Uzbekistan Journal of Mathematics and Computer Science
Volume-2, Issue-2, Page 120–130 (2026)
DOI: https://doi.org/10.56143/ujmcs.v2i2.10
Research article

Задача Стефана для двухкомпонентной системы с зависящей от плотности диффузией

Тахиров Жозил Останович, Расулов Мирожиддин Собиржонович* и Анваржонов Бунёдбек Баходирович

Аннотация

В настоящей работе рассматривается задача со свободной границей для двухвидовой конкурентной модели с нелинейной диффузией в одномерном случае. Рассматриваемая система является связанной, а положение каждой свободной границы определяется условием Стефана. Сначала при некоторых предположениях устанавливается локальное существование и единственность решений, а затем при дополнительных предположениях доказывается глобальное существование и единственность решений. Подход к решению задачи основан на подходящих заменах переменных, теоремах о неподвижной точке и различных априорных оценках.

Ключевые слова: *реакция-диффузия, параболическое уравнение, свободные границы, априорная оценка, теорема существования и единственности.*

Предметная классификацие AMS (2020): *Основная: 35R35; Дополнительная: 35K20; 35K58; 35K59.*

1. Введение

Распространение новых или инвазивных видов является центральной темой экологии, и значительные исследования были посвящены лучшему пониманию природы такого распространения [1, 2]. Экологические проблемы требуют использования целой иерархии моделей, способных описывать не только разные уровни организации систем, но и взаимодействие между этими уровнями. Тем не менее, значительные успехи были достигнуты в исследованиях инвазии видов посредством исследований фронтального распространения.

В последнее время задачи со свободной границей, основанные на уравнении реакции-диффузии, широко предлагаются для описания фронта распространения во многих областях. Так, подход, предложенный в работе [3], моделирует явление распространения для одного вида, принимая фронт распространения как свободную границу, где ключевым предположением является то, что плотность популяции исчезает на фронте, а механизм распространения определяется пространственным градиентом популяции на этом фронте.

Следуя такому подходу, существуют различные биологические соображения в отношении двухвидовых моделей конкуренции. В работе [4] авторы считают, что инвазивный вид изначально существует в некотором промежутке и вторгается в окружающую среду, тогда как резидентный вид распространяется по всему пространству. В работах [5, 6] предполагается, что два вида со слабой конкуренцией распространяются вдоль одной и той же свободной границы. Аналогичные работы, но для двухвидовых моделей хищник-жертва, можно найти в [7, 8, 9]. В частности, в работе [9] свободная граница моделирует фронт распространения хищников в одномерной среде. Динамика плотности популяций хищника и жертвы описывается системой уравнений реакции-диффузии. Автором

Received : *19–september–2026,* ***Accepted :*** *16–november–2026*
**** Corresponding author***

доказываются существование и единственность решения с помощью теоремы о сжимающем отображении; также проводится вычислительный эксперимент для анализа поведения взаимодействующих видов и эволюции свободной границы. Кроме того, следует отметить, что модели типа «реакция–диффузия» с однородными граничными условиями первого (второго, третьего) рода на левой границе и условием Стефана на свободной правой границе подробно описаны в [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17].

Во многих работах диффузия предполагается линейной. Однако зависимость диффузионных коэффициентов от плотностей компонентов приводит к моделям с нелинейной диффузией [18, 19, 20, 21]. Так, в [18] исследовалась задача со свободной границей для системы реакции-диффузии с нелинейной диффузией, описывающей динамику численности двух конкурирующих популяций. В работе [20] нелинейная система параболических уравнений со свободной границей использовалась для моделирования заживления раны в смешанной двухфазной области, причём свободная граница описывала положение её края. Авторы доказали существование и единственность решения, а также исследовали свойства решения и свободной границы. Работа [19] посвящена исследованию задачи со свободной границей для одномерного реакционно-диффузионного уравнения с логистическим членом, в которой на левой (фиксированной) границе ставится условие Неймана. Рассматриваемая модель описывает пространственную динамику популяции с учётом её роста и внутривидовой конкуренции. Наконец, в [21] исследовалась задача с двумя свободными границами для квазилинейного параболического уравнения.

В данной работе исследуется следующая задача со свободной границей для конкурентной системы типа Лотки-Вольтерры с нелинейной диффузией:

$$u_t = \left(d_1\left(u,v\right)u_x\right)_x + u\left(a_1 - b_1u - c_1v\right), \quad (t,x)\in D, \tag{1.1}$$

$$v_t = d_2v_{xx} + v\left(a_2 - b_2u - c_2v\right), \quad (t,x)\in D, \tag{1.2}$$

$$u\left(0,x\right) = u_0\left(x\right), \quad h_0 \le x \le s_0, \tag{1.3}$$

$$v\left(0,x\right) = v_0\left(x\right), \quad h_0 \le x \le s_0, \tag{1.4}$$

$$u\left(t,s(t)\right) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{1.5}$$

$$v\left(t,s(t)\right) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{1.6}$$

$$u\left(t,h(t)\right) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{1.7}$$

$$v\left(t,h\left(t\right)\right) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{1.8}$$

$$s'\left(t\right) = -\left(d_{01}u_x\left(t,s\left(t\right)\right) + d_2v_x\left(t,s\left(t\right)\right)\right), \quad 0 \le t \le T, \tag{1.9}$$

$$h'\left(t\right) = -\left(d_{01}u_x\left(t,h\left(t\right)\right) + d_2v_x\left(t,h\left(t\right)\right)\right), \quad 0 \le t \le T, \tag{1.10}$$

