Uzbekistan Journal of Mathematics and Computer Science
Volume-2, Issue-2, Page 85–95 (2026)
DOI: https://doi.org/10.56143/ujmcs.v2i2.7
Research article

О гладкости обобщенного решения полунелокальной краевой задачи для уравнения Трикоми четвертого порядка

Джамалов Сироджиддин З.*, Юсупов Шерзод Б.

Аннотация

Уравнения смешанного типа и линейные обратные задачи являются фундаментальными в математическом моделировании широкого спектра сложных физических явлений, что делает их строгое теоретическое исследование важной темой исследований. В данной работе мы исследуем единственность,существование и гладкость регулярное обобщенное решение полунелокальной краевой задачи для уравнения Трикоми четвертого порядка в пространствах Соболева. Единственность решения устанавливается с помощью метода энергетического интеграла, а существование доказывается с использованием комбинации модифицированного метода Галеркина, априорных оценок и метода "ε-регуляризации". Регулярность решения получена при дополнительных предположениях о гладкости коэффициентов уравнения. Представленные в этой работе результаты обеспечивают прочную теоретическую основу для разрешимости многомерных уравнений смешанного типа и предлагают основу для дальнейшего развития численных методов для соответствующих обратных задач.

Ключевые слова: *Уравнение Трикоми четвертого порядка; полунелокальная краевая задача; метод Фаэдо-Галеркина;методы априорных оценок и «ε-регуляризации»; однозначное разрешимость и гладкость регулярного обобщенного решения; пространства Соболева*

Предметная классификацие AMS (2020): *Основная: 35M10.*

1. Введение

Как известно, работа А.В. Бицадзе демонстрирует, что задача Дирихле для уравнения смешанного типа является некорректной [1]. Естественно возникает вопрос: можно ли заменить условия задачи Дирихле другими условиями, охватывающими всю границу, которые обеспечивают корректность задачи? Впервые такие краевые задачи (нелокальные краевые задачи) для уравнения смешанного типа были предложены и изучены в работах Ф.И. Франкля [2]. Наиболее близкой по форме к изученным задачам была исследована задача для уравнения смешанного типа первого и второго порядка в ограниченных областях в работах [3, 4, 5, 6, 7].

Как известно, локальные краевые задачи для уравнений смешанного типа четвертого порядка без вырождения были предложены и изучены классическими методами в работах Т. Джураева, А. Сопуева [8], М. Салахитдинова, Д.Дж. Аманов [9], Ю. Апаков, С. Мамажанов [10], Д. Дж. Аманов и А. В. Юлдашева [11]. Нелокальные краевые задачи для дифференциального уравнения в частных производных высокого порядка без вырождения изучались многими учеными, полная библиография доступна в монографии А. Дезина [12]. Прямые задачи с локальными

Received : *11–june–2026,* ***Accepted :*** *03–october–2026*
**** Corresponding author***

граничными условиями для уравнения смешанного типа второго порядка изучены в работах Г.Меграбова, К.Б.Сабитова и их учеников [13, 14], для уравнения высокого порядка в пространствах Соболева исследовались в работах В. Н. Врагова и И. Е. Егорова [15, 16, 17] и в то время такие задачи с нелокальными граничными условиями исследовались очень мало [18, 19]. Частично в работе [21], изучен единственность и сушествования слабого обобшенного решения полунелокальное краевое задачи для уравнения Трикоми четвертого порядка в пространстве Соболева.

В данной работе с использованием результатов работ [7, 15, 16, 19] и с применением модифицированного метода Галеркина, априорных оценок и «ε-регуляризации» изучается однозначная разрешимость и гладкость регулярного обобщенного решения одной полунелакальной краевой задачи для уравнения Трикоми четвертого порядка в пространствах Соболева.

В области $Q = (-1,1) \times (0,T) = \{(x,t); -1 < x < 1; 0 < t < T < +\infty\}$ рассмотрим уравнение Трикоми четвертого порядка:

$$Lu = Pu + Mu = f(x,t), \tag{1.1}$$

здесь

$$Pu = \sum_{i=0}^{4} K_i(x,t) D_t^i u, \quad Mu = a(x)u_{xxxx} - b(x)u_{xxtt} - c(x)u_{xx},$$

где $K_4(x,t) = K_4(x) = x; K_j(x,0) = K_j(x,T) (j = \overline{0,3})$,

$$a(x) \geq a_0 > 0, \quad b(x) \geq b_0 > 0, \quad c(x) \geq c_0 > 0$$

для всех $x \in [-1,1], D_t^i u = \frac{\partial^i u}{\partial t^i} (i = 0,1,2,3,4), \quad D_t^0 u = u.$

Пусть все коэффициенты уравнения (1.1) достаточно гладкие функции в $\overline{Q}$.

Полунелокальная краевая задача: найти ргулярное обобщённого решения $u(x,t)$ уравнения (1.1) из пространства Соболева $W_2^4(Q)$, удовлетворяющее следующим полунелокальным краевым условиям:

$$\gamma D_t^p u|_{t=0} = D_t^p u|_{t=T}, \quad p = 0,1,2,3, \tag{1.2}$$

$$u|_{x=-1} = u|_{x=1} = 0, \quad u_{xx}|_{x=-1} = u_{xx}|_{x=1} = 0, \tag{1.3}$$

где γ — ненулевое значение, которое будет указано ниже.

2. Необходимые понятия и функциональные пространства

Мы определяем $W_2^l(Q)$ ($1 \leq l$ — натуральное число) (для $l = 0, W_2^0(Q) = L_2(Q)$) как пространство Соболева со скалярным произведением

$$(u,\vartheta)_l = \int\limits_Q \sum_{|\alpha| \leq l} D^\alpha u D^\alpha \vartheta dx dt$$

и нормой

$$\|\vartheta\|_l^2 = \|\vartheta\|_{W_2^l(Q)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq l} \int_Q |D^\alpha \vartheta|^2 \, dx dt.$$

Здесь α — мультииндекс, D^α — обобщенная производная по переменным x и t [14, 15].

