точкой с носителем мощности** $k$.

Особый интерес представляют неподвижные точки с носителем мощности 3, поскольку они соответствуют ориентированным циклам длины три в ассоциированном турнире.

Матрица Якоби отображения $V$ в точке $x$ имеет вид

$$J_{ki}(x) = \begin{cases} 1 + \sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj}x_j, & \text{если } k = i, \\ x_k a_{ki}, & \text{если } k \neq i. \end{cases}$$

В настоящей работе исследуется спектр матриц Якоби в неподвижных точках с носителями мощности 3 и 5 для однородных турниров типов $T_1$ и $T_2$.

## 3. Результаты

*3.1. Спектр отображения при $a_{ki} = \pm 1$*

Очевидно, что для любого отображения Лотки–Вольтерры, соответствующего турниру, все вершины симплекса $e_i$ являются неподвижными точками. При коэффициентах $a_{ki} = \pm 1$ нетрудно показать, что спектр матрицы Якоби в этих неподвижных точках состоит только из собственных значений 0 и 2.

Для турнира $T_1$ других неподвижных точек, кроме вершин симплекса, не существует. Следовательно, спектр матриц Якоби отображения, соответствующего турниру $T_1$, содержит только собственные значения 0 и 2.

$$\sigma(J(e_k)) = \Big\{1, \underbrace{2, \ldots, 2}_{m-k-1}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k-2}\Big\}.$$

Рассмотрим следующий однородный турнир $T_2$. Пусть $V(x)$ — $m$-мерное отображение Лотки–Вольтерры, заданное системой

$$V(x) = \begin{cases} x_1' = x_1\left(1 - x_2 - x_3 - \cdots - x_{m-1} + x_m\right), \\ x_2' = x_2\left(1 + x_1 - x_3 - \cdots - x_m\right), \\ \quad \vdots \\ x_{m-1}' = x_{m-1}\left(1 + x_1 + x_2 + \cdots - x_m\right), \\ x_m' = x_m\left(1 - x_1 + x_2 + \cdots + x_{m-1}\right). \end{cases}$$

Для турнира $T_2$ существует $m-2$ ориентированных циклов длины три.

**Теорема 3.1.** *Пусть $M_{1im}$ обозначает неподвижную точку с носителем на вершинах $\{1, i, m\}$, где $i = \overline{2, m-1}$. Тогда спектр матрицы Якоби в точке $M_{1im}$ имеет вид*

$$\sigma(J(M_{1im})) = \Big\{1,\ 1 \pm \frac{i}{\sqrt{3}},\ \underbrace{\frac{4}{3}, \ldots, \frac{4}{3}}_{m-i-1},\ \underbrace{\frac{2}{3}, \ldots, \frac{2}{3}}_{i-2}\Big\}.$$

*3.2. Спектр матрицы Якоби при произвольном числе вершин $m$*

Начнём с транзитивного турнира $T_1$ при произвольном числе вершин $m$.

$$V(x) = \begin{cases} x_1' = x_1\left(1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1m}x_m\right), \\ x_2' = x_2\left(1 + a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2m}x_m\right), \\ \quad \vdots \\ x_m' = x_m\left(1 + a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{m,m-1}x_{m-1}\right). \end{cases}$$

**Теорема 3.2.** *Для любых $0 < a_{ki} \le 1$ спектр матрицы Якоби в вершине $e_k$ имеет вид*

$$\sigma(J(e_k)) = \Big\{1,\ 1 - a_{k1},\ 1 - a_{k2},\ \ldots,\ 1 - a_{k(k-1)},\ 1 + a_{k(k+1)},\ \ldots,\ 1 + a_{km}\Big\}.$$

Рассмотрим следующий турнир типа $T_2$. Обобщим результат теоремы 3.1. на случай произвольного числа вершин $m$.