где $D = \{(t,x) : 0 < t \le T, h\left(t\right) < x < s\left(t\right)\}$, $d_{01} = d_1\left(0,0\right)$, $s_0 = s\left(0\right)$, $h_0 = h\left(0\right)$; $u\left(t,x\right)$, $v\left(t,x\right)$ – плотности популяции в момент времени t в точке x; $x = h\left(t\right)$ и $x = s\left(t\right)$ – свободные границы, которые представляют фронт распространения, определяется вместе с функциями $u\left(t,x\right)$, $v\left(t,x\right)$; d_i – коэффициент диффузии, a_i – коэффициенты удельной скорости роста популяций, $i = 1,2$; c_1 и b_2 – коэффициенты межвидовой конкуренции, c_2 и b_1 – коэффициенты внутривидовой конкуренции, $u_0\left(x\right)$, $v_0\left(x\right)$ – начальные плотности популяции находятся в области $[h_0, s_0]$. Коэффициенты d_{01}, d_2, a_i, b_i, c_i – положительные постоянные.

Относительно данных задачи предполагаются выполненными следующие условия:

(a) Коэффициент диффузии $d_1(u,v)$ удовлетворяет условиям

$$d_1 \in C^{1+\alpha}(\mathbb{R}^2_+), \qquad 0 < \alpha < 1,$$

$$d_1(u,v) \ge d_0 > 0, \qquad \frac{\partial d_1(u,v)}{\partial u} \le 0, \quad (u,v)\in\mathbb{R}^2_+,$$

где $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$, а d_0- положительная постоянная.

(b) Начальные функции $u_0, v_0 \in C^{2+\alpha}([h_0, s_0])$ удовлетворяют следующим условиям:
$u_0(x) > 0, \quad v_0(x) > 0 \quad$ для всех $x \in (h_0, s_0)$,
$u_0(s_0) = v_0(s_0) = 0, \; u_0(h_0) = v_0(h_0) = 0$,
$u_0'(h_0) > 0, \quad u_0'(s_0) < 0, \quad v_0'(h_0) > 0, \quad v_0'(s_0) < 0$.

Задача (1.1)-(1.10) может рассматриваться как модель, описывающая распространение двух новых или инвазивных конкурирующих видов с двойными свободными границами $x = h(t)$ и $x = s(t)$ в одномерной среде обитания. Для обоих случаев задано граничное первого рода: $u(t, h(t)) = 0 = u(t, s(t))$ и $v(t, h(t)) = 0 = v(t, s(t))$. В общем случае, как вид u, так и вид v имеют тенденцию к миграции с границы в поисках нового местообитания, т.е. они будут двигаться наружу вдоль неизвестной кривой (свободной границы) с течением времени. Предполагается, что скорость расширения свободной границы пропорциональна нормированным градиентам плотности популяции на этой границе, т.е.

$$s'(t) = -\left(d_{01} u_x(t, s(t)) + d_2 v_x(t, s(t))\right), \quad h'(t) = -\left(d_{01} u_x(t, h(t)) + d_2 v_x(t, h(t))\right),$$

что соответствует известному условию Стефана. Подробнее об экологической интерпретации данного условия можно найти в работах [22, 23]. Кроме того, задачи со свободной границей находят применение при исследовании разнообразных явлений, особенно в области биологии, медицины и физики. В частности, условие Стефана использовалось для моделирования таких процессов, как таяние льда при контакте с водой [24, 25], распространение инфекции в тканях [26], заживление ран [27], рост опухоли [28], а также ряда других [29, 30].

В работах [5, 6] задача (1.1)-(1.10) исследована в случае $d_1(u, v) = 1$, с граничными условиями Неймана и одной неизвестной свободной границей. В работе [18] исследована задача, аналогичная (1.1)-(1.10), в которой оба коэффициента диффузии $d_1(u, v)$ и $d_2(u, v)$ зависят от плотностей компонентов. На фиксированной левой границе $x = 0$ задавались однородные условия Неймана, тогда как правая граница являлась свободной. Существование решения доказано с помощью принципа Лере–Шаудера на основе априорных оценок, а единственность установлена с использованием интегрального представления свободной границы, принципа максимума и сравнения решений вспомогательных параболических задач. В настоящей работе рассматриваются две свободные границы; кроме того, применяется иной подход к получению априорных оценок.

Структура работы спланирована следующим образом. В Разделе 2 с помощью теоремы о сжимающих отображениях устанавливается локальное существование и единственность решения задачи (1.1)-(1.10). Раздел 3 посвящён получению априорных оценок, на основе которых доказывается глобальная разрешимость и единственность классического решения.

2. Локальное существование и единственность решения.

В этом разделе мы докажем лемму, касающуюся локального существования решения задачи со свободной границей (1.1)-(1.10).