При получении различных априорных оценок мы часто используем неравенство Коши с σ [19], т.е.

$$\forall u, \vartheta \geq 0; \forall \sigma > 0; \quad 2 \cdot u \cdot \vartheta \leq \sigma u^2 + \frac{\vartheta^2}{\sigma}.$$

Определение 2.1. Регулярным решением задачи (1.1)-(1.3) называется обобщённое решение задачи из пространства Соболева $W_2^4(Q)$ (то есть все обобщённые производные входящие в уравнение (1.1) должны принадлежать в пространству $L_2(Q)$).

3. Основные результаты

В этом разделе представлена формулировка основного результата исследования: теоремы и условий её применения. Их строгое доказательство подробно изложено в следующей части статьи.

Основной результат состоит в следующей теореме:

Теорема 3.1. *Пусть выполняются вышеуказанные условия для коэффициентов уравнения* (1.1)*, и пусть выполняются следующие условия для коэффициентов уравнения* (1.1)*:* $-(2K_3+3\lambda x)\geq\delta_3>0,\quad 2K_1-K_{2t}+\lambda K_2\geq\delta_2>0,\quad \lambda K_0-K_{0t}\geq\delta_1>0$ *для любых* $(x,t)\in\bar{Q}$*, где* $\lambda=\frac{2}{T}\ln\gamma>0,\gamma>1$.

Тогда для любого $f(x,t)\in L_2(Q)$*,если существует регулярное обобщенное решение* $u(x,t)$ *задачи* (1.1)-(1.3) *из пространства Соболева* $W_2^4(Q)$*, то оно единственно и для нее справедлива следующая оценка:*

$$\|u\|^2_{W_2^2(Q)}\leq c_1\|f\|^2_0,$$

где далее через c_i *мы обозначаем некоторые, в общем случае, различные положительные постоянные числа, отличные от нуля.*

4. Доказательство основных результатов

В этом разделе мы доказываем единственную разрешимость основной задачи (1.1)–(1.3). Для удобства чтения и сохранения логической последовательности доказательства мы разделили этот процесс на четыре основных этапа.

Единственность задачи (1.1)-(1.3)

Доказательство. Мы доказываем единственность решения, используя метод интеграла энергии. Предположим, что существует обобщенное решение задачи (1.1)-(1.3) $u(x,t)$ в пространстве Соболева $W_2^4(Q)$. Рассмотрим следующее тождество:

$$2\int_Q Lu\cdot e^{-\lambda t}\cdot u_t dxdt=2\int_Q f\cdot e^{-\lambda t}\cdot u_t dxdt. \tag{4.1}$$

В силу условий теоремы 3.1 и неравенства Коши с $\sigma>0$ [19], из граничных условий (1.2)-(1.3), используя интегрирующее тождество (4.1), мы можем легко получить следующее неравенство:

$$\begin{aligned}
2\int_Q Lu\cdot e^{-\lambda t}\cdot u_t dQ\geq e^{-\lambda T}\int_Q\Big\{&-(2K_3+3\lambda x)\cdot u_{tt}^2+\lambda\left(a(x)u_{xx}^2+b(x)u_{xt}^2+c(x)u_x^2\right)+\\
&+(2K_1+\lambda K_2-K_{2t})\cdot u_t^2+(\lambda K_0-K_{0t})\cdot u^2\Big\}dQ-\\
-\Big\{3\sigma\|u_{tt}\|_0^2+\sigma^{-1}K\cdot\|u_t\|_0^2+\sigma\|u_{xx}\|_0^2+2\|a'\|_{C[-1;1]}\|u_{xx}\|_0^2+\sigma^{-1}\|b'\|^2_{C[-1;1]}\|u_{xt}\|_0^2+\\
+2\|a'\|_{C[-1;1]}\|u_{xt}\|^2+\sigma\|u_x\|_0^2\Big\}\cdot e^{-\lambda T}+\int_{\partial Q}\left(K_0u^2+\left(K_2+\lambda^2x\right)\cdot u_t^2+\right.\\
+(2K_3+2\lambda x)\cdot u_tu_{tt}-xu_{tt}^2+2xu_tu_{ttt}+a(x)u_{xx}^2+b(x)u_{xt}^2+c(x)u_x^2\Big)\cdot e^{-\lambda t}\cdot\nu_t dS+\\
+\int_{\partial Q}(2a(x)u_{xxx}u_t-2a(x)u_{xx}u_{tx}-2a'(x)u_{xx}u_t\\
-2b(x)u_tu_{xtt}-2b'(x)u_{tt}\cdot u_t-2c(x)u_t\cdot u_x)\cdot e^{-\lambda t}\nu_x dS,
\end{aligned}\tag{4.2}$$

где $K=\lambda^4\max\left\{\|K_3\|^2_{C^1(Q)},\|a''\|^2_{C[-1;1]},\|b''\|^2_{C[-1;1]},\|C'\|_{C[-1;1]},|x|\right\},\bar{\nu}=(\nu_t,\nu_x)$ — единичный вектор внутренней нормали к границе ∂Q. Учитывая условия теоремы 3.1, а также граничные условия (1.2), (1.3),

получим следующие неравенство:

$$c\|f\|_0^2 \geq e^{-\lambda T}\left(\int_Q (\delta_3 - 3\sigma)\, u_{tt}^2 e^{-\lambda t}\, dQ + \int_Q (\lambda a(x) - 2\|a'\|_C - \sigma)\, u_{xx}^2\, dQ + \right.$$
$$+ \int_Q \left(\lambda b(x) - \sigma^{-1}\|b'\|_C^2 - 2\|a'\|_C\right) u_{xt}^2\, dQ + \int_Q (\lambda c(x) - \sigma) u_x^2\, dQ +$$
$$\left. + \int_Q \left(\delta_2 - \sigma^{-1}K\right) u_t^2\, dQ + \int_Q \delta_1 u^2\, dQ\right) + \int_{\partial Q} \left(K_0 u^2 + \left(K_2 + \lambda^2 x\right)\cdot u_t^2 + \right. \tag{4.3}$$
$$\left. + (2K_3 + 2\lambda x)\cdot u_t u_{tt} - x u_{tt}^2 + 2x u_t u_{ttt} + a(x)u_{xx}^2 + b(x)u_{xt}^2 + c(x)u_x^2\right)\cdot e^{-\lambda t}\cdot \nu_t dS +$$
$$+ \int_{\partial Q} (2a(x)u_{xxx}u_t - 2a(x)u_{xx}u_{tx} - 2a'(x)u_{xx}u_t$$
$$\left. - 2b(x)u_t u_{xtt} - 2b'(x)u_{tt}\cdot u_t - 2c(x)u_t\cdot u_x\right)\cdot e^{-\lambda t}\nu_x dS.$$

