Uzbekistan Journal of Mathematics and Computer Science
Volume-2, Issue-2, Page 106–119 (2026)
DOI: https://doi.org/10.56143/ujmcs.v2i2.9
Research article

Об одной линейной обратной задачи для трёхмерного уравнения смешанного типа второго рода второго порядка с дополнительным интегральным условием

Джамалов С.З.* Сипатдиновой Б.К.

Аннотация

В данной статье рассматриваются вопросы корректности одной линейной обратной задачи с полунелокальным краевым условием для трёхмерного уравнения смешанного типа второго рода второго порядка с дополнительным интегральным условием в ограниченном параллелепипеде. Для данной задачи методами ε-регуляризации, априорных оценок, последовательных приближений и сжимающихся отображения с применением метода Фурье доказаны теоремы существования и единственности обобщённого решения линейной обратной задачи в анизотропном пространстве Соболева.

Ключевые слова: *уравнение смешанного типа второго рода второго порядка; линейная обратная задача с дополнительным интегральным условием; корректность задачи; методы Фурье; ε-регуляризации; априорных оценок; последовательных приближений и сжимающихся отображения.*

Предметная классификацие AMS (2020): *Основная: 35M10 ;*

1. Введение

При изучении нелокальных задач была установлена тесная внутренняя связь между прямыми задачами с нелокальными краевыми условиями и обратными задачами [1].

К настоящему времени обратные задачи для классических уравнений, в частности параболического, эллиптического и гиперболического типов, изучены достаточно полно; см., например, монографии [2, 3, 4, 5] и приведённую там библиографию.

Линейные обратные задачи для модельных уравнений смешанного типа второго порядка с точечным дополнительным условием переопределения на плоскости изучались в работах А.Г. Меграбова, К.Б. Сабитова и их учеников [6, 7, 8, 9]. Такие задачи для трехмерных уравнений смешанного типа второго порядка изучены в работах С.З. Джамалова [10]. В ограниченных областях линейные обратные задачи с локальными граничными условиями для многомерных уравнений смешанного типа с точечным дополнительным условием переопределения изучались в работе С.З. Джамалова и С.Г. Пяткова [11], а с нелокальными граничными условиями — в работах С.З. Джамалова и Р.Р. Ашурова [12].

Received : *18–july–2026,* ***Accepted :*** *20–october–2026*
**** Corresponding author***

В неограниченных областях такие задачи с нелокальными граничными условиями для трёхмерных уравнений смешанного типа с точечным дополнительным условием переопределения изучались в работах С.З. Джамалова и его учеников [13, 14, 15].

С другой стороны, задание дополнительных интегральных условий переопределения для нахождения неизвестной правой части или неизвестных коэффициентов уравнений в частных производных без вырождения изучалось в работах А.И. Кожанова [16, 17, 18], В.Л. Камынина [19], Р.Р. Ашурова и О.Т. Мухиддиновой [20], а для уравнений дробного порядка — в работах Р.Р. Ашурова и его учеников [21], а также Д.К. Дурдиева [22, 23]. Однако для уравнений смешанного типа второго рода линейные обратные задачи с интегральным условием переопределения в ограниченных и неограниченных областях до настоящего времени практически не изучены.
Настоящая работа направлена именно на восполнение этого пробела. В ней исследуется однозначная разрешимость линейной обратной задачи с полунелокальным краевым условием для трёхмерного уравнения смешанного типа второго рода второго порядка с дополнительным интегральным условием в ограниченном параллелепипеде. Предлагаемый метод исследования основан на сведении линейной обратной задачи к прямым полунелокальным краевым задачам для семейства нагруженных интегро-дифференциальных уравнений смешанного типа второго рода в ограниченной прямоугольной области. Отметим, что под нагруженным уравнением понимается уравнение в частных производных, содержащее в коэффициентах или в правой части значения некоторых функционалов от решения [24].

2. Постановка задачи

В области

$$G = (0,1) \times (0,T) \times (0,\ell) = Q \times (0,\ell) = \{(x,t) \in Q, y \in (0,\ell)\}$$

рассмотрим трехмерное уравнение смешанного типа второго рода второго порядка:

$$Lu = K(t)u_{tt} - \Delta u + a(x,t)u_t + c(x,t)u = \psi(x,t,y), \tag{2.1}$$

где $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ — оператор Лапласа, и предполагается, что $K(0) = K(T) = 0$. Кроме того, пусть правая часть уравнения имеет следующий специальный вид:

$$\psi(x,t,y) = g(x,t,y) + h(x,t)f(x,t,y),$$

где $g(x,t,y)$ и $f(x,t,y)$ — заданные функции, а функция $h(x,t)$ является неизвестной функцией, подлежащей к определению.

Уравнение (2.1) относится к уравнениям смешанного типа второго рода, второго порядка так как на знак функции $K(t)$ по переменной t внутри сегмента $[0,T]$ не налагается никаких ограничений [25]. Классическая теория краевых задач для уравнений смешанного типа изложена в монографии А.В. Бицадзе [26].