Лемма 2.1. *Задача* (1.1)-(1.10) *имеет единственное локальное решение*

$$(u, v, s, h) \in \left[C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(\bar{D}_T)\right]^2 \times \left[C^{1+\frac{\alpha}{2}}([0, T])\right]^2$$

для любого $\alpha \in (0, 1)$ *и некоторого достаточно малого* $T > 0$, *зависящего только от* $\|u_0\|_{C^{2+\alpha}([h_0, s_0])}$, $\|v_0\|_{C^{2+\alpha}([h_0, s_0])}$, s_0, h_0, *где* $\bar{D}_T = \{(t, x) : t \in [0, T],\, x \in [h(t), s(t)]\}$.

Доказательство. Сначала выпрямим свободную границу. Для этого используем следующую замену переменной

$$t = t, \quad y = \frac{2x - \big(s(t) + h(t)\big)}{s(t) - h(t)}$$

Тогда области D соответствует область $Q=\{(t,y):0<t<T,-1<y<1\}$, а функции $U(t,y)=u(t,x)$, $V(t,y)=v(t,x)$ являются решением задачи

$$\begin{cases} U_t=\rho^2 d_1(U,V)U_{yy}+\rho^2(t)\,d_{1u}(U,V)\,U_y^2 \\ \qquad +\rho^2(t)\,d_{1v}(U,V)\,V_yU_y-\varphi(t)U_y+f_1(U,V), & (t,y)\in Q_T, \\ V_t=d_2\rho^2V_{yy}-\varphi(t)V_y+f_2(U,V), & (t,y)\in Q_T, \\ U(0,y)=U_0(y), \quad V(0,y)=V_0(y), & -1\le y\le 1, \\ U(t,-1)=0, \quad U(t,1)=0, & 0\le t\le T, \\ V(t,-1)=0, \quad V(t,1)=0, & 0\le t\le T, \end{cases} \tag{2.1}$$

где

$$\rho(t)=\frac{2}{s(t)-h(t)},$$

$$\varphi(t)=\frac{s'-h'}{s-h}\cdot y+\frac{s'h-sh'}{(s-h)^2}\cdot\big(s+h\big),$$

$$s'(t)=-\rho(t)\left[d_{01}U_y(t,1)+d_2V_y(t,1)\right],$$

$$h'(t)=-\rho(t)\left[d_{01}U_y(t,-1)+d_2V_y(t,-1)\right],$$

$$f_1(U,V)=U(a_1-b_1U-c_1V), \quad f_2(U,V)=V(a_2-b_2U-c_2V).$$

Далее для каждого уравнения системы отдельно сформулируем соответствующую задачу:

$$\begin{cases} U_t=\rho^2(t)d_1(U,V)\,U_{yy}+\rho^2(t)\,d_{1u}(U,V)\,U_y^2 \\ \qquad +\rho^2(t)\,d_{1v}(U,V)\,V_yU_y-\varphi(t)U_y+f_1(U,V), & (t,y)\in Q_T, \\ U(0,y)=U_0(y), & -1\le y\le 1, \\ U(t,-1)=0, \quad U(t,1)=0, & 0\le t\le T, \end{cases} \tag{2.2}$$

$$\begin{cases} V_t=d_2\rho^2(t)\,V_{yy}-\varphi(t)V_y+f_2(U,V), & (t,y)\in Q_T, \\ V(0,y)=V_0(y), & -1\le y\le 1, \\ V(t,-1)=0, \quad V(t,1)=0, & 0\le t\le T. \end{cases} \tag{2.3}$$

Пусть $s^*\equiv s'(0)=-\left(d_{01}u'(s_0)+d_2v'(s_0)\right)$, $h^*\equiv h'(0)=-\left(d_{01}u'(h_0)+d_2v'(h_0)\right)$ и

$$0<T\le\frac{s_0}{8(1+|s^*|+|h^*|)}. \tag{2.4}$$

Введем функциональные пространства:

$$\mathcal{D}_{1T}=\{U\in C^{\frac{\alpha}{2},\alpha}(Q_T):U(y,0)=U_0(y),\|U-U_0\|_{C^{\frac{\alpha}{2},\alpha}(Q_T)}\le 1\},$$

$$\mathcal{D}_{2T}=\{V\in C^{\frac{\alpha}{2},\alpha}(Q_T):V(y,0)=V_0(y),\|V-V_0\|_{C^{\frac{\alpha}{2},\alpha}(Q_T)}\le 1\},$$

$$\mathcal{D}_{3T}=\{s\in C^{1+\frac{\alpha}{2}}([0,T]):s(0)=s_0,\|s'-s^*\|_{C^{\frac{\alpha}{2}}([0,T])}\le 1\},$$

$$\mathcal{D}_{4T}=\{h\in C^{1+\frac{\alpha}{2}}([0,T]):h(0)=h_0,\|h'-h^*\|_{C^{\frac{\alpha}{2}}([0,T])}\le 1\}.$$

Тогда $\mathcal{D}_T=\mathcal{D}_{1T}\times\mathcal{D}_{2T}\times\mathcal{D}_{3T}\times\mathcal{D}_{4T}$ – полное метрическое пространство с метрикой:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}\left((U_1,V_1,s_1,h_1),(U_2,V_2,s_2,h_2)\right)&=\|U_1-U_2\|_{C^{\frac{\alpha}{2},\alpha}(Q_T)}+\|V_1-V_2\|_{C^{\frac{\alpha}{2},\alpha}(Q_T)}\\&+\|s_1'-s_2'\|_{C^{\frac{\alpha}{2}}([0,T])}+\|h_1'-h_2'\|_{C^{\frac{\alpha}{2}}([0,T])}.\end{aligned}$$

Доказательство существования и единственности решения задачи (2.1) проводится с использованием теоремы о неподвижной точке на построенном полном метрическом пространстве $\mathcal{D}_T$ для достаточно малого $T > 0$, а также априорных оценок Шаудера и теорем вложения для параболических уравнений (см., например, [31]). Ввиду стандартности этих рассуждений подробное доказательство опускается; аналогичные схемы доказательства для задач со свободной границей детально изложены в работах [32, 33, 34].