Так как коэффициенты уравнения (1.1) достаточно гладкие и в неравенстве (4.3) выбирая постоянное число $\sigma > 0$ так, что $\delta_3 - 3\sigma = \frac{\delta_3}{2} > 0$, и выбирая функции $K_1(x,t) > 0, a(x) \geq a_0 > 0, b(x) \geq b_0 > 0, c(x) \geq c_0 > 0$ такие что $\delta_2 - 6\delta_3^{-1}K \geq \delta_{02} > 0$, $K = \lambda^4 \max\left\{\|K_3\|^2_{C^1(\bar{Q})}, \|a''\|^2_{C[-1;1]}, \|b''\|^2_{C[-1;1]}, \|c'\|_{C[-1;1]}, |x|\right\}$, $\lambda a(x) \geq \lambda a_0 = \lambda\left(\delta_3 6^{-1} + 2\|a'\|_C\right) > 0$, $\lambda > 0$, $\lambda b(x) \geq \lambda b_0 = \lambda\left(6\delta_3^{-1}\|b'\|_C^2 + 2\|a'\|_C\right) > 0$, $\lambda c(x) \geq \lambda c_0 = \lambda\frac{\delta_3}{6} > 0$. Учитывая условие теоремы 3.1, граничные условия и $\gamma^2 = e^{\lambda T}$, получим, что граничные интегралы в (4.3) обращаются в нуль. т.е.

$$\int_{\partial Q}\left(K_0 u^2 + \left(K_2 + \lambda^2 x\right)u_t^2 + (2K_3 + 2\lambda x)\, u_t u_{tt} - x u_{tt}^2 + 2x u_t u_{ttt}\right.$$
$$+ a(x)u_{xx}^2 + b(x)u_{xt}^2 + c(x)u_x^2\Big) e^{-\lambda t}\nu_t\, dS + \int_{\partial Q}\Big(2a(x)u_{xxx}u_t - 2a(x)u_{xx}u_{tx}$$
$$\left. - 2a'(x)u_{xx}u_t - 2b(x)u_t u_{xtt} - 2b'(x)u_{tt}u_t - 2c(x)u_t u_x\right)e^{-\lambda t}\nu_x\, dS = 0.$$

Отсюда из неравенства (4.3) получим

$$c\|f\|_0^2 \geq e^{-\lambda T}\left\{\int_Q \left\{\delta_3\cdot u_{tt}^2 + \delta_2 u_t^2 + \delta_1\cdot u^2\right\} dxdt - 3\sigma\cdot\|u_{tt}\|_0^2 - \sigma^{-1}K\cdot\|u_t\|_0^2 - \right.$$
$$- \sigma\int_Q u_{xx}^2 dQ + \int_Q \lambda a(x)u_{xx}^2 dQ + \int_Q \lambda b(x)u_{xt}^2 dQ + \int_Q \lambda c(x)u_x^2 dQ\Big\} -$$
$$- 2\left\|a'\right\|_C \int_Q u_{xx}^2 e^{-\lambda t} dQ - \sigma^{-1}\left\|b'\right\|^2 \int_Q u_{xt}^2 e^{-\lambda t} dQ -$$
$$2\left\|a'\right\|^2 \int_Q u_{xt}^2 e^{-\lambda t} dQ - \sigma\int_Q u_x^2 e^{-\lambda t} dQ = \tag{4.4}$$
$$= e^{-\lambda T}\left(\int_Q (\delta_3 - 3\sigma)\, u_{tt}^2 e^{-\lambda t} dQ + \int_Q \left(\lambda a(x) - 2\left\|a'\right\|_C - \sigma\right) u_{xx}^2 dQ\right.$$
$$+ \int_Q \left(\lambda b(x) - \sigma^{-1}\left\|b'\right\|_C^2 - 2\left\|a'\right\|_C\right) u_{xt}^2 dQ +$$
$$\left. + \int_Q (\lambda c(x) - \sigma) u_x^2 dQ + \int_Q \left(\delta_2 - \sigma^{-1}K\right) u_t^2 dQ + \int_Q \delta_1 u^2 dQ\right).$$

Далее, обозначив через $\delta = e^{-\lambda T}\min\{\delta_3, a_0, b_0, c_0, \delta_{02}, \delta_1\}$ и разделив (4.4) на $\delta > 0$, мы получаем первую априорную оценку для решения задачи (1.1)-(1.3):

$$\|u\|^2_{W_2^2(Q)} \leq c\|f\|^2_{L_2(Q)}.$$

Из этой оценки следует единственность регулярного обобщенного решения задачи (1.1)-(1.3) в $W_2^4(Q)$. Докажем теорему от противного, пусть задача (1.1)-(1.3) имеет два решения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$. Тогда новая функция

$\vartheta(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ удовлетворяет однородному уравнению (1.1) с условиями (1.2), (1.3) и для нее справедлива первая оценка $\|\vartheta\|_2^2 \le 0$. Отсюда следует единственность регулярного обобщенного решения задачи (1.1)-(1.3), т.е. $u_1(x,t) = u_2(x,t)$ из пространства $W_2^4(Q)$. Теперь докажем разрешимость регулярного обобщенного решения задачи (1.1)-(1.3). □

4.1. Семейство дифференциальных уравнений составного типа с нагрузкой и малым параметром