Линейная обратная задача. Найти такие пари функции $\{u(x,t,y), h(x,t)\}$, удовлетворяющие уравнению (2.1) в области G, при котором функция $u(x,t,y)$ удовлетворяет следующим полунелокальным краевым условиям:

$$\gamma u|_{t=0} = u|_{t=T}, \tag{2.2}$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0, \tag{2.3}$$

$$u|_{y=0} = u|_{y=\ell} = 0, \tag{2.4}$$

где γ — некоторая отличная от нуля постоянная, значение которой будет уточнено ниже.

Кроме того, для определения функции $h(x,t)$, решение задачи (2.1)-(2.4) удовлетворяет дополнительному интегральному условию

$$\int_0^\ell \omega(y)u(x,t,y)dy = \varphi(x,t) \tag{2.5}$$

и функции $u(x,t,y)$ и $h(x,t)$ принадлежат классу

$$U = \{\,(u,h)|\ \ u \in W_2^{2,3}(G\,); h \in W_2^2(Q\,)\,\}\,.$$

3. Необходимые понятия и функциональные пространства

Для корректного обоснования постановки задачи и поиска ее решения будем считать, что неизвестные функции $\{u(x,t,y), h(x,t)\}$ принадлежат следующему классу:

$$U = \Big\{(u,h) \mid u \in W_2^{2,3}(G); h \in W_2^2(Q)\Big\}\,.$$

Через $W_2^{2,3}(G)$ обозначено анизотропная пространство Соболева со следующей нормой:

$$\|\|u\|\|_{2,3}^2 = \|\|u\|\|_{W_2^{2,3}(G)}^2 = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(1+\mu_k^2\right)^3 \|u_k\,(x,t)\|_{W_2^2(Q)}^2, \qquad (A)$$

где $W_2^2(Q)$ – пространство Соболева с нормой

$$\|u_k\|_{W_2^2(Q)}^2 = \sum_{|\alpha|\le 2} \int\limits_Q |D^\alpha u_k|^2 dxdt,$$

где α -это мультииндекс, D^α-есть обобщённая производная по переменным x и t. Здесь $u_k(x,t)$ – коэффициент Фурье функции $u(x,t,y)$ по системе собственных функций $Y_k(y) = \Big\{\sqrt{\frac{2}{\ell}}\sin(\mu_k y)\Big\}$, $\mu_k = \left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^2$ $(k = 1,2,3,...)$.

Очевидно, что анизотропное пространство Соболева $W_2^{2,3}(G)$ с определённой нормой (A) является банаховым пространством [27].

В дальнейшем для исследования поставленной задачи нам понадобятся следующие оценки, которые следуют из теорем вложения Соболева [28, 29]:

$$\|\vartheta\|_{C^\alpha(Q)}^2 \le c_{\alpha+2}\,\|\vartheta\|_{W_2^{\alpha+2}(Q)}^2\,.$$

Здесь через $c_{\alpha+2}(\alpha = 0,1)-$ обозначен положительный различные числа. Через c_1- обозначим

$$c_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k^4}{\left(1+\mu_k^2\right)^3}$$

и при получении различных априорных оценок мы часто будем использовать неравенство Коши с σ [29], то есть

$$\forall u, \vartheta \ge 0;\ \ \forall \sigma > 0; \quad 2u\vartheta \le \sigma u^2 + \sigma^{-1}\vartheta^2.$$

Определение 3.1. Обобщенным решением задачи (2.1)-(2.5) будем называть пару функций $u(x,t,y)$ и $h(x,t)$, принадлежащую классу U и удовлетворяющую уравнению (2.1) почти всюду с условиями (2.2)-(2.5).

Для доказательства существования и единственности решения требуется, чтобы коэффициенты уравнения (2.1) были достаточно гладкими функциями в области G, и чтобы относительно коэффициентов, правой части и заданной функции $\varphi(x,t)$ выполнялись следующие условия:

Условие 1:

1. Нелокальные условия:

$$a(x,0) = a(x,T), \quad c(x,0) = c(x,T),$$
$$\gamma \cdot g(x,0,y) = g(x,T,y), \quad \gamma \cdot f(x,0,y) = f(x,T,y).$$

2. Условия гладкости: $f_k(x,t),\ g_k(x,t) \in C^{0,1}_{x,t}(\bar{Q})$,

$$|f_1(x,t)| = \left| \int_0^\ell \omega(y) f(x,t,y)dy \right| \geq \rho > 1,\ f \in W_2^{3,3}(G), \quad g \in W_2^{3,3}(G),$$

$$q = M\,|||f|||^2_{3,3} < 1, \quad M = 500\,c_1c_2c_3\lambda^2\delta_0^{-2}\ell^{-1}\rho^{-2}m\|\omega\|^2_{L_2[0,T]}, \quad m = mes(\overline{Q}).$$

где, через $c_i (i = 1,2,3)$ - обозначено коэффициенты из теорем вложения Соболева

3. Условие на коэффициенты уравнения (2.1): Для всех $(x,t) \in Q$: $2a - |K_t| + \lambda K \geq \delta_1 > 0, \quad \lambda c - c_t > \delta_2 > 0$, где $\lambda = \frac{2}{T}\ln|\gamma| > 0$ и $|\gamma| > 1$.