**Теорема 3.3.** *Для любых $0 < a_{ki} \le 1$ собственные значения матрицы Якоби в неподвижной точке $M_{1im}$ имеют вид*

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_{i,m} = 1 \pm \mathrm{i}\sqrt{\frac{a_{1i}a_{1m}a_{im}}{\delta_i}},$$

*и*

$$\lambda_k = \begin{cases} 1 + \dfrac{A_{1ikm}}{\delta_i}, & k > i, \\ 1 - \dfrac{A_{1kim}}{\delta_i}, & k < i, \end{cases}$$

*где*

$$A_{1ikm} = a_{1m}a_{ik} - a_{1i}a_{km} + a_{1k}a_{im}.$$

*Доказательство.* Отображение Лотки–Вольтерры, соответствующее турниру типа $T_2$, в общем случае имеет вид

$$V(x) = \begin{cases} x_1' = x_1\left(1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1,m-1}x_{m-1} + a_{1m}x_m\right), \\ x_2' = x_2\left(1 + a_{12}x_1 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2m}x_m\right), \\ \quad \vdots \\ x_{m-1}' = x_{m-1}\left(1 + a_{1,m-1}x_1 + a_{2,m-1}x_2 + \cdots - a_{m-1,m}x_m\right), \\ x_m' = x_m\left(1 - a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + \cdots + a_{m-1,m}x_{m-1}\right). \end{cases}$$

Соответствующая кососимметрическая матрица имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & \dots & -a_{2m} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & \dots & -a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1m} & a_{2m} & a_{3m} & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Неподвижные точки с носителем $\{1, i, m\}$ имеют вид

$$M_{1im} = \left(\frac{a_{im}}{\delta_i}, 0, \dots, \frac{a_{1m}}{\delta_i}, \dots, 0, \frac{a_{1i}}{\delta_i}\right), \qquad i = \overline{2, m-1},$$

где

$$\delta_i = a_{1i} + a_{im} + a_{1m}.$$

То есть

$$x_1 = \frac{a_{im}}{\delta_i}, \qquad x_i = \frac{a_{1m}}{\delta_i}, \qquad x_m = \frac{a_{1i}}{\delta_i}, \qquad x_k = 0, \quad k \notin \{1, i, m\}.$$

Обозначим

$$t_k = 1 + \sum_{j=1}^{m} a_{kj}x_j.$$

Тогда матрица Якоби имеет вид

$$J(x) = \begin{pmatrix} t_1 & -a_{12}x_1 & -a_{13}x_1 & \dots & a_{1m}x_1 \\ a_{12}x_2 & t_2 & -a_{23}x_2 & \dots & -a_{2m}x_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1m}x_m & a_{2m}x_m & a_{3m}x_m & \dots & t_m \end{pmatrix}.$$

В неподвижной точке $M_{1im}$ имеем

$$t_1 = t_i = t_m = 1.$$

Для $k \notin \{1, i, m\}$ значения диагональных элементов определяются следующим образом.

Если $k > i$, то

$$t_k = 1 + \frac{a_{1k}a_{im} - a_{ik}a_{1m} + a_{km}a_{1i}}{\delta_i} = 1 + \frac{A_{1ikm}}{\delta_i}.$$

Если $k < i$, то

$$t_k = 1 - \frac{A_{1kim}}{\delta_i}.$$

Следовательно, матрица Якоби в неподвижной точке $M_{1im}$ имеет блочную структуру. Её ненулевые внедиагональные элементы, соответствующие носителю $\{1, i, m\}$, определяются координатами неподвижной точки, а для остальных координат матрица имеет диагональную структуру.

Таким образом,

$$J(M_{1im}) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a_{12}a_{im}}{\delta_i} & -\frac{a_{13}a_{im}}{\delta_i} & \dots & \frac{a_{1m}a_{im}}{\delta_i} \\ 0 & t_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{a_{1i}a_{1m}}{\delta_i} & \vdots & 1 & \dots & -\frac{a_{im}a_{1m}}{\delta_i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\frac{a_{1i}a_{1m}}{\delta_i} & \frac{a_{2m}a_{1i}}{\delta_i} & \dots & \frac{a_{m-1,m}a_{1i}}{\delta_i} & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим характеристическое уравнение

$$\det\left(J(M_{1im}) - \lambda I\right) = 0.$$

Из структуры матрицы Якоби следует, что одно собственное значение равно

$$\lambda_1 = 1.$$

Три координаты, соответствующие носителю $\{1, i, m\}$, образуют трёхмерный инвариантный блок. Его собственные значения имеют вид

$$\lambda_{i,m} = 1 \pm \mathrm{i}\sqrt{\frac{a_{1i}a_{1m}a_{im}}{\delta_i}}.$$

Для остальных координат собственные значения равны диагональным элементам матрицы Якоби:

$$\lambda_k = \begin{cases} 1 + \dfrac{A_{1ikm}}{\delta_i}, & k > i, \\ 1 - \dfrac{A_{1kim}}{\delta_i}, & k < i. \end{cases}$$