Докажем разрешимость регулярного решения задачи (1.1)-(1.3) с использованием метода «ε-регуляризации» в сочетании с модифицированным методом Галеркина и априорными оценками. В частности, в области $Q = (-1,1)\times(0,T)$ мы рассматриваем семейство уравнений пятого порядка с малым параметром

$$L_\varepsilon u_\varepsilon = \varepsilon\frac{\partial\Delta^2 u_\varepsilon}{\partial t} + Lu_\varepsilon = f(x,t), \tag{4.5}$$

с полунелокальными краевыми условиями

$$\gamma D_t^q u_\varepsilon|_{t=0} = D_t^q u_\varepsilon|_{t=T}, \quad q = 0,1,2,3,4, \tag{4.6}$$

$$u_\varepsilon|_{x=-1} = u_\varepsilon|_{x=1} = 0, \quad u_{\varepsilon xx}|_{x=-1} = u_{\varepsilon xx}|_{x=1} = 0. \tag{4.7}$$

где ε — малое положительное число, $D_z^q w = \frac{\partial^q w}{\partial z^q}, q = 1,2,3,4,5; D_z^0 w = w$;

$$\Delta^2 u = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^2 u = \left(\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial t^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right) - \text{ бигармонический оператор.}$$

Ниже мы используем уравнение пятого порядка с малым параметром (1.1) − (1.3) в качестве $\varepsilon-$ регуляризующего уравнения для уравнения смешанного типа второго рода четвертого порядка (1.1) [7, 20].

Ниже через $W(Q)$ мы будем обозначать класс функций таких, что $u_\varepsilon(x,t) \in W_2^4(Q)$, $\sqrt{\varepsilon}\frac{\partial\Delta^2 u_\varepsilon}{\partial t} \in L_2(Q)$ и удовлетворяющих соответствующим условиям (4.6) − (4.7).

Определение 4.1. Назовем функцию $u_\varepsilon(x,t)$ регулярным обобщенным решением задачи (4.5)-(4.7), если $u_\varepsilon \in W(Q)$ и удовлетворяет уравнению (4.5) почти всюду в области определения Q.

Теорема 4.1. *Пусть будут выполнены все условия теоремы 3.1.*

Тогда для любой функции $f(x,t) \in W_2^1(Q)$, такой, что $\gamma f(x,0) = f(x,T)$, существует единственное регулярное обобщенное решение $u_\varepsilon(x,t)$ задачи (4.4)-(4.5) из пространства $W(Q)$, и для него справедливы следующие оценки:

I). $\varepsilon(\|u_{\varepsilon ttt}\|_0^2 + \|u_{\varepsilon ttx}\|_0^2 + \|u_{\varepsilon txx}\|_0^2) + \|u_\varepsilon\|_2^2 \le c_1 \| f \|_0^2$

II). $\varepsilon \left\| \frac{\partial}{\partial t}\Delta^2 u_\varepsilon \right\|_0^2 + \|u_\varepsilon\|_4^2 \le c_2 \| f \|_1^2$.

Докозательство теоремы 4.1. Доказательство неравенства I) проводится аналогично первой оценке теоремы 3.1, из которой следует единственность регулярного обобщенного решения задачи (4.4)-(4.5) [7, 15, 16].

Мы представляем доказательство первой априорной оценки.

Пусть $\phi_j(x,t) \in W_2^4(Q)$ — собственные функции следующей задачи:

$$\Delta^2\phi_j = \frac{\partial^4\phi_j}{\partial^4 t} + 2\frac{\partial^4\phi_j}{\partial^2 x\partial^2 t} + \frac{\partial^4\phi_j}{\partial^4 x} = \mu_j^4\phi_j, \tag{4.8}$$

$$D_t^p\phi_j|_{t=0} = D_t^p\phi_j|_{t=T,} \quad p = 0,1,2,3, \tag{4.9}$$

$$\phi_j|_{x=-1} = \phi_j|_{x=1} = 0, \quad \phi_{jxx}|_{x=-1} = \phi_{jxx}|_{x=1} = 0. \tag{4.10}$$

Из общей теории [22, 23] линейных самосопряженных эллиптических операторов известно, что все собственные функции задачи (4.8)-(4.10) принадлежат $W_2^4(Q)$ и образуют полную ортонормированную систему в $L_2(Q)$. Теперь, используя эти последовательности функций, мы строим решение вспомогательной задачи:

$$P\omega_j \equiv \exp\left(-\frac{\lambda t}{2}\right)\frac{\partial\omega_j}{\partial t} = \phi_j, \tag{4.11}$$

$$\gamma \cdot \omega_j(x,0) = \omega_j(x,T), \tag{4.12}$$

где $\gamma > 1$. Очевидно, что задача (4.11)-(4.12) имеет единственное решение, и её решение имеет вид:

$$P^{-1}\phi_j = \omega_j = \int_0^t \exp\left(\frac{\lambda\tau}{2}\right)\phi_j d\tau + \frac{1}{\gamma-1}\cdot\int_0^T \exp\left(\frac{\lambda t}{2}\right)\phi_j dt.$$

Ясно, что функции $\omega_j(x,t) \in W_2^5(Q)$ линейно независимы. Действительно, если $\sum_{j=1}^N c_j\omega_j = 0$ для некоторого набора последовательностей функций $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N$, то, действуя на эту сумму оператором P, мы имеем $\sum_{j=1}^N c_j P\omega_j = \sum_{j=1}^N c_j\phi_j = 0$, и, следовательно, отсюда следует, что для всех $j = \overline{1,N}$ коэффициенты $c_j = 0$. Обратите внимание, что из построения функции $\phi_j(x,t)$ следуют следующие условия на функции $\omega_j(x,t) \in W_2^5(Q)$:

$$\gamma \cdot D_t^q\omega_j|_{t=0} = D_t^q\omega_j|_{t=T}, \quad q = 0,1,2,3,4, \tag{4.13}$$

$$\omega_j|_{x=-1} = \omega_j|_{x=1} = 0, \quad \omega_{jxx}|_{x=-1} = \omega_{jxx}|_{x=1} = 0. \tag{4.14}$$