Лемма 2.1 доказана. □

3. Глобальное существование и единственность решения.

Для того чтобы продолжить локальное решение, установленное в предыдущем разделе, на всех $t > 0$, нам необходимо получить ряд априорных оценок.

Лемма 3.1. *Пусть функции $u(t,x)$, $v(t,x)$, $s(t)$, $h(t)$ являются решением задачи (1.1)-(1.10). Тогда существуют положительные постоянные M_1, M_2, не зависящие от T, для которых справедливы оценки*

$$0 < u(t,x) \le M_1, \quad (t,x) \in D, \tag{3.1}$$

$$0 < v(t,x) \le M_2, \quad (t,x) \in D, \tag{3.2}$$

кроме того

$$0 < s'(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{3.3}$$

$$0 < -h'(t), \quad 0 < t \le T. \tag{3.4}$$

Доказательство. Из сильного принципа максимума следует, что $u(t,x) > 0$ и $v(t,x) > 0$ для $t \in [0,T]$, $x \in (h(t), s(t))$.

Чтобы получить верхние оценки поступаем следующим образом. Построим вспомогательную задачу для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}\overline{u}(t)}{\mathrm{d}t} = \overline{u}(t)\left(a_1 - b_1\overline{u}(t)\right), & t > 0, \\ \overline{u}(0) = \|u_0\|_\infty. \end{cases}$$

Её решение дается следующей формулой:

$$\overline{u}(t) = \frac{a_1}{b_1} e^{a_1 t}\left(e^{a_1 t} - 1 + \frac{a_1}{b_1\|u_0\|_\infty}\right)^{-1}.$$

Сравнивая $u(t,x)$ с $\overline{u}(t)$ получим

$$u(t,x) \le \sup_{t\ge 0}\overline{u}(t) \le \max\left\{\|u_0(x)\|, \frac{a_1}{b_1}\right\} \equiv M_1.$$

Аналогично получим $v(t,x) \le \max\left\{\|v_0(x)\|, \frac{a_2}{c_2}\right\} \equiv M_2$.

Далее, с учетом условий (1.7), (1.8) и положительность функций $u(t,x)$, $v(t,x)$ в области D, находим $u_x(t,s(t)) < 0$, $v_x(t,s(t)) < 0$ и $u_x(t,h(t)) > 0$, $v_x(t,h(t)) > 0$. Следовательно, из условий Стефана получим $s'(t) > 0$ и $h'(t) < 0$. □

Лемма 3.2. *Предположим, что $(u,v,s,h) \in C^{1,2}(D) \times C^{1,2}(D) \times C^1([0,T)) \times C^1([0,T))$ является решением задачи (1.1)-(1.10). Тогда*

$$\|v\|_{W_p^{1,2}(D)} \le M.$$

Доказательство. Второе уравнение задачи (1.1)-(1.10) запишем в виде:

$$v_t - d_2 v_{xx} - v(a_2 - b_2 u - c_2 v) = 0. \tag{3.5}$$

На основании леммы 3.1 справедлива оценка

$$\|a_2 - b_2 u - c_2 v\|_{L^\infty(D)} \le M. \tag{3.6}$$

Сопоставляя (3.5), (3.6) и используя стандартную параболическую L^p-оценку, приходим к неравенству

$$\|v\|_{W_p^{1,2}(D)} \le M, \;\; p > 5. \tag{3.7}$$

Кроме того, в силу (3.7) и леммы 3.1 из [33], находим $\|v_x\|_{L_\infty} \le M_3$. □

Теперь покажем, что функции $s'(t)$ и $-h'(t)$ ограничены сверху.

Лемма 3.3. *Существуют константы M_4 и M_5 не зависящие от T, такие, что*

$$s'(t) \le M_4, \quad 0 \le t \le T, \tag{3.8}$$

$$-h'(t) \le M_5, \quad 0 \le t \le T. \tag{3.9}$$

Доказательство. Пусть

$$\Omega = \left\{(t,x) : 0 < t < T, s(t) - \frac{1}{N} < x < s(t)\right\},$$

$$\Lambda = \left\{(t,x) : 0 < t < T, h(t) < x < h(t) + \frac{1}{K}\right\},$$

где N и $K-$ положительные числа, которые будут определены позже.

Перепишем уравнения для $u(t,x)$ и $v(t,x)$ в виде

$$u_t - d_1(u,v)u_{xx} - d_{1u}(u,v)u_x^2 - d_{1v}(u,v)v_x u_x = u(a_1 - b_1 u - c_1 v),$$

$$v_t - d_2 v_{xx} = v(a_2 - b_2 u - c_2 v)$$

и строим вспомогательную функцию на Ω следующим образом

$$w_1(t,x) = M\left[2N(s(t) - x) - N^2(s(t) - x)^2\right],$$

где M — верхняя граница $u(t,x)$ и $v(t,x)$.