Следовательно, полный спектр матрицы Якоби в неподвижной точке $M_{1im}$ имеет вид

$$\sigma(J(M_{1im})) = \left\{1,\ 1 \pm \mathrm{i}\sqrt{\frac{a_{1i}a_{1m}a_{im}}{\delta_i}},\ \left\{1 + \frac{A_{1ikm}}{\delta_i} : k > i\right\},\ \left\{1 - \frac{A_{1kim}}{\delta_i} : k < i\right\}\right\}.$$

Это доказывает теорему. □

### *3.3. Спектр матрицы Якоби в неподвижных точках с носителем мощности 5*

Наличие ориентированного цикла длины пять не всегда гарантирует существование неподвижной точки с носителем мощности пять. Рассмотрим достаточные условия существования таких неподвижных точек для турнира типа $T_2$ при $m = 6$.

Пусть $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{6}$ — кососимметрическая матрица, определяющая отображение Лотки–Вольтерры

$$V_i(x) = x_i \left(1 + \sum_{j=1}^{6} a_{ij} x_j\right), \qquad i = 1, \ldots, 6.$$

Для упорядоченных индексов $i < j < k < l$ обозначим через $P_{ijkl}$ стандартный пфаффиан соответствующей главной подматрицы порядка четыре:

$$P_{ijkl} = a_{ij}a_{kl} - a_{ik}a_{jl} + a_{il}a_{jk}.$$

В частности,

$$P_{1256} = a_{12}a_{56} - a_{15}a_{26} + a_{16}a_{25}.$$

Для согласования знаков пфаффиановых выражений, входящих в координаты неподвижных точек, введём обозначения

$$A_{2356} = -P_{2356}, \quad A_{1356} = P_{1356},$$
$$A_{1256} = -P_{1256}, \quad A_{1236} = P_{1236},$$
$$A_{1235} = -P_{1235}.$$

Аналогично,

$$A_{2456} = -P_{2456}, \quad A_{1456} = P_{1456},$$
$$A_{1246} = P_{1246}, \quad A_{1245} = -P_{1245}.$$

Таким образом,

$$A_{1256} = -P_{1256} = a_{15}a_{26} - a_{12}a_{56} - a_{16}a_{25}.$$

Следовательно, условие $A_{1256} > 0$ эквивалентно условию $P_{1256} < 0$.

Отметим, что изменение знака пфаффиана не влияет на определитель соответствующей главной кососимметрической подматрицы:

$$\det A_{\{1,2,5,6\}} = P_{1256}^2 = A_{1256}^2.$$

Однако при построении координат неподвижных точек знаки пфаффиановых выражений имеют существенное значение.

Введём обозначения

$$S_1 = A_{2356} + A_{1356} + A_{1256} + A_{1236} + A_{1235},$$
$$S_2 = A_{2456} + A_{1456} + A_{1256} + A_{1246} + A_{1245}.$$

**Предложение 3.1.** *Пусть выполняются условия*

$$A_{2356} > 0, \quad A_{1356} > 0, \quad A_{1256} > 0,$$
$$A_{1236} > 0, \quad A_{1235} > 0,$$

*и*

$$A_{2456} > 0, \quad A_{1456} > 0, \quad A_{1246} > 0, \quad A_{1245} > 0.$$

*Тогда отображение Лотки–Вольтерры имеет две неподвижные точки с носителями мощности пять:*

$$C_1 = \frac{1}{S_1}(A_{2356}, A_{1356}, A_{1256}, 0, A_{1236}, A_{1235}),$$

$$C_2 = \frac{1}{S_2}(A_{2456}, A_{1456}, 0, A_{1256}, A_{1246}, A_{1245}).$$

**Доказательство.**

Из условий предложения непосредственно следует

$$S_1 > 0, \qquad S_2 > 0.$$

Следовательно, все координаты точек $C_1$ и $C_2$, принадлежащие их носителям, строго положительны.