Теперь мы ищем приближенное решение задачи (4.5)-(4.7) в виде $u_\varepsilon^N(x,t) = \sum_{j=1}^N c_j\omega_j(x,t)$, где коэффициенты c_j для любого j от 1 до N определяются как решение линейной алгебраической системы

$$2\int_Q L_\varepsilon u_\varepsilon^N \cdot \exp\left(-\frac{\lambda t}{2}\right)\phi_j dxdt = 2\int_Q f\cdot\exp\left(-\frac{\lambda t}{2}\right)\phi_j dxdt. \tag{4.15}$$

Докажем однозначную разрешимость алгебраической системы (4.15). Умножая каждое уравнение из (4.15) на и суммируя по от до , учитывая краевые условия (4.13)-(4.14) и алгебраическую систему (4.15), получим тождество

$$2\int_Q L_\varepsilon u_\varepsilon^N \cdot \exp(-\lambda t)u_{\varepsilon t}^N dxdt = 2\int_Q f\cdot\exp(-\lambda t)u_{\varepsilon t}^N dxdt, \tag{4.16}$$

из которого, в силу условий теоремы 4.1 интегрируя тождество (4.16), получаем оценку I) для приближенного решения задачи (4.5)-(4.7), т.е.

$$\varepsilon\cdot\left(\left\|u_{\varepsilon ttt}^N\right\|_0^2 + \left\|u_{\varepsilon ttx}^N\right\|_0^2 + \left\|u_{\varepsilon txx}^N\right\|_0^2\right) + \left\|u_\varepsilon^N\right\|_2^2 \le c_1\|f\|_0^2. \tag{4.17}$$

Это подразумевает разрешимость алгебраической системы (4.15) [7],[19]. Оценка (4.17) позволяет, в силу теоремы 3.1 о слабой компактности [22, 25], выполнить предельный переход относительно $N \to \infty$ и заключить, что некоторая подпоследовательность $\left\{u_\varepsilon^{N_k}(x,t)\right\}$ слабо сходится, в силу единственности решения (теорема 3.1), из пространства $V(Q)$ к искомому решению $u_\varepsilon(x,t)$ задачи (4.5)-(4.7), которое обладает свойствами, указанными в теореме 4.1 [16]. Теперь, переходя к пределу по $N \to \infty$ в (4.17) для $u_\varepsilon(x,t)$, мы получаем первую априорную оценку:

$$\varepsilon\cdot\left(\|u_{\varepsilon ttt}\|_0^2 + \|u_{\varepsilon ttx}\|_0^2 + \|u_{\varepsilon txx}\|_0^2\right) + \|u_\varepsilon\|_2^2 \le c_1\|f\|_0^2. \tag{4.18}$$

Докажем вторую априорную оценку II).

Используя задачу (4.8)-(4.12), из тождества (4.15) получаем

$$\frac{1}{\mu_j^4}\int_D L_\varepsilon u_\varepsilon^N \cdot \exp\left(-\frac{\lambda t}{2}\right)\Delta^2 P\omega_j dxdt = \frac{1}{\mu_j^4}\int_D f\cdot\exp\left(-\frac{\lambda t}{2}\right)\Delta^2 P\omega_j dxdt. \tag{4.19}$$

Умножая каждое уравнение (4.19) на $2\cdot\mu_j^4 c_j$, суммируя по j от 1 до N и учитывая условия (4.13)-(4.14), из (4.19) получаем следующее тождество:

$$\int_Q \left(L_\varepsilon u_\varepsilon^N - f\right)\Re u_\varepsilon^N dxdt = 0, \tag{4.20}$$

где $\Re u_\varepsilon^N \equiv \left(\frac{\partial \Delta^2 u_\varepsilon^N}{\partial\, t} - 2\lambda \frac{\partial^4}{\partial\, t^4} u_\varepsilon^N - \frac{3}{2}\lambda^2 \frac{\partial^3}{\partial t^3} u_\varepsilon^N + \frac{\lambda^2}{2} u_{\varepsilon xxt}^N - \frac{\lambda^3}{2} u_{\varepsilon tt}^N + \frac{\lambda^4}{16} u_{\varepsilon t}^N\right) e^{-\lambda t}$. Интегрируя (4.20), учитывая условия теоремы 4.1 и граничные условия (4.13)-(4.14), получаем следующее неравенство:

$$
\begin{aligned}
c_2\left(\|f_t\|_0^2 + \|f\|_0^2\right) \geq \varepsilon \left\| \frac{\partial \Delta^2 u_\varepsilon^N}{\partial t} \right\|_0^2 + \int_Q e^{-\lambda\cdot t} \left\{ -\left(2K_3 + 3\lambda x\right) u_{\varepsilon tttt}^{2N} - \left(2K_3 + 3\lambda x\right) u_{\varepsilon ttxx}^{2N} + \right. \\
\left. -2\left(2K_3 + 3\lambda x\right) u_{\varepsilon tttx}^{2N} + \lambda a_0 u_{\varepsilon xxxx}^{2N} + \lambda b_0 u_{\varepsilon ttxx}^{2N} + \lambda a_0 u_{\varepsilon xxxt}^{2N} \right\} dxdt + \rho \cdot \left\| u_\varepsilon^N \right\|_3^2 - \\
-n_1 \cdot \sigma \cdot \left(\left\| u_{\varepsilon tttt}^N \right\|_0^2 + \left\| u_{\varepsilon ttxx}^N \right\|_0^2 + \left\| u_{\varepsilon tttx}^N \right\|_0^2 \right) \\
-n_2 \cdot \sigma \cdot \left(\left\| u_{\varepsilon xxxx}^N \right\|_0^2 + \left\| u_{\varepsilon ttxx}^N \right\|_0^2 \right) \\
-c\left(\sigma^{-1}, \lambda, K\right) \left\| u_\varepsilon^N \right\|_3^2 + \int_{\partial Q} e^{-\lambda\cdot s} B\left(u_\varepsilon^N(s), K_i(s)\right) ds, \quad i = \overline{0,4},
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