Условие 2: для заданной функции $\varphi(x,t)$ в интегральном условии переопределения:

$$\varphi(x,t) \in W_2^3(Q); \quad \gamma D_t^q\varphi|_{t=0} = D_t^q\varphi|_{t=T},\ q = 0,1,2; \quad \varphi|_{x=0} = \varphi|_{x=1} = 0.$$

4. Разложение в ряды Фурье

Однозначная разрешимость задачи (2.1)–(2.5) в первую очередь устанавливается путём применения метода Фурье по переменной y. Будем искать решение в виде следующего ряда:

$$u(x,t,y) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t)\,Y_k(y), \tag{B}$$

где функции $Y_k(y) = \sqrt{\frac{2}{\ell}}\sin(\mu_k y)$, $\mu_k = \left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^2$ $(k = 1,2,3,...)$. являются решениями соответствующей спектральной задачи Штурма–Лиувилля. Известно, что эта система собственных функций полна в пространстве $L_2(0,\ell)$ и образует в нём ортонормированный базис [30].

Введем следующие обозначение:

$$\int_0^\ell \omega(y)g(x,t,y)dy = g_1(x,t), \quad \int_0^\ell \omega(y)f(x,t,y)dy = f_1(x,t),$$

$$\omega_k = \sqrt{\frac{2}{\ell}}\int_0^\ell \omega(y)\sin\mu_k y dy$$

$$f_k(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\ell}}\int_0^\ell f(x,t,y)\sin\mu_k y dy, \quad g_k(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\ell}}\int_0^\ell g(x,t,y)\sin\mu_k y dy.$$

Для того, чтобы определить неизвестные функции, необходимо выполнить некоторые формальности построения.

Умножив основное уравнение на функцию $\omega(y)$, проинтегрировав по y на интервале $(0,\ell)$ и учитывая краевые условия, получим следующее уравнение:

$$L\varphi = K\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + a(x,t)\varphi_t + c(x,t)\varphi + \sqrt{\frac{2}{\ell}}\sum \mu_k^2\omega_k u_k(x,t) = g_1(x,t) + hf_1(x,t).$$

Учитывая условие (2.5) и неравенство $f_1(x,t) \neq 0$, определим формально неизвестную функцию $h(x,t)$ в виде

$$h = \frac{1}{f_1(x,t)}\left[\Phi + \sqrt{\frac{2}{\ell}}\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^2\omega_k u_k(x,t)\right] =$$

$$= \frac{1}{f_1(x,t)} \left[\Phi + \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 u_k(x,t) \int_0^{\ell} \omega(y) \sin \mu_k y dy \right]$$

Здесь $\Phi \equiv L_0\varphi - g_1(x,t) = K\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + a\varphi_t + c\varphi - g_1(x,t)$.

Теперь в области $Q = (0,1) \times (0,T)$ для нахождения функции $u_k(x,t)$ получим следующее нагруженное интегро-дифференциальное уравнение второго порядка с полунелокальными краевыми условиями:

$$\Im u_k = K(t)u_{ktt} - u_{kxx} + a(x,t)u_{kt} + \left(c + \mu_k^2\right) u_k = F(u_k), \tag{4.1}$$

$$\gamma u_k|_{t=0} = u_k|_{t=T}, \tag{4.2}$$

$$u_k|_{x=0} = u_k|_{x=1} = 0, \tag{4.3}$$

где

$$F(u_k) \equiv g_k(x,t) + \frac{f_k(x,t)}{f_1(x,t)} \left[\Phi + \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sum_{m=1}^{\infty} \mu_m^2 \omega_m u_m \right] =$$

$$= g_k(x,t) + \frac{f_k(x,t)}{\int_0^{\ell} \omega(y) f(x,t,y) dy} \left[\Phi + \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sum_{m=1}^{\infty} \mu_m^2 u_m \int_0^{\ell} \omega(y) \sin \mu_k y dy \right]$$

5. Основные результаты

В данном разделе формулируется основние результаты исследования — теоремы,леммы и условие, при которых они справедливи. Их строгые доказательства подробно изложены в следующем разделе статьи.

Основные результаты состоит в следующем.

Теорема 5.1. *Пусть для коэффициентов уравнения* (2.1) *выполняются приведённые выше условия 1 и 2, и пусть для коэффициентов уравнения и их следов выполняется неравенство*

$$q < 1.$$

Тогда существует единственное решение задачи (2.1)–(2.5) *из указанного класса* U.