При этом

$$(C_1)_4 = 0, \qquad (C_2)_3 = 0.$$

По определению $S_1$ и $S_2$ имеем

$$\sum_{i=1}^{6}(C_1)_i = \frac{S_1}{S_1} = 1,$$

$$\sum_{i=1}^{6}(C_2)_i = \frac{S_2}{S_2} = 1.$$

Таким образом,

$$C_1, C_2 \in S^5,$$

где

$$S^5 = \left\{ x \in \mathbb{R}^6 : x_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{6} x_i = 1 \right\}.$$

Проверим выполнение уравнений неподвижной точки.

Для кососимметрической матрицы нечётного порядка вектор знакочередующихся пфаффианов главных подматриц чётного порядка принадлежит её ядру.

Для главной подматрицы с индексами $\{1,2,3,5,6\}$ получаем

$$A_{\{1,2,3,5,6\}} \begin{pmatrix} A_{2356} \\ A_{1356} \\ A_{1256} \\ A_{1236} \\ A_{1235} \end{pmatrix} = 0.$$

Аналогично, для главной подматрицы с индексами $\{1,2,4,5,6\}$ имеем

$$A_{\{1,2,4,5,6\}} \begin{pmatrix} A_{2456} \\ A_{1456} \\ A_{1256} \\ A_{1246} \\ A_{1245} \end{pmatrix} = 0.$$

После нормировки получаем

$$(AC_1)_i = 0, \qquad i \in \{1,2,3,5,6\},$$

$$(AC_2)_i = 0, \qquad i \in \{1,2,4,5,6\}.$$

Следовательно, для всех индексов $i \in \{1,2,3,5,6\}$ выполняется

$$V_i(C_1) = (C_1)_i(1 + (AC_1)_i) = (C_1)_i.$$

Поскольку $(C_1)_4 = 0$, имеем

$$V_4(C_1) = 0 = (C_1)_4.$$

Таким образом,

$$V(C_1) = C_1.$$

Аналогично, для всех индексов $i \in \{1, 2, 4, 5, 6\}$ получаем

$$V_i(C_2) = (C_2)_i(1 + (AC_2)_i) = (C_2)_i.$$

Для третьей координаты

$$V_3(C_2) = 0 = (C_2)_3.$$

Следовательно,

$$V(C_2) = C_2.$$

Таким образом, точки $C_1$ и $C_2$ принадлежат стандартному симплексу и являются неподвижными точками отображения Лотки–Вольтерры.

Полученные результаты позволяют перейти к исследованию спектральных свойств матрицы Якоби в неподвижных точках $C_1$ и $C_2$.

## 4. Спектральный анализ матриц Якоби и численная проверка результатов

Полученные результаты позволяют перейти к исследованию спектральных свойств матриц Якоби в неподвижных точках $C_1$ и $C_2$.

Обозначим через $\Delta$ полный пфаффиан кососимметрической матрицы $A$ порядка шесть:

$$\Delta = \mathrm{Pf}(A).$$

В рассматриваемом случае

$$\begin{aligned}\Delta = &- a_{14}a_{26}a_{35} + a_{12}a_{46}a_{35} + a_{14}a_{25}a_{36} + a_{13}a_{26}a_{45} - a_{12}a_{36}a_{45} + a_{16}(a_{25}a_{34} - a_{24}a_{35} + a_{23}a_{45}) - \\ &- a_{13}a_{25}a_{46} + a_{15}(a_{26}a_{34} - a_{24}a_{36} + a_{23}a_{46}) - a_{14}a_{23}a_{56} + a_{13}a_{24}a_{56} - a_{12}a_{34}a_{56}.\end{aligned}$$

Для неподвижной точки

$$C_2 = \frac{1}{S_2}(A_{2456}, A_{1456}, 0, A_{1256}, A_{1246}, A_{1245})$$

рассмотрим главную подматрицу $B_2$ матрицы Якоби $J(C_2)$, соответствующую индексам $\{1, 2, 4, 5, 6\}$.