где ρ — положительное число зависящиеся от нормы функции $K_i(x,t)$, $i = \overline{0,3}$ в пространстве $C^3(\bar{Q})$, $K = \max\{\|K_i(x,t)\|_{C^2(\bar{Q})}\,,\ i = \overline{0,3}\}, n_i$ — некоторые натуральные числа, $n = \max\{n_1, n_2\}$, $\sigma, c\left(\sigma^{-1}\right)$ — — коэффициенты неравенства Коши [16], $B\left(u_\varepsilon^N(s), K_i(s)\right)$ — функции, зависящие от следов функции $u(x,t), K_i(x,t)$ на границе области Q. Пусть $\delta_0 = \min\{\delta_3, \lambda a, \lambda b, \lambda c, \delta_2, \delta_1\}$. Учитывая условие теоремы 4.1 и граничные условия (4.13)-(4.14) и $\gamma^2 = e^{\lambda T}$, получаем, что в (4.21) граничные интегралы будут равны нулю. Теперь, выбрав σ такое, что $\delta_0 - n\sigma = \frac{\delta_0}{2} > 0$, $\rho - c(\frac{2n}{\delta_0}, \lambda, K) \geq \rho_0 > 0$, из неравенства (4.21), мы получаем требуемую вторую оценку

$$
\varepsilon \left\| \frac{\partial \Delta^2 u_\varepsilon^N}{\partial t} \right\|_0^2 + \left\| u_\varepsilon^N \right\|_4^2 \ \leq\ c_2 \cdot \left(\| f \|_0^2 + \| f_t \|_0^2 \right) \leq c_2 \| f \|_1^2 . \tag{4.22}
$$

Постоянная в правой части (4.22) не зависит от N, поэтому вторая оценка приближенного решения задачи (4.5)-(4.7) следует из (4.21). Оценка (4.18) вместе с оценкой (4.22) по теореме о слабой компактности позволяет нам выполнить предельный переход относительно $N \to \infty$ и заключить, что некоторая подпоследовательность $\left\{u_\varepsilon^{N_k}(x,t)\right\}$ сходится слабо благодаря единственности решения задачи (4.5)-(4.7) в $W(Q)$ вместе с производными четвертого и пятого порядков к искомому решению $u_\varepsilon(x,t)$ задачи (4.5)-(4.7), которое обладает свойствами, указанными в теореме 4.1 [7, 15, 16]. Следовательно, для $u_\varepsilon(x,t)$, в силу (4.22), справедливо следующее неравенство:

$$
\varepsilon \left\| \frac{\partial \Delta^2 u_\varepsilon}{\partial t} \right\|_0^2 + \|u_\varepsilon\|_4^2 \leq c_2 \cdot \left(\|f\|_0^2 + \|f_t\|_0^2 \right) \leq c_2 \|f\|_1^2. \tag{4.23}
$$

Это подразумевает существование регулярного обобщенного решения $u_\varepsilon(x,t)$ задачи (4.5)-(4.7) из пространства $W(Q)$. Доказательство теоремы 4.1 завершено. □

4.2. Существование решения задачи (1.1)-(1.3)

Переходим к доказательству разрешимости задачи (1.1)-(1.3).

Теорема 4.2. *Пусть все условия теоремы 4.1 выполнены. Тогда существует регулярное обобщенное решение задачи* (1.1)-(1.3) *из* $W_2^4(Q)$, *и оно единственно.*

Существование решения задачи (1.1)-(1.3) **из** $W_2^4(Q)$**.**

Доказательство теоремы 4.2. Единственность решения задачи (1.1)-(1.3) в пространстве $W_2^4(Q)$ доказана в теореме 3.1. Теперь докажем существование регулярного обобщенного решения задачи (1.1)-(1.3) в пространстве $W_2^4(Q)$. Для этого рассмотрим уравнение (4.5) и граничные условия (4.6), (4.7) для $\varepsilon > 0$ в области Q. Поскольку все условия теоремы 4.2 выполнены, существует единственное регулярное обобщенное решение задачи (4.5)-(4.7) для $\varepsilon > 0$ из $W(Q)$, и для него справедливы первая и вторая оценки. Отсюда следует, что из множества

функций $\{u_\varepsilon(x,t)\}, \varepsilon > 0$ можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность функций в $W(Q)$ такую, что $\{u_{\varepsilon_i}(x,t)\} \to u(x,t)$ при $\varepsilon_i \to 0$. Мы покажем, что предельная функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению $Lu = f$ (уравнение (1.1)) почти всюду в области Q . Действительно, поскольку подпоследовательность $\{u_{\varepsilon_i}(x,t)\}$ слабо сходится в $W_2^4(Q)$, а подпоследовательность $\left\{\sqrt{\varepsilon_i}\frac{\partial\Delta^2 u_{\varepsilon_i}(x,t)}{\partial t}\right\}$ равномерно ограничена в $L_2(Q)$, и оператор L является линейным, то мы имеем:

$$Lu - f = Lu - Lu_{\varepsilon_i} + \varepsilon_i\frac{\partial\Delta^2 u_{\varepsilon_i}}{\partial t} = L\left(u - u_{\varepsilon_i}\right) - \varepsilon_i\frac{\partial\Delta^2 u_{\varepsilon_i}}{\partial t}. \tag{4.24}$$

Из равенства (4.24), переходя к пределу при $\varepsilon_i \to 0$, мы получаем единственное решение задачи (1.1)-(1.3) [7, 15, 16, 22, 24]. Таким образом, теорема 4.2 доказана.

□

Теперь обратимся к исследованию гладкости решения задачи (1.1)-(1.3) в пространствах Соболева $W_2^{m+4}(Q)$, когда $0 \le m-$целое конечное число. Ниже для простоты предположим, что коэффициенты уравнения (1) достаточно дифференцируемы функции в замкнутой области $\overline{Q}$.