Замечание 5.1. Условие $q < 1$, требуемое в теореме, обеспечивается за счёт достаточной малости нормы $|||f|||_{3,3}^2$ функции правой части, нормы ядра $\|\omega\|_{L_2[0,\ell]}^2$, а также величины $m = \mathrm{mes}(\overline{Q})$ — меры (площади) области $\overline{Q}$.

6. Доказательство основных результатов

В данном разделе доказывается однозначная разрешимость основной задачи (2.1)–(2.5) в классе U. Для удобства чтения и сохранения логической последовательности доказательство разбито на четыре основных этапа.

6.1. Выполнение дополнительного условия (2.5)

Сначала покажем, что решение задачи (2.1)–(2.4) удовлетворяет условию (2.5), то есть

$$\int_0^{\ell} \omega(y)\, u(x,t,y)\, dy = \varphi(x,t).$$

Допустим противное: пусть существует функция $\vartheta(x,t) \neq \varphi(x,t)$ такая, что

$$\int_0^\ell \omega(y)\, u(x,t,y)\, dy = \vartheta(x,t).$$

Введём новую функцию

$$z(x,t) = \varphi(x,t) - \int_0^\ell \omega(y)\, u(x,t,y)\, dy.$$

Умножая уравнение (2.1) на $\omega(y)$ и интегрируя по y от 0 до ℓ, получаем

$$K(t)\int_0^\ell \omega(y) u_{tt}\, dy - \int_0^\ell \omega(y) u_{xx}\, dy - \int_0^\ell \omega(y) u_{yy}\, dy + a(x,t)\int_0^\ell \omega(y) u_t\, dy +$$

$$+ c(x,t)\int_0^\ell \omega(y) u\, dy = \int_0^\ell \omega(y) g(x,t,y)\, dy + h(x,t)\int_0^\ell \omega(y) f(x,t,y)\, dy.$$

Дважды интегрируя по частям третье слагаемое и учитывая условия (2.4), находим

$$\int_0^\ell \omega(y) u_{yy}\, dy = -\sqrt{\frac{2}{\ell}} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 \omega_k u_k(x,t).$$

Тогда для функции $\vartheta = z + \varphi$ в области Q получаем

$$K(t)(z+\varphi)_{tt} - (z+\varphi)_{xx} + \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 \omega_k u_k + a(z+\varphi)_t + c(z+\varphi) =$$

$$= g_1 + h f_1 = g_1 + \frac{f_1}{f_1(x,t)} \left[\Phi + \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 \omega_k u_k(x,t) \right],$$

где $g_1 = \int_0^\ell \omega g\, dy$, $f_1 = \int_0^\ell \omega f\, dy$.

Отсюда для функции z приходим к задаче

$$Lz \equiv K(t) z_{tt} + a z_t - z_{xx} + cz = 0 \tag{6.1}$$

с полунелокальными краевыми условиями

$$\gamma z|_{t=0} = z|_{t=T}, \tag{6.2}$$

$$z|_{x=0} = z|_{x=1} = 0. \tag{6.3}$$

Докажем единственность решения задачи (6.1)–(6.3). Для этого рассмотрим тождество

$$2\big(Lz,\ e^{-\lambda t} z_t\big)_0 = 0.$$

Интегрируя это тождество по частям и учитывая условия теоремы 5.1 и условия (6.2), (6.3), получаем неравенство

$$\|z\|_1^2 \leq 0,$$

откуда следует $z(x,t) \equiv 0$, то есть задача (6.1)–(6.3) имеет только тривиальное решение.

Следовательно, решение задачи (2.1)–(2.4) удовлетворяет дополнительному условию (2.5):

$$\int_0^\ell \omega(y)\, u(x,t,y)\, dy \equiv \varphi(x,t).$$

6.2. Семейство нагруженных дифференциальных уравнений составного типа с малым параметром

Теперь докажем разрешимость задачи (4.1)–(4.3) методами «ε-регуляризации» [31], априорных оценок, Галёркина и последовательных приближений. А именно, в области Q рассмотрим бесконечное семейство нагруженных уравнений смешанного типа второго рода [15, 24]:

$$\begin{aligned} \Im_\varepsilon u_{k,\varepsilon} &= -\varepsilon\frac{\partial\Delta u_{k,\varepsilon}}{\partial t} + \Im u_{k,\varepsilon} = \\ &= g_k(x,t) + \frac{f_k(x,t)}{f_1(x,t)}\left[\Phi + \sqrt{\frac{2}{\ell}}\sum_{m=1}^{\infty}\mu_m^2\omega_m u_m\right] = F(u_{k,\varepsilon}), \end{aligned} \tag{6.4}$$

с полунелокальными краевыми условиями

$$\gamma D_t^p u_{k,\varepsilon}\big|_{t=0} = D_t^p u_{k,\varepsilon}\big|_{t=T}, \qquad p = 0,1,2, \tag{6.5}$$

$$u_{k,\varepsilon}\big|_{x=0} = u_{k,\varepsilon}\big|_{x=1} = 0, \tag{6.6}$$

где ε — малое положительное число, $\Delta u = u_{xx} + u_{tt}$ — оператор Лапласа.