Поскольку $C_2$ является неподвижной точкой, на её носителе выполняется $(AC_2)_i = 0$. Поэтому

$$B_2 = I_5 + D_2A_S,$$

где $A_S$ — главная подматрица матрицы $A$, соответствующая носителю точки $C_2$, а

$$D_2 = \mathrm{diag}\left(\frac{A_{2456}}{S_2}, \frac{A_{1456}}{S_2}, \frac{A_{1256}}{S_2}, \frac{A_{1246}}{S_2}, \frac{A_{1245}}{S_2}\right).$$

Характеристическое уравнение пятимерного блока $B_2$ имеет вид

$$(1 - \lambda)^5 + q_2(1 - \lambda)^3 + r_2(1 - \lambda) = 0, \tag{4.1}$$

где

$$q_2 = \sum_{\substack{i<j \\ i,j\in S}} (C_2)_i(C_2)_j a_{ij}^2,$$

$$r_2 = \frac{A_{2456}A_{1456}A_{1256}A_{1246}A_{1245}}{S_2^3}.$$

Поскольку $A_S$ является кососимметрической матрицей нечётного порядка, имеем $\det A_S = 0$. Следовательно, одним из корней уравнения (4.1) является $\lambda = 1$.

При положительности координат точки $C_2$ матрица $D_2 A_S$ подобна кососимметрической матрице $D_2^{1/2} A_S D_2^{1/2}$. Поэтому остальные четыре собственных значения блока $B_2$ образуют две пары комплексно-сопряжённых чисел:

$$\sigma(B_2) = \{1,\ 1 \pm \alpha_2 \mathrm{i}, 1 \pm \beta_2 \mathrm{i}\},$$

где $\alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{R}$.

Для определения полного спектра матрицы Якоби $J(C_2)$ порядка шесть необходимо учесть координату, не входящую в носитель неподвижной точки.

Поскольку $(C_2)_3 = 0$, в третьей строке матрицы Якоби все внедиагональные элементы равны нулю, а

$$J_{33}(C_2) = 1 + (AC_2)_3.$$

Из координат точки $C_2$ и пфаффиановых тождеств получаем

$$(AC_2)_3 = \frac{1}{S_2}\big(a_{31}A_{2456} + a_{32}A_{1456} \quad + a_{34}A_{1256} + a_{35}A_{1246} + a_{36}A_{1245}\big) = -\frac{\Delta}{S_2}.$$

Таким образом, дополнительное собственное значение равно $\mu_2 = 1 - \Delta/S_2$.

После одновременной перестановки строк и столбцов матрица Якоби принимает блочно-треугольный вид

$$J(C_2) \sim \begin{pmatrix} B_2 & b_2 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\det(\lambda I_6 - J(C_2)) = (\lambda - \mu_2)\det(\lambda I_5 - B_2).$$

Это равенство показывает, что уравнение (4.1) определяет пять собственных значений блока $B_2$, а шестое собственное значение равно $\mu_2$.

Таким образом, полный спектр матрицы Якоби в точке $C_2$ имеет вид

$$\sigma(J(C_2)) = \left\{1,\ 1 - \frac{\Delta}{S_2}, 1 \pm \alpha_2 \mathrm{i}, 1 \pm \beta_2 \mathrm{i}\right\}. \tag{4.2}$$

Аналогично, для неподвижной точки

$$C_1 = \frac{1}{S_1}(A_{2356}, A_{1356}, A_{1256}, 0, A_{1236}, A_{1235})$$

четвёртая координата равна нулю. Поэтому дополнительное собственное значение определяется диагональным элементом

$$J_{44}(C_1) = 1 + (AC_1)_4.$$

Используя координаты $C_1$ и пфаффиановые тождества, получаем

$$(AC_1)_4 = \frac{\Delta}{S_1}.$$

Следовательно, полный спектр матрицы Якоби в точке $C_1$ имеет вид

$$\sigma(J(C_1)) = \left\{1,\ 1 + \frac{\Delta}{S_1}, 1 \pm \alpha_1 \mathrm{i}, 1 \pm \beta_1 \mathrm{i}\right\}, \tag{4.3}$$

где $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$.