Докажем, что $w_1(t,x) \ge u(t,x)$ и $w_1(t,x) \ge v(t,x)$ на Ω для соответствующего N. В области Ω

$$w_{1t} = 2MNs'(t)(1 - N_1(s(t) - x)) \ge 0,$$

$$-d_1(w_1,v)w_{1xx} = 2MN^2 d_1(w_1,v) \ge 2Md_{01}N^2,$$

$$-d_2 w_{1xx} \ge 2Md_2N^2,$$

$$-d_{1u}(w_1,v)w_{1x}^2 \ge 0, \;\; |-d_{1v}(w_1,v)w_{1x}v_x| \le 2c_0MN,$$

где c_0 — константа, не зависящая от N и T. Отсюда следует, что

$$w_{1t} - d_1(w_1,v)w_{1xx} - d_{1u}(w_1,v)w_{1x}^2 - d_{1v}(w_1,v)w_{1x}v_x \ge 2M_1d_0N^2 - 2c_0M_1N > a_1M_1 > u(a_1 - b_1u - c_1v),$$

$$w_{1t} - d_2 w_{1xx} \ge 2M_2d_2N^2 > a_2M_2 > v(a_2 - b_2u - c_2v)$$

на Ω, если $N \geq \max\left\{\frac{c_0+\sqrt{c_0^2+2d_{01}a_1M}}{2d_{01}}, \sqrt{\frac{a_2}{2d_2}}\right\}$. Кроме того

$$w_1\left(t, s(t)-\frac{1}{N}\right) = M \geq u\left(t, s(t)-\frac{1}{N}\right), \;\; w_1\left(t, s(t)-\frac{1}{N}\right) = M \geq v\left(t, s(t)-\frac{1}{N}\right),$$

$$w_1(t, s(t)) = u(t, s(t)) = v(t, s(t)) = 0.$$

Таким образом, если мы можем выбрать N так, что

$$u_0(x) \leq w_1(0,x) \;\text{ и }\; v_0(x) \leq w_1(0,x) \;\text{ для }\; x \in \left[s_0 - \frac{1}{N}, s_0\right],$$

то мы можем применить принцип максимума к $w_1 - u$ и $w_1 - v$ над Ω, чтобы вывести, что

$$u(t,x) \leq w_1(t,x) \;\text{ и }\; v(t,x) \leq w_1(t,x) \;\text{ для }\; (t,x) \in \Omega.$$

Тогда следует, что

$$u_x(t, s(t)) \geq w_{1x}(t, s(t)) = -2NM, \;\; v_x(t, s(t)) \geq w_{1x}(t, s(t)) = -2NM.$$

Для завершения доказательства нам нужно только найти некоторое N, независимое от T, такое, что

$$u_0(x) \leq w_1(0,x), \;\; v_0(x) \leq w_1(0,x) \;\; \text{для} \;\; x \in \left[s_0 - \frac{1}{N}, s_0\right].$$

По определению $w_1(t,x)$, имеем

$$w_1(0,x) = M\left[2N\left(s_0 - x\right) - N^2\left(s_0 - x\right)^2\right]$$

если $x \in \left[s_0 - \frac{1}{N}, s_0 - \frac{1}{2N}\right]$, то $w_1(0,x) \geq \frac{3}{4}M$; если $x \in \left[s_0 - \frac{1}{2N}, s_0\right]$, то

$$w_{1x}(0,x) = -2MN\left[1 - N\left(s_0 - x\right)\right] \leq -MN.$$

Если выберем

$$N = \max\left\{\frac{c_0 + \sqrt{c_0^2 + 2d_0a_1M_1}}{2d_0}, \frac{4\left\|u_0\right\|_{C^1([0,s_0])}}{3M}, \sqrt{\frac{a_2}{2d_2}}, \frac{4\left\|v_0\right\|_{C^1([0,s_0])}}{3M}\right\}$$

тогда имеем $w_{1x}(0,x) \leq u_0'(x)$ и $w_{1x}(0,x) \leq v_0'(x)$ для $x \in \left[s_0 - \frac{1}{2N}, s_0\right]$.

Поскольку $w_1\left(0, s_0\right) = 0 = u_0\left(s_0\right) = v_0\left(s_0\right)$, из приведенных выше неравенств следует, что $w_1(0,x) \geq u_0(x)$ и $w_1(0,x) \geq v_0(x)$ для $x \in \left[s_0 - \frac{1}{2N}, s_0\right]$.

Кроме того, для $x \in \left[s_0 - \frac{1}{N_1}, s_0 - \frac{1}{2N_1}\right]$ выполняются:

$$w_1(0,x) \geq \frac{3}{4}M, \;\; u_0(x) \leq \frac{\left\|u_0\right\|_{C^1([0,s_0])}}{N} \leq \frac{3}{4}M, \;\; v_0(x) \leq \frac{\left\|v_0\right\|_{C^1([0,s_0])}}{N} \leq \frac{3}{4}M.$$

Поэтому $u_0(x) \leq w_1(0,x), \;\; v_0(x) \leq w_1(0,x)$ для $x \in \left[s_0 - \frac{1}{N}, s_0\right]$. Следовательно, по принципу максимума получаем

$$u_x\left(t, s(t)\right) \geq w_{1x}\left(t, s(t)\right), \;\; v_x\left(t, s(t)\right) \geq w_{1x}\left(t, s(t)\right).$$