Далее, для корректной постановки задачи (6.4)–(6.6) введём следующие обозначения.

Через

$$W_i(Q) = \left\{ \vartheta_k \;\middle|\; \vartheta_k \in W_2^i(Q),\ k \in \mathbb{N};\ i = 0,1,2 \right\} \tag{6.7}$$

обозначим пространства обобщённых функций с нормой

$$\langle\vartheta_k\rangle_i^2 \equiv \sqrt{\frac{2}{\ell}}\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\mu_k^2\right)^3\|\vartheta_k\|^2_{W_2^i(Q)}\,. \tag{6.8}$$

Очевидно, что пространство $W_i(Q)$ с заданной нормой является банаховым [27, 28, 29]. Из определения пространств $W_2^i(Q)$ при $i = 0,1,2$ следуют вложения $W_2(Q) \subset W_1(Q) \subset W_0(Q)$.

Теперь через

$$W(Q) = \left\{ \vartheta_k \;\middle|\; \vartheta_k \in W_2(Q),\ \sqrt{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial t}\Delta\vartheta_k \in W_0(Q) \right\} \tag{6.9}$$

обозначим класс вектор-функций $\{\vartheta_k(x,t)\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющих соответствующим условиям (6.5), (6.6).

Определение 6.1. Решением задачи (6.4)–(6.6) будем называть вектор-функцию $\{\vartheta_k(x,t)\}_{k=1}^{\infty} \in W(Q)$, удовлетворяющую уравнению (6.4) почти всюду в области Q.

6.3. Априорные оценки и леммы

Разрешимость задачи (6.4)–(6.6) будем доказывать методами последовательных приближений и априорных оценок [15]. А именно, в области $Q = (0,1)\times(0,T)$ рассмотрим полунелокальную краевую задачу для бесконечного семейства нагруженных интегро-дифференциальных уравнений составного типа с малым параметром. Для этого построим итерационную задачу, полагая $\theta = 0,1,2,\ldots$ и $\{u_{k,\varepsilon}^{(-1)}\} \equiv 0$:

$$\Im_\varepsilon u_{k,\varepsilon}^{(\theta)} = -\varepsilon\frac{\partial\Delta u_{k,\varepsilon}^{(\theta)}}{\partial t} + \Im u_{k,\varepsilon}^{(\theta)} = F\big(u_{k,\varepsilon}^{(\theta-1)}\big), \tag{6.10}$$

$$\gamma D_t^p u_{k,\varepsilon}^{(\theta)}\big|_{t=0} = D_t^p u_{k,\varepsilon}^{(\theta)}\big|_{t=T}, \qquad p = 0,1,2, \tag{6.11}$$

$$u_{k,\varepsilon}^{(\theta)}\big|_{x=0} = u_{k,\varepsilon}^{(\theta)}\big|_{x=1} = 0. \tag{6.12}$$

Лемма 6.1. *Пусть выполнены все условия теоремы 5.1. Тогда для решения задачи (6.10)–(6.12) справедливы следующие оценки:*

$$\frac{\varepsilon}{\delta}\langle u^{(\theta)}_{k,\varepsilon tt}\rangle^2_0 + \langle u^{(\theta)}_{k,\varepsilon}\rangle^2_1 \le \mathrm{const}(\widetilde{k},\widetilde{\theta},\widetilde{\varepsilon}); \tag{I}$$

$$\frac{\varepsilon}{\delta}\left\langle \frac{\partial \Delta u^{(\theta)}_{k,\varepsilon}}{\partial t}\right\rangle^2_0 + \langle u^{(\theta)}_{k,\varepsilon}\rangle^2_2 \le \mathrm{const}(\widetilde{k},\widetilde{\theta},\widetilde{\varepsilon}). \tag{II}$$

Символом $\mathrm{const}(\widetilde{k},\widetilde{\theta},\widetilde{\varepsilon})$ здесь и далее обозначается постоянная, не зависящая от параметров k, θ, ε.

Доказательство. Доказательство леммы 6.1 Рассмотрим тождество

$$-2\big(\Im_\varepsilon u^{(\theta)}_{k,\varepsilon},\, e^{-\lambda t}u^{(\theta)}_{k,\varepsilon t}\big)_0 = -2\big(F(u^{(\theta-1)}_{k,\varepsilon}),\, e^{-\lambda t}u^{(\theta)}_{k,\varepsilon t}\big)_0, \tag{6.13}$$

где постоянная $\lambda > 0$ будет выбрана позже.