Таким образом, дополнительные собственные значения $1 + \Delta/S_1$ и $1 - \Delta/S_2$ возникают из одномерных блоков, соответствующих координатам, не входящим в носители неподвижных точек $C_1$ и $C_2$.

Полный характеристический многочлен каждой матрицы Якоби имеет степень шесть, что согласуется с размерностью исходного отображения.

Для дополнительной проверки аналитических результатов рассмотрим частный случай дискретного отображения Лотки–Вольтерры при $m = 5$. В этом случае собственные значения матриц Якоби могут быть вычислены аналитически и сопоставлены с результатами, полученными с помощью Python.

Рассмотрим отображение

$$V_i(x) = x_i \left(1 + \sum_{j=1}^{5} a_{ij} x_j\right), \qquad i = 1, \ldots, 5, \tag{4.4}$$

с кососимметрической матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.4 & 1 & -0.8 \\ -0.2 & 0 & 0.3 & 0.6 & 0.5 \\ -0.4 & -0.3 & 0 & 0.1 & 0.8 \\ -1 & -0.6 & -0.1 & 0 & 0.9 \\ 0.8 & -0.5 & -0.8 & -0.9 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

Очевидно, что $A^T = -A$.

**1. Аналитическое определение неподвижных точек.**

Рассмотрим носитель $S_1 = \{1, 2, 5\}$.

Соответствующая главная подматрица имеет вид

$$A_{S_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/5 & -4/5 \\ -1/5 & 0 & 1/2 \\ 4/5 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Условие неподвижной точки $A_{S_1} x_{S_1} = 0$ приводит к системе

$$\begin{cases} x_2 - 4x_5 = 0, \\ -2x_1 + 5x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 1. \end{cases}$$

Следовательно,

$$x_2 = 4x_5, \qquad x_1 = \frac{5}{2} x_5.$$

Из условия нормировки получаем

$$x_5 = \frac{2}{15}, \qquad x_1 = \frac{1}{3}, \qquad x_2 = \frac{8}{15}.$$

Таким образом,

$$x^{(1)} = \left(\frac{1}{3}, \frac{8}{15}, 0, 0, \frac{2}{15}\right). \tag{4.6}$$

Аналогично, для носителей $S_2 = \{1, 3, 5\}$ и $S_3 = \{1, 4, 5\}$ получаем

$$x^{(2)} = \left(\frac{2}{5}, 0, \frac{2}{5}, 0, \frac{1}{5}\right), \tag{4.7}$$

$$x^{(3)} = \left(\frac{1}{3}, 0, 0, \frac{8}{27}, \frac{10}{27}\right). \tag{4.8}$$

Для каждой из этих точек выполняются условия

$$x_i^{(k)} \geq 0, \qquad \sum_{i=1}^{5} x_i^{(k)} = 1,$$

а также

$$x_i^{(k)}(Ax^{(k)})_i = 0, \qquad i = 1, \ldots, 5.$$

Следовательно,

$$V(x^{(k)}) = x^{(k)}, \qquad k = 1, 2, 3.$$

**2. Аналитическое вычисление спектров матриц Якоби.**

Матрица Якоби имеет вид

$$J(x) = I + \operatorname{diag}(Ax) + \operatorname{diag}(x)A. \tag{4.9}$$

Для первой неподвижной точки получаем

$$Ax^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -14/75 \\ -8/15 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$J(x^{(1)}) = \begin{pmatrix} 1 & 1/15 & 2/15 & 1/3 & -4/15 \\ -8/75 & 1 & 4/25 & 8/25 & 4/15 \\ 0 & 0 & 61/75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7/15 & 0 \\ 8/75 & -1/15 & -8/75 & -3/25 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

Характеристический многочлен этой матрицы равен

$$\chi_1(\lambda) = (\lambda - 1)\left(\lambda - \frac{61}{75}\right)\left(\lambda - \frac{7}{15}\right)\left((\lambda - 1)^2 + \frac{4}{75}\right). \tag{4.11}$$

Следовательно,

$$\sigma(J(x^{(1)})) = \left\{1,\ 1 \pm \frac{2\sqrt{3}}{15}i,\ \frac{61}{75},\ \frac{7}{15}\right\}. \tag{4.12}$$