Теорема 4.3. *Пусть выполняются условия теоремы 4.2 и пусть* $D_t^q K_i\,|_{t=0} = D_t^q K_i\,|_{t=T}$ $(i = \overline{0,3})$ *для всех* $x \in [0,1]$, $q = 0,1,...,m$. *Тогда для любой функции* $f(x,t)$ *из* $W_2^{m+1}(Q)$ *такой, что* $\gamma D_t^q f|_{t=0} = D_t^q f|_{t=T}$ *существует единственное решение задачи (1.1)-(1.3) в пространствах Соболева* $W_2^{m+4}(Q)$, *где* $m = 0,1,2,3,....$

Доказательство. Учитывая условия теорем 4.1 и 4.2 для $\varepsilon > 0$ и нелокальные условия для $t = 0, t = T$, из равенства

$$\left(e^{-\frac{\lambda t}{2}}\cdot L_\varepsilon u_\varepsilon\right)\Big|_{t=0}^{t=T} = \left(\varepsilon\cdot e^{\frac{-\lambda t}{2}}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\Delta^2 u_\varepsilon + e^{\frac{-\lambda t}{2}}\cdot Lu_\varepsilon\right)\Big|_{t=0}^{t=T} = \left(e^{\frac{-\lambda t}{2}}\cdot f(x,t)\right)\Big|_{t=0}^{t=T}$$

мы получим $\gamma D_t^5 u_\varepsilon\big|_{t=0} = D_t^5 u_\varepsilon\big|_{t=T}$. Отсюда следует, что функция $\vartheta_\varepsilon(x,t) = u_{\varepsilon t}(x,t)$ принадлежит классу $V(D)$ и удовлетворяет следующему уравнению [7, 15, 16, 19]:

$$T_\varepsilon\vartheta_\varepsilon \equiv L_\varepsilon\vartheta_\varepsilon = f_t - \sum_{i=0}^{3} K_{it}D_t^i u_\varepsilon \equiv F_\varepsilon. \tag{4.25}$$

с краевыми условиями

$$\gamma D_t^q\vartheta_\varepsilon|_{t=0} = D_t^q\vartheta_\varepsilon|_{t=T};\ \ q = 0,1,2,3,4 \tag{4.26}$$

$$\vartheta_\varepsilon|_{x=-1} = \vartheta_\varepsilon|_{x=1} = 0;\ \vartheta_{\varepsilon xx}|_{x=-1} = \vartheta_{\varepsilon xx}|_{x=1} = 0. \tag{4.27}$$

Из теоремы 4.2 следует, что семейство функций $\{F_\varepsilon\}$ равномерно ограничено в пространстве $L_2(D)$, т. е.

$$\|F_\varepsilon\|_0^2 \le c_1\cdot\|f\|_1^2.$$

Кроме того, из условий теоремы 4.2 легко получить, что коэффициенты оператора $T_\varepsilon(\varepsilon > 0)$ удовлетворяют условиям теоремы 4.3, следовательно, на основе оценок I), II) и теоремы 4.2 для функции $\{\vartheta_\varepsilon(x,t)\}$ мы получим аналогичные оценки

$$\varepsilon\cdot\left(\|\vartheta_{\varepsilon ttt}\|_0^2 + \|\vartheta_{\varepsilon ttx}\|_0^2 + \|\vartheta_{\varepsilon txx}\|_0^2\right) + \|\vartheta_\varepsilon\|_2^2 \le c_1\|f\|_0^2, \tag{4.28}$$

$$\varepsilon\left\|\frac{\partial}{\partial t}\Delta^2\vartheta_\varepsilon\right\| + \|\vartheta_\varepsilon\|_4^2 \le c_2\|f\|_1^2. \tag{4.29}$$

Учитывая $\vartheta_\varepsilon = u_{\varepsilon t}$ из (4.27), мы получим $\vartheta \in W_2^4(Q)$. Что бы получить решение задачи (4.25)-(4.27) из $W_2^5(Q)$ нам необходимо получить что $D_x^5 u \in L_2(Q)$. Это утверждение мы получим из гладкости нелокальной краевой задачи для параболических уравнений, т.е. функции $\{u_\varepsilon\}$ удовлетворяют параболическому уравнению:

$$\Pi u_\varepsilon \equiv u_{\varepsilon t} - u_{\varepsilon xx} = f - \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\Delta^2 u_\varepsilon - \sum_{i=0}^{4} K_i D_t^i u_\varepsilon - Mu_\varepsilon + u_{\varepsilon t} - u_{\varepsilon xx} \equiv \Phi_\varepsilon, \tag{4.30}$$

с нелокальным краевым условием

$$\gamma\, u|_{t=0} = u|_{t=T}, \tag{4.31}$$

$$u|_{x=-1} = u|_{x=1} = 0. \tag{4.32}$$

Из оценок (4.28), (4.29) и вследствии вышеизложенного, семейство функций $\{\Phi_\varepsilon\}$ равномерно ограничено в пространстве $W_2^1(Q)$, т.е.

$$\|\Phi_\varepsilon\|_1^2 \le c_2 \cdot \left(\|f\|_1^2 + \|f_{tt}\|_0^2\right) \le c_2\|f\|_2^2 < c_4\|f\|_4^2. \tag{4.33}$$

Отсюда, на основе априорных оценок и гладкости обобщенного решения параболических уравнений [7, 15, 16, 19, 22, 24] и неравенств (4.33) получаем:

$$\|u_\varepsilon\|_5^2 \le c_4\|f\|_4^2. \tag{4.34}$$

Теперь, повторяя аналогичные рассуждения, для задачи (1.1)-(1.3) так же доказываются неравенства :

$$\|u_\varepsilon\|_{m+4}^2 \le c_{m+3}\,\|f\|_{m+3}^2\,, m = 2, 3, ..., \qquad [7,\ 15,\ 16,\ 19,\ 22]. \tag{4.35}$$

В конце используя теоремы компактности, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ получим неравенство

$$\|u\|_{m+4}^2 \le c_{m+3}\,\|f\|_{m+3}^2\,, m = 2, 3, ...$$

Это неравенство доказывает теорему 4.3. □

Благодарность

Авторы выражает искреннюю благодарность анонимным рецензентам за обсуждение полученных результатов.