Учитывая условия теоремы 5.1, интегрируя тождество (6.13) по частям и применяя неравенство Коши с σ [29], для левой части получаем оценку снизу:

$$\begin{aligned}
-2\big(\Im_\varepsilon u^{(\theta)}_{k,\varepsilon},\, e^{-\lambda t}u^{(\theta)}_{k,\varepsilon t}\big)_0 &= \varepsilon\big\|u^{(\theta)}_{k,\varepsilon tt}\big\|^2_0 + \\
&+ \int\limits_Q \left\{\big(2a(x,t) - K_t + \lambda K\big)u^{2(\theta)}_{k,\varepsilon t} + \lambda u^{2(\theta)}_{k,\varepsilon x} + (\lambda c - c_t)u^{2(\theta)}_{k,\varepsilon} + \lambda\Big(\frac{\pi}{\ell}\Big)^2 u^{2(\theta)}_{k,\varepsilon}\right\} dx\,dt + \\
&+ \int\limits_{\partial Q} \left[K(t)u^{2(\theta)}_{k,\varepsilon t}e_t + u^{2(\theta)}_{k,\varepsilon x}e_t + c(x,t)u^{2(\theta)}_{k,\varepsilon}e_t + \lambda\Big(\frac{\pi}{\ell}\Big)^2 u^{2(\theta)}_{k,\varepsilon}e_t - 2u^{(\theta)}_{k,\varepsilon x}u^{(\theta)}_{k,\varepsilon t}e_x\right] e^{-\lambda t}\,ds,
\end{aligned} \tag{6.14}$$

где $\vec{e} = (e_x, e_t)$, $e_x = (\vec{e}, x)$, $e_t = (\vec{e}, t)$, — единичный вектор внешней нормали к границе ∂Q.

Условия теоремы 5.1 обеспечивают неотрицательность интеграла по области Q. Учитывая полунелокальные краевые условия (6.11), (6.12) и условия теоремы 5.1, при выборе $\gamma^2 = e^{\lambda T}$ граничные интегралы обращаются в нуль. Таким образом, из (6.14) получаем

$$\begin{aligned}
&\varepsilon e^{-\lambda T}\big\|u^{(\theta)}_{k,\varepsilon tt}\big\|^2_0 + e^{-\lambda T}\int\limits_Q \left\{\big(2a(x,t) - K_t + \lambda K\big)u^{2(\theta)}_{k,\varepsilon t} + \lambda u^{2(\theta)}_{k,\varepsilon x} + (\lambda c - c_t)u^{2(\theta)}_{k,\varepsilon} + \lambda\Big(\frac{\pi}{\ell}\Big)^2 u^{2(\theta)}_{k,\varepsilon}\right\} dx\,dt \ \ge \\
&\quad \ge \varepsilon e^{-\lambda T}\big\|u^{(\theta)}_{k,\varepsilon tt}\big\|^2_0 + e^{-\lambda T}\int\limits_Q \left\{\delta_1 u^{2(\theta)}_{k,\varepsilon t} + \lambda u^{2(\theta)}_{k,\varepsilon x} + \delta_2 u^{2(\theta)}_{k,\varepsilon} + \lambda\Big(\frac{\pi}{\ell}\Big)^2 u^{2(\theta)}_{k,\varepsilon}\right\} dx\,dt \ \ge \\
&\quad \ge \varepsilon e^{-\lambda T}\big\|u^{(\theta)}_{k,\varepsilon tt}\big\|^2_0 + \delta_0 e^{-\lambda T}\big\|u^{(\theta)}_{k,\varepsilon}\big\|^2_1,
\end{aligned} \tag{6.15}$$

где $\delta_0 = \min\Big\{\delta_1,\ \lambda,\ \delta_2 + \lambda\big(\pi/\ell\big)^2\Big\}$.

Применяя неравенство Коши с σ к правой части тождества (6.13), получаем оценку сверху:

$$\begin{aligned}
\Big|-2\big(F(u^{(\theta-1)}_{k,\varepsilon}),\, e^{-\lambda t}u^{(\theta)}_{k,\varepsilon t}\big)_0\Big| &= \left|-2\left(g_k(x,t) + \frac{f_k(x,t)}{f_1(x,t)}\left[\Phi + \sqrt{\frac{2}{\ell}}\sum_{m=1}^{\infty}\mu_m^2\omega_m u^{(\theta-1)}_m\right],\, e^{-\lambda t}u^{(\theta)}_{k,\varepsilon t}\right)_0\right| \le \\
&\le 3\sigma^{-1}\big\|u^{(\theta)}_{k,\varepsilon t}\big\|^2_0 + \sigma\big\|g_k\big\|^2_0 + 2\sigma\rho^{-2}\Big(T_0^2\big\|\varphi\big\|^2_{C^2(\overline{Q})} + \big\|g_1\big\|^2_0\Big)\big\|f_k\big\|^2_{C(\overline{Q})} + \\
&\quad + 2\sigma\ell^{-1}\rho^{-2}c_1 m\big\|f_k\big\|^2_{C(\overline{Q})}\big\|\omega\big\|^2_{L_2[0,\ell]}\sum_{m=1}^{\infty}\big(1+\mu_m^2\big)^3\big\|u^{(\theta-1)}_{m,\varepsilon}\big\|^2_1.
\end{aligned} \tag{6.16}$$

Здесь $T_0 = \max\Big\{\|K(t)\|_{C(\overline{Q})},\ \|a(x,t)\|_{C(\overline{Q})},\ \|c(x,t)\|_{C(\overline{Q})}\Big\}$, $m = \int\limits_Q dx\,dt = \mathrm{mes}(\overline{Q})$.