Таким образом, имеем

$$s'(t) = -\left(d_{01}u_x\left(t, s\left(t\right)\right) + d_2v_x\left(t, s\left(t\right)\right)\right) \leq 2N\left(d_{01}M_1 + d_2M_2\right) \equiv M_4.$$

Теперь перейдем к доказательству $-h'(t) \leq M_5$ при $t \in (0,T]$. Для этого мы определяем вспомогательную функцию $w_2(t,x) = M\left[2K(x - h(t)) - K^2(x - h(t))^2\right]$ на Λ и простых вычислений получаем следующее

$$w_{2t} = 2MK(-h'(t))\left(1 - K(x - h(t))\right) \geq 0,$$

$$-d_1(w_2,v)w_{2xx} = 2MK^2 d_1(w_2,v) \geq 2Md_0K^2,$$
$$-d_2 w_{2xx} \geq 2Md_2K^2,$$
$$w_{2x} = M\left(2K - 2K^2\left(x-h(t)\right)\right) \geq 0,$$
$$-d_{1u}(w_2,v)w_{2x}^2 \geq 0, \quad |-d_{1v}(w_2,v)v_x| \leq c_0.$$

Отсюда имеем

$$w_{2t} - d_1\left(w_2,v\right)w_{2xx} - d_{1u}\left(w_2,v\right)w_{2x}^2 - d_{1v}\left(w_2,v\right)w_{2x}v_x \geq 2M_1d_0K^2 - 2c_0 > a_1M_1 > u\left(a_1 - b_1u - c_1v\right),$$

$$w_{2t} - d_2w_{2xx} \geq 2M_2d_2K^2 > a_2M_2 > v\left(a_2 - b_2u - c_2v\right),$$

$$w_2\left(t,h(t)+\frac{1}{K}\right) = M \geq u\left(t,h(t)+\frac{1}{K}\right), \;\; w_2\left(t,h(t)+\frac{1}{K}\right) = M \geq v\left(t,h(t)+\frac{1}{K}\right),$$

$$w_2(t,h(t)) = u(t,h(t)) = v(t,h(t)) = 0,$$

$$w_2(0,x) = M\left(2K(x-h_0) - K^2(x-h_0)\right) \geq \frac{3}{4}M,$$

$$w_{2x}(0,x) = M\left(2K - 2K^2(x-h_0)\right) \geq MK.$$

Если выберем K таким образом, что

$$K = \max\left\{\sqrt{\frac{c_0+a_1M_1}{2d_0M_1}}, \frac{4\left\|u_0\right\|_{C^1([0,h_0])}}{3M}, \sqrt{\frac{a_2}{2d_2}}, \frac{4\left\|v_0\right\|_{C^1([0,h_0])}}{3M}\right\}.$$

Тогда принцип сравнения дает $w_2\left(t,x\right) \geq u\left(t,x\right)$ и $w_2\left(t,x\right) \geq v\left(t,x\right)$ для $t \in [0,T]$ и $x \in \left(h(t), h(t)+\frac{1}{K}\right)$. Поскольку $w_2(t,h(t)) = u(t,h(t)) = v(t,h(t)) = 0$, то мы получаем, что

$$u_x\left(t,h(t)\right) \leq w_{2x}\left(t,h(t)\right), \quad v_x\left(t,h(t)\right) \leq w_{2x}\left(t,h(t)\right).$$

Следовательно, с учетом условия Стефана (1.10) находим

$$-h'(t) \leq 2K\left(d_{01}M_1 + d_2M_2\right) \equiv M_5.$$

Доказательство леммы 3.3 завершено. □

На основе лемм 3.1, 3.3 докажем следующее утверждение о глобальном существовании и единственности решения задачи (1.1)-(1.10).

Теорема 3.1. *При выполнении указанных выше предположений задача* (1.1)-(1.10) *имеет единственное глобальное классическое решение* (u,v,s,h), *определённое при всех* $t \geq 0$.

Доказательство. По лемме 2.1 и локальной единственности решение имеет максимальный интервал существования $[0,T_{\max})$, где $T_{\max} > 0$. Докажем, что $T_{\max} = +\infty$.

Предположим от противного, что $T_{\max} < \infty$. Согласно леммам 3.1 и 3.3, найдется положительная постоянная C, не зависящая от $T_{\max}$, такая, что

$$0 \leq u(x,t),\, v(x,t) \leq C, \quad |s'(t)| \leq C, \quad |h'(t)| \leq C$$

для всех $t \in [0,T_{\max})$ и $x \in [h(t),s(t)]$. В частности,

$$s_0 \leq s(t) \leq s_0 + Ct, \quad h_0 - Ct \leq h(t) \leq h_0$$

для всех $t \in [0, T_{\max})$.

Зафиксируем $\delta \in (0, T_{\max})$ и $\widetilde{T} > T_{\max}$. Из стандартной теории параболических уравнений следует, что существует постоянная $\widetilde{C} > 0$, зависящая от δ, $\widetilde{T}$ и фиксированных данных задачи, такая, что

$$\|u(t,\cdot)\|_{C^{2+\alpha}([h(t),s(t)])} + \|v(t,\cdot)\|_{C^{2+\alpha}([h(t),s(t)])} \le \widetilde{C}$$

для всех $t \in [\delta, T_{\max})$. При этом $\widetilde{C}$ не зависит от близости t к $T_{\max}$.