Список литературы

[1] А. В. Бицадзе. Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанного типа. Докл. АН СССР. Т.122,№ 4.С.167–170.
[2] Ф. И. Франкль.Избранные труды по газовой динамике. 1973. Москва.
[3] Т. Ш. Кальменов. О полупериодической задаче для многомерного уравнения смешанного типа. Дифференциальные уравнения. 1978. Т.14, №3, С. 546-548.
[4] Б. Н. Цыбиков. О корректности периодической задачи для многомерного уравнения смешанного типа. В. кн: Неклассические уравнения математической физики. 1986. Новосибирск.
[5] С. З. Джамалов. Об одной нелокальной краевой задаче с постоянными коэффициентами для многомерного уравнения смешанного типа первого рода. Вестник Самарского государственного технического университета, Сер.физ.-мат.науки, 2017. Т.21, №4, С. 1-14.
[6] С. З. Джамалов, Р. Р. Ашуров. О гладкости одной нелокальной краевой задачи для многомерного уравнения Чаплыгина в пространстве. Казахский математ. журнал. 2018. Т.18, №2. С. 59-70.
[7] С. З. Джамалов. Нелокальные краевые и обратные задачи для уравнений смешанного типа (монография). 2021. Ташкент: Fan ziyosi.
[8] Т. Д. Джураев, А. К. Сопуев. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. 2000. Ташкент: Фан.
[9] М. С. Салахитдинов, Д. Аманов. Разрешимость и спектральные свойства самосопряжённых задач для уравнения четвёртого порядка. Узбекский математический журнал. 2005. №3, С. 72-77.
[10] Yu. P. Apakov, S. M. Mamajonov. Boundary value problem for fourth order inhomogeneous equation with variable coefficients. 2024. Journal of Mathematical Sciences, 284 (2), 153–165.
[11] Д. Аманов, А. В. Юлдашева. Краевая задача для смешанно-параболического уравнения высокого порядка. Докл. АН Рес. Узб. 2008. №6. С. 10-13.
[12] А. А. Дезин. Общие вопросы теории граничных задач. 1980. Москва: Наука.
[13] А. Г. Меграбов. Некоторые обратные задачи для уравнения смешанного типа. ДАН СССР. 1977. Т.234, С. 305-307.
[14] К. Б. Сабитов, Н. В Мартемьянова. Нелокальная обратная задача для уравнения смешанного типа. Изв. вузов. Математика. 2011. №2, С. 71-85.
[15] В. Н. Врагов. О постановке и разрешимости краевых задач для уравнений смешанно-составного типа. Математический анализ и смежные вопросы математики. Новосибирск: ИМ СО АН СССР. 1978. С. 5-13.
[16] И. Е. Егоров, В. Е. Федоров. Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. 1995. Новосибирск.
[17] А. В. Чуешев. Об одном линейном уравнении смешанного типа высокого порядка. Сиб. матем. журн. 2002, Т 43, № 2, 454–472.
[18] С. З. Джамалов, С. Г. Пятков. О некоторых классах краевых задач для многомерных уравнений смешанного типа высокого порядка. Сиб.мат. журнал. 2020. Т.61, №4, С. 777-795.

[19] А. И. Кожанов. Краевые задачи для уравнений математической физики нечетного порядка. 1990. Новосибирск: НГУ.
[20] Yusupov Sh., Tojinorova M. On the weak generalized solution of the fourth-order Tricomi equation witha semi-nonlocal boundary condition, Acta NUUz, 2026, No 2/2, pp. 215-221.
[21] Dzhamalov S.Z., Khalkhadzhaev B.B., Tuychiyeva S.T. On the smoothness of a generalized solution of a semi-nonlocal boundary value problem for a fourth-order equation // Journal of Contemporary Applied Mathematics. – 2024. – Vol. 14, № 2. – P. 107–120. (3. Scopus, IF=0,115).
[22] О. А. Ладыженская. Краевые задачи математической физики. 1973. Москва: Наука.
[23] Ю. М. Березинский. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. 1965. Киев: Наук.думка.
[24] В. Н. Врагов. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. 1983. Новосибирск: НГУ.
[25] В. А. Треногин. Функциональный анализ. 2007. Москва: Физматлит.

On the smoothness of the generalized solution of a semi-nonlocal boundary value problem for a fourth-order Tricomi equation

Dzhamalov Sirojiddin Z., Yusupov Sherzod B.

Abstract

Mixed-type equations and linear inverse problems are fundamental in the mathematical modeling of a wide range of complex physical phenomena, making their rigorous theoretical investigation an important research topic. In this paper, we examine the uniqueness, existence, and regularity of weak generalized solutions to a semi-nonlocal boundary value problem for a fourth-order Tricomi equation within Sobolev spaces. The uniqueness of the solution is established by means of the energy integral method, whereas the existence is proved using a combination of the modified Galerkin method, a priori estimates, and the "ε-regularization" technique. The regularity of the solution is obtained under additional smoothness assumptions on the coefficients of the equation. The results presented in this work provide a solid theoretical framework for the solvability of multidimensional mixed-type equations and offer a basis for the further development of numerical methods for related inverse problems.

Keywords

Fourth-order Tricomi equation; semi-nonlocal boundary value problem; Faedo-Galerkin method; a priori estimates and "ε-regularizations"; unique solvability of a weak generalized solution; Sobolev space.

Affiliations

Dzhamalov Sirojiddin Z.
Address: 1. Scientific Laboratory of Differential Equations and Their Applications, V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics Uzbekistan Academy of Sciences, University street 9, 100174, Tashkent, Uzbekistan.
2. Branch of Gubkin Russian State University of Oil and Gas (National Research University) in Tashkent, 100125, Durmon Yuli Street, 34, Mirzo-Ulugbek District, Tashkent, Uzbekistan
e-mail: siroj63@mail.ru
ORCID ID: https://orcid.org/0000-0002-3925-5129

Yusupov Sherzod B.
Address: 1. Scientific Laboratory of Differential Equations and Their Applications, V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics Uzbekistan Academy of Sciences, University street 9, 100174, Tashkent, Uzbekistan.

e-mail: sherzod.yusupov.2020@inbox.ru
ORCID ID: https://orcid.org/0009-0003-8412-7868