Объединяя неравенства (6.15) и (6.16), получаем

$$\varepsilon e^{-\lambda T}\|u^{(\theta)}_{k,\varepsilon tt}\|^2_0+\left(\delta_0 e^{-\lambda T}-3\sigma^{-1}\right)\|u^{(\theta)}_{k,\varepsilon}\|^2_1\le\sigma\|g_k\|^2_0+2\sigma\rho^{-2}\left(T_0^2\|\varphi\|^2_{C^2(\overline{Q})}+\|g_1\|^2_0\right)\|f_k\|^2_{C(\overline{Q})}+$$
$$+2\sigma\ell^{-1}\rho^{-2}c_1m\|f_k\|^2_{C(\overline{Q})}\|\omega\|^2_{L_2[0,\ell]}\sum_{m=1}^{\infty}\left(1+\mu_m^2\right)^3\|u^{(\theta-1)}_{m,\varepsilon}\|^2_1. \tag{6.17}$$

Из теоремы вложения Соболева следует, что $\|f_k\|^2_{C(\overline{Q})}\le c_2\|f_k\|^2_{W_2^2(Q)}$ [28, 30], и из (6.17) получаем

$$\varepsilon\|u^{(\theta)}_{k,\varepsilon tt}\|^2_0+\left(\delta_0-3\sigma^{-1}e^{\lambda T}\right)\|u^{(\theta)}_{k,\varepsilon}\|^2_1\le\sigma e^{\lambda T}\|g_k\|^2_0+$$
$$+2\sigma c_2\rho^{-2}e^{\lambda T}\left(T_0^2\|\varphi\|^2_{C^2(\overline{Q})}+\|g_1\|^2_0\right)\|f_k\|^2_{W_2^2(Q)}+$$
$$+2\sigma\ell^{-1}\rho^{-2}e^{\lambda T}c_1c_2m\|f_k\|^2_{W_2^2(Q)}\|\omega\|^2_{L_2[0,\ell]}\sum_{m=1}^{\infty}\left(1+\mu_m^2\right)^3\|u^{(\theta-1)}_{m,\varepsilon}\|^2_1. \tag{6.18}$$

Выбирая $\sigma=\dfrac{6e^{\lambda T}}{\delta_0}$, получаем $\delta_0-3\sigma^{-1}e^{\lambda T}=\dfrac{\delta_0}{2}>0$. Разделив (6.18) на $\dfrac{\delta_0}{2}$, умножив на $\left(1+\mu_k^2\right)^3$ и просуммировав по k от 1 до ∞, приходим к первой рекуррентной формуле:

$$\frac{2\varepsilon}{\delta_0}\left\langle u^{(\theta)}_{k,\varepsilon tt}\right\rangle^2_0+\left\langle u^{(\theta)}_{k,\varepsilon}\right\rangle^2_1\le A_1+\frac{24}{\delta_0^2}e^{2\lambda T}\ell^{-1}\rho^{-2}c_1c_2m\left\langle f_k\right\rangle^2_{W_2^2(Q)}\|\omega\|^2_{L_2[0,\ell]}\left\langle u^{(\theta-1)}_{k,\varepsilon}\right\rangle^2_1, \tag{6.19}$$

где

$$A_1\equiv\frac{12}{\delta_0^2}e^{2\lambda T}\left\langle g_k\right\rangle^2_0+\frac{24}{\delta_0^2}e^{2\lambda T}\rho^{-2}c_2\left(T_0^2\|\varphi\|^2_{C^2(\overline{Q})}+\|g_1\|^2_0\right)\left\langle f_k\right\rangle^2_{W_2^2(Q)}.$$

Согласно условиям теоремы 5.1 справедливо неравенство

$$24\,e^{2\lambda T}c_1c_2\delta_0^{-2}\ell^{-1}\rho^{-2}m\|\omega\|^2_{L_2[0,\ell]}\left\langle f_k\right\rangle^2_{W_2^2(Q)}<q=M\||f|\|^2_{3,3}<1.$$

Таким образом, из рекуррентной формулы (6.19) вытекает справедливость первой априорной оценки (I). Действительно, взяв в качестве начального приближения $\{u^{(-1)}_{k,\varepsilon}\}\equiv\{0\}$, для нулевого приближения получаем

$$\frac{2\varepsilon}{\delta_0}\left\langle u^{(0)}_{k,\varepsilon tt}\right\rangle^2_0+\left\langle u^{(0)}_{k,\varepsilon}\right\rangle^2_1\le A_1.$$

Продолжая этот процесс, методом итераций получаем первую априорную оценку для любого $\{u^{(\theta)}_{k,\varepsilon}\}$, $\theta\ge1$:

$$\frac{2\varepsilon}{\delta_0}\left\langle u^{(\theta)}_{k,\varepsilon tt}\right\rangle^2_0+\left\langle u^{(\theta)}_{k,\varepsilon}\right\rangle^2_1\le A_1\sum_{\tau=0}^{\theta}q^\tau\le\frac{A_1}{1-q}\le2A_1,$$

если $q\le1/2$.