Следуя доказательству леммы 2.1, существует $\tau > 0$, зависящее только от C, $\widetilde{C}$ и фиксированных данных задачи, но не от начального момента t, такое, что решение задачи (1.1)-(1.10) с любым начальным моментом $t \in [\delta, T_{\max})$ единственным образом продолжается на интервал $[t, t+\tau)$. При необходимости уменьшая τ, считаем, что

$$0 < \tau < T_{\max} - \delta.$$

Тогда $T_{\max} - \tau/2 \in (\delta, T_{\max})$. Это противоречит определению $T_{\max}$, поскольку решение с начальным моментом $T_{\max} - \frac{\tau}{2}$ единственным образом продолжается до момента $T_{\max} + \frac{\tau}{2}$. Следовательно, $T_{\max} = \infty$.

Единственность глобального решения следует из локальной единственности посредством последовательного продолжения.

Теорема 3.1 доказана. □

Список литературы

[1] Cantrell, R. S., Cosner, C.: Spatial Ecology via Reaction-Diffusion Equations. Wiley, England (2003).

[2] Pao, C. V.: Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations. Plenum Press, New York (1993).

[3] Du, Y., Lin, Zh. G.: *Spreading-vanishing dichotomy in the diffusive logistic model with a free boundary*. SIAM J. Math. Anal. **42** (1), 377-405 (2010). https://doi.org/10.1137/090771089

[4] Du, Y., Lin, Zh. G.: *The diffusive competition model with a free boundary: invasion of a superior or inferior competitor*. Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B **19** (10), 3105-3132 (2014). https://doi.org/10.3934/dcdsb.2014.19.3105

[5] Guo, J. S., Wu, C. H.: *On a Free Boundary Problem for a Two-Species Weak Competition System*. J. Dyn. Diff. Equat. **24**, 873-895 (2012). https://doi.org/10.1007/s10884-012-9267-0

[6] Wang, M., Zhao, J.: *Free Boundary Problems for a Lotka–Volterra Competition System*. J. Dyn. Diff. Equat. **26**, 655-672 (2014). https://doi.org/10.1007/s10884-014-9363-4

[7] Liu, Y., Guo, Z., Smaily, El M., Wang, L.: *Biological invasion in a predator–prey model with a free boundary*. Bound. Value Probl. **2019**, 33 (2019). https://doi.org/10.1186/s13661-019-1147-7

[8] Liu, Y., Guo, Z., Smaily, El M., Wang, L.: *A Leslie-Gower predator-prey model with a free boundary*. Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S **12** (7), 2039-2054 (2019). https://doi.org/10.3934/dcdss.2019133

[9] Lin, Z. G.: *A free boundary problem for a predator-prey model*. Nonlinearity **20** (8), 1883-1882 (2007). https://doi.org/10.1088/0951-7715/20/8/004

[10] Bao, L., Shen, W.: *Vanishing-Spreading Dichotomy in a Two-Species Chemotaxis Competition System with a Free Boundary*. J. Dyn. Diff. Equat. **35**, 2905-2938 (2023). https://doi.org/10.1007/s10884-023-10321-y

[11] Ding, N., Cai, J., Xu, L.: *A free boundary problem with nonlinear advection and Dirichlet boundary condition*. Nonlinear Anal. Real World Appl. **69**, 103719 (2023). https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2022.103719

[12] Li, X., Li, L., Xu, Y., et al.: *Dynamics for a diffusive epidemic model with a free boundary: spreading-vanishing dichotomy*. Z. Angew. Math. Phys. **75**, 202 (2024). https://doi.org/10.1007/s00033-024-02341-5

[13] Li, R., Zhu, L., Zhou, Y.: *The conditions of failing and successful plant invasions with free boundary*. Sci. Rep. **15**, 17910 (2025). https://doi.org/10.1038/s41598-025-02695-4

[14] Long, X., Lou, Y., Ni, W., et al.: *A nonlocal West Nile virus model with nonlocal free boundary conditions driven by both mosquitoes and birds*. J. Math. Biol. **92**, 46 (2026). https://doi.org/10.1007/s0285-026-02355-9

[15] Sun, N., Zhang, D.: *Dynamical behavior of solutions of a reaction–diffusion–advection model with a free boundary*. Z. Angew. Math. Phys. **75**, 40 (2024). https://doi.org/10.1007/s00033-023-02183-7

[16] Wang, J., Wang, J., Zhao, L.: *Spreading–Vanishing Scenarios in a Time-Periodic Parasitic–Mutualistic Model of Mistletoes and Birds in Heterogeneous Environment with Free Boundary*. J. Dyn. Diff. Equat. **35**, 1409-1434 (2023). https://doi.org/10.1007/s10884-021-09968-2

[17] Zhang, S., Zhu, X., Liu, X.: *A diffusive Lotka–Volterra model with Robin boundary condition and sign-changing growth rates in time-periodic environment*. Nonlinear Anal. Real World Appl. **72**, 103856 (2023). https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2023.103856

[18] Rasulov, M. S.: *Free Boundary Problem for a System of Parabolic Equations of the Reaction-Diffusion Type*. Russ. Math. **69**, 56-66 (2025). https://doi.org/10.3103/S1066369X2570015X