Для второй неподвижной точки характеристический многочлен имеет вид

$$\chi_2(\lambda) = (\lambda - 1)\left(\lambda - \frac{57}{50}\right)\left(\lambda - \frac{37}{50}\right)\left((\lambda - 1)^2 + \frac{16}{125}\right). \tag{4.13}$$

Отсюда

$$\sigma(J(x^{(2)})) = \left\{1,\ 1 \pm \frac{4\sqrt{5}}{25}i,\ \frac{57}{50},\ \frac{37}{50}\right\}. \tag{4.14}$$

Для третьей неподвижной точки получаем

$$\chi_3(\lambda) = (\lambda - 1)\left(\lambda - \frac{35}{27}\right)\left(\lambda - \frac{161}{135}\right)\left((\lambda - 1)^2 + \frac{4}{15}\right). \tag{4.15}$$

Следовательно,

$$\sigma(J(x^{(3)})) = \left\{1,\ 1 \pm \frac{2\sqrt{15}}{15}i,\ \frac{35}{27},\ \frac{161}{135}\right\}. \tag{4.16}$$

Из полученных спектров следует, что для каждой из рассматриваемых неподвижных точек матрица Якоби имеет пару комплексно-сопряжённых собственных значений

$$\lambda_{2,3} = 1 \pm i\omega, \qquad \omega > 0.$$

При этом

$$|\lambda_{2,3}| = \sqrt{1+\omega^2} > 1.$$

Поскольку соответствующие собственные направления принадлежат касательному пространству симплекса, все три неподвижные точки являются неустойчивыми.

Отметим, что собственное значение $\lambda = 1$, соответствующее радиальному направлению, не учитывается при исследовании устойчивости на симплексе.

Таким образом, аналитическое исследование позволяет определить спектры матриц Якоби и установить неустойчивость рассматриваемых неподвижных точек.

**Таблица 1.** Сравнение аналитических и численных спектров матриц Якоби

| Точка | Аналитический спектр | Численный спектр |
|---|---|---|
| $x^{(1)}$ | $1,\ 1 \pm \frac{2\sqrt{3}}{15}i,\ \frac{61}{75},\ \frac{7}{15}$ | $1,\ 1 \pm 0.230940i,\ 0.813333,\ 0.466667$ |
| $x^{(2)}$ | $1,\ 1 \pm \frac{4\sqrt{5}}{25}i,\ \frac{57}{50},\ \frac{37}{50}$ | $1,\ 1 \pm 0.357771i,\ 1.140000,\ 0.740000$ |
| $x^{(3)}$ | $1,\ 1 \pm \frac{2\sqrt{15}}{15}i,\ \frac{35}{27},\ \frac{161}{135}$ | $1,\ 1 \pm 0.516398i,\ 1.296296,\ 1.192593$ |

Как видно из таблицы, численные значения собственных значений согласуются с аналитическими результатами.

В частности, для мнимых частей комплексно-сопряжённых собственных значений имеем

$$\frac{2\sqrt{3}}{15} \approx 0.230940, \qquad \frac{4\sqrt{5}}{25} \approx 0.357771,$$

$$\frac{2\sqrt{15}}{15} \approx 0.516398.$$

Аналогичное совпадение наблюдается для действительных собственных значений.

Следовательно, численные результаты совпадают с аналитическими с точностью до указанного округления.

Кроме того, для каждой рассматриваемой неподвижной точки спектр содержит пару комплексно-сопряжённых собственных значений

$$\lambda_{2,3} = 1 \pm i\omega, \qquad \omega > 0.$$

Поскольку

$$|\lambda_{2,3}| = \sqrt{1+\omega^2} > 1,$$

все три неподвижные точки являются неустойчивыми относительно динамики на симплексе.

Таким образом, результаты численного эксперимента подтверждают аналитически полученные спектры матриц Якоби для рассматриваемого частного случая при $m = 5$.

Совпадение результатов двух методов, а также наличие явно заданной матрицы и программного алгоритма обеспечивают возможность воспроизведения проведённых вычислений.

## 5. Заключение

В данной работе было проведено комплексное исследование спектральных свойств матриц Якоби в неподвижных точках дискретных отображений Лотки-Вольтерры, соответствующих однородным турнирам.