[19] Takhirov, J. O.: *A free boundary problem for a reaction-diffusion equation in biology*. Indian J. Pure Appl. Math. **50**, 95-112 (2019). https://doi.org/10.1007/s13226-019-0309-8

[20] Takhirov, Z. O., Rasulov, M. S.: *Problem with free boundary for systems of equations of reaction-diffusion type*. Ukr. Math. J. **69** (12), 1968-1980 (2018). https://doi.org/10.1007/s11253-018-1481-4

[21] Rasulov, M. S., Umirkhonov, M. T.: *Free Boundary Problem for a Nonlinear Diffusion Equation*. J. Math. Sci. **300** (4), 444-455 (2026). https://doi.org/10.1007/s10958-026-08619-5
[22] Wang, M.: Nonlinear Second Order Parabolic Equations. CRC Press, Boca Raton (2021). https://doi.org/10.1201/9781003150169
[23] Du, Y.: *Propagation and reaction–diffusion models with free boundaries*. Bull. Math. Sci. **12** (1), 2230001 (2022). https://doi.org/10.1142/S1664360722300018
[24] Friedman, A.: Partial Differential Equations of Parabolic Type. Mir, Moscow (1968). (In Russian)
[25] Meirmanov, A. M.: Stefan Problem. Nauka, Novosibirsk (1986). (In Russian)
[26] Takhirov, J. O., Rasulov, M. S., Norov, A. Q.: *On a Mathematical Model with a Free Boundary of the Dynamics of Diffuse Infection with an Immune Response*. Lobachevskii J. Math. **45** (9), 3986-3996 (2024). https://doi.org/10.1134/S1995080224602927
[27] Friedman, A., Hu, B., Xue, C.: *Analysis of a Mathematical Model of Ischemic Cutaneous Wounds*. SIAM J. Math. Anal. **42** (5), 2013-2040 (2010). https://doi.org/10.1137/090772630
[28] Friedman, A., Hao, W., Lam, K. Y.: *A cancer model with nonlocal free boundary dynamics*. J. Math. Biol. **85**, 46 (2022). https://doi.org/10.1007/s00285-022-01813-4
[29] Araya, K., Ishige, K.: *A one-dimensional Stefan problem for the heat equation with a nonlinear boundary condition of blow-up type*. J. Evol. Equ. **26**, 78 (2026). https://doi.org/10.1007/s00028-026-01220-y
[30] Nguyen, T. H.: *Dynamics for advective-cooperative system with free boundaries in a nondegenerate epidemiological model*. Nonlinear Dyn. **113**, 2941-2968 (2025). https://doi.org/10.1007/s11071-024-10346-y
[31] Ladyzhenskaya, O. A., Solonnikov, V. A., Uraltseva, N. N.: Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type. Nauka, Moscow (1967). (In Russian)
[32] Chen, X., Friedman, A.: *A free boundary problem arising in a model of wound healing*. SIAM J. Math. Anal. **32** (4), 788-800 (2000). https://doi.org/10.1137/S0036141099351693
[33] Yousefnezhad, M., Mohammadi, S. A., Bozorgnia, F.: *A Free Boundary Problem for a Predator-Prey Model with Nonlinear Prey-Taxis*. Appl. Math. **63**, 125-147 (2018). https://doi.org/10.21136/AM.2018.0227-17
[34] Yunes, G. A., El Khatib, N., Volpert, V. A.: *Existence of a solution to a free boundary problem for reaction-diffusion systems*. J. Math. Sci. **283**, 150-166 (2024). https://doi.org/10.1007/s10958-024-07245-3

Stefan problem for a two-component system with density-dependent diffusion

Takhirov Jozil Ostanovich, Rasulov Mirojiddin Sobirjonovich and Anvarjonov Bunyodbek Baxodirovich

Abstract

In this work, the problem with two free boundaries for a system of quasilinear parabolic equations in the one-dimensional case is considered. To this end, the problem is reduced to a problem with a fixed boundary by means of a change of variables. The resulting problem has coefficients that depend on time and spatial position, together with nonlinear terms. Existence of a solution to the corresponding linear problem is then proved, and the existence of a solution to the nonlinear problem is obtained via the fixed-point theorem. A priori estimates of Schauder type are established for the sought solution. On the basis of these estimates, uniqueness and existence theorems are proved.

Keywords

reaction-diffusion; parabolic equation; free boundaries; a priori estimate; existence and uniqueness theorem.

Affiliations

Takhirov Jozil Ostanovich
Address: V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, 9 University str., Tashkent, 100174, Uzbekistan.
e-mail: prof.takhirov@yahoo.com
ORCID ID: 0000-0002-0023-5673

Rasulov Mirojiddin Sobirjonovich
Address: V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, 9 University str., Tashkent, 100174, Uzbekistan.
Tashkent State Transport University, 1 Temiryolchilar str., Tashkent, 100000, Uzbekistan.
e-mail: rasulovms@bk.ru
ORCID ID: 0000-0003-0704-6012

Anvarjonov Bunyodbek Baxodirovich
Address: Kimyo International University in Tashkent, 156 Sh.Rustaveli str., Tashkent, 100121, Uzbekistan.
e-mail: bunyodbek.anvarjonov@bk.ru
ORCID ID: 0009-0000-9647-4603