Показано, что для транзитивного турнира $T_1$ спектр матрицы Якоби в вершинах симплекса состоит исключительно из собственных значений 0 и 2.

Для турниров типа $T_2$ детально изучены неподвижные точки с носителем мощности 3, доказана блочная структура их матриц Якоби и получен явный вид полного спектра, включающего инвариантный блок с комплексно-сопряженными корнями.

Особое внимание уделено анализу неподвижных точек с носителем мощности 5 ($C_1$ и $C_2$) при $m = 6$, для которых были выведены строгие условия существования, опирающиеся на знаки миноров кососимметрической матрицы.

Установлено, что спектр матрицы Якоби в этих точках содержит собственное значение $\lambda = 1$, одно дополнительное действительное значение и две пары комплексно-сопряженных корней.

Для реализации вычислений, классификации носителей и нахождения спектров был разработан специализированный программный алгоритм на языке Python, представляющий собой эффективный вычислительный инструмент для дальнейшего анализа многомерных дискретных динамических систем.

Полученные результаты вносят существенный вклад в развитие теории дискретных динамических систем на стандартных симплексах.

## Список литературы


[1] Q. Din, *Dynamics of a discrete Lotka–Volterra model*, Advances in Difference Equations **95** (2013). https://doi.org/10.1186/1687-1847-2013-95

[2] M. Brin and G. Stuck, *Introduction to Dynamical Systems*, (Cambridge University Press, 2004).

[3] G. Chartrand and H. Jordon and V. Vatter and P. Zhang. Graphs and Digraphs. CRC Press. p. 364. (2024)

[4] Kh. Koh and F. Dong and E.G. Tay. Introduction to graph theory. World Scientific. p. 308. (2024)

[5] Ganikhodzhaev R.N. *Quadratic stochastic operators, Lyapunov function and tournaments*, Acad. Sci. Sb. Math., 76(2), p. 489-506. (1993)

[6] Ganikhodzhaev R.N., Tadzhieva M.A. *Stability of fixed points of discrete dynamic systems of Volterra type.* AIP Conference Proceedings, 2021. V. 2365. P. 060005-1 – 060005-7. https://doi.org/10.1063/5.0057979. (Scopus. IF=0.7).

[7] Ganikhodzhaev R.N., Tadzieva M.A., Eshmamatova D.B. *Dynamical Proporties of Quadratic Homeomorphisms of a Finite-Dimensional Simplex.* Journal of Mathematical Sciences, 245(3), 398-402 p.

[8] Tadzhieva M. A., Eshmamatova D. B., and Ganikhodzhaev R. N. , *Volterra-Type Quadratic Stochastic Operators with a Homogeneous Tournament.* J. of Mathematical Sciences (United States), 2024, **277** (3), 546–556 p.


# Spectral Properties of Jacobians at Fixed Points of Discrete Lotka–Volterra Mappings

M.A.Tadzhieva* and S.V. Maksimova


### Abstract

This paper investigates the spectral properties of Jacobi matrices at fixed points with supports of dimensions 3 and 5 for discrete Lotka–Volterra mappings corresponding to two types of homogeneous tournaments with an arbitrary number of edges. A Python script has been developed to classify supports of dimension $k$ and to compute their spectra, provided that the coefficients $a_{ki}$ are real numbers. A structured algorithm for computing the fixed points of discrete Lotka–Volterra

dynamics on a standard simplex is presented. The software implementation is carried out in Python and organized into separate modules for constructing skew-symmetric interaction matrices, determining supports, finding fixed points, and calculating the spectrum of the Jacobi matrix.

## Keywords

Lotka–Volterra mapping; homogeneous tournament; fixed point; Jacobian spectrum.

## Affiliations

Tadzhieva M.A., PhD, head of the department of higher mathematics
**Address:** Tashkent State Transport University and Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Senior Researcher. Tashkent, Uzbekistan
**e-mail:** mohbonut@mail.ru
**ORCID ID: 0000-0001-9232-3365**

Maqsimova S.V., doctorate student of the department of Mathematics
**Address:** Andijan State University, Andijan, Uzbekistan.
**e-mail:** hayitovas20@gmail.com
**ORCID ID: 0009-0007-0083-0978**