Теперь докажем вторую оценку (II).

Для этого рассмотрим тождество

$$-2\left(\Im_\varepsilon u^{(\theta)}_{k,\varepsilon},\,e^{-\lambda t}Pu^{(\theta)}_{k,\varepsilon}\right)_0=-2\left(F(u^{(\theta-1)}_{k,\varepsilon}),\,e^{-\lambda t}Pu^{(\theta)}_{k,\varepsilon}\right)_0, \tag{6.20}$$

где $Pu^{(\theta)}_{k,\varepsilon}=\dfrac{\partial}{\partial t}\Delta u^{(\theta)}_{k,\varepsilon}-\lambda u^{(\theta)}_{k,\varepsilon tt}-\lambda u^{(\theta)}_{k,\varepsilon t}$.

Рассуждая так же, как при доказательстве оценки (I), интегрируя (6.20) по частям и учитывая условия теоремы 5.1, а также полунелокальные краевые условия (6.11), (6.12), получаем

$$-2\left(\Im_\varepsilon u^{(\theta)}_{k,\varepsilon},\,e^{-\lambda t}Pu^{(\theta)}_{k,\varepsilon}\right)_0\ \ge\ \varepsilon\left\|\frac{\partial}{\partial t}\Delta u^{(\theta)}_{k,\varepsilon}\right\|^2_0+\int\limits_Q\Big\{\left(2a+K_t+\lambda K\right)u^{2(\theta)}_{k,\varepsilon tt}+$$
$$+\left(2a-K_t+\lambda K\right)u^{2(\theta)}_{k,\varepsilon xt}+\lambda u^{2(\theta)}_{k,\varepsilon xx}+\lambda u^{2(\theta)}_{k,\varepsilon xt}+\lambda^2u^{2(\theta)}_{k,\varepsilon t}+\lambda^2u^{2(\theta)}_{k,\varepsilon x}\Big\}e^{-\lambda t}\,dQ-$$
$$-3\sigma^{-1}\int\limits_Q e^{-\lambda t}u^{2(\theta)}_{k,\varepsilon tt}\,dQ-3\sigma^{-1}\int\limits_Q e^{-\lambda t}u^{2(\theta)}_{k,\varepsilon xt}\,dQ-$$
$$-3\sigma\lambda^2e^{-\lambda T}\,\|a\|^2_{C^1(\overline{Q})}\,\|c\|^2_{C^1(\overline{Q})}\,\|u^{(\theta)}_{k,\varepsilon}\|^2_1, \tag{6.21}$$

где σ, σ^{-1} — коэффициенты неравенства Коши. Учитывая условия теоремы 5.1 и полагая $\delta_0 = \min\{\delta_1, \lambda\}$, из (6.21) получаем оценку снизу:

$$\begin{aligned} -2\big(\Im_\varepsilon u_{k,\varepsilon}^{(\theta)},\, e^{-\lambda t} P u_{k,\varepsilon}^{(\theta)}\big)_0 \;\geq\; & \varepsilon e^{-\lambda T} \left\| \frac{\partial}{\partial t} \Delta u_{k,\varepsilon}^{(\theta)} \right\|_0^2 + \delta_0 e^{-\lambda T} \big\| u_{k,\varepsilon}^{(\theta)} \big\|_2^2 - \\ & - 3e^{-\lambda T} \sigma^{-1} \big\| u_{k,\varepsilon tt}^{(\theta)} \big\|_0^2 - 3e^{-\lambda T} \sigma^{-1} \big\| u_{k,\varepsilon xt}^{(\theta)} \big\|_0^2 - \\ & - 3\sigma\lambda^2 e^{-\lambda T} \, \|a\|_{C^1(\overline{Q})}^2 \, \|c\|_{C^1(\overline{Q})}^2 \, \big\| u_{k,\varepsilon}^{(\theta)} \big\|_1^2. \end{aligned} \tag{6.22}$$

Применяя неравенство Коши с σ к правой части тождества (6.20), получаем оценку сверху:

$$\begin{aligned} & \left| -2\big(F(u_{k,\varepsilon}^{(\theta-1)}),\, e^{-\lambda t} P u_{k,\varepsilon}^{(\theta)}\big)_0 \right| = \left| -2 \left(g_k + \frac{f_k}{f_1} \left[\Phi + \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2 \omega_n u_{n,\varepsilon}^{(\theta-1)} \right],\, e^{-\lambda t} P u_{k,\varepsilon}^{(\theta)} \right)_0 \right| \leq \\ & \leq 10\sigma\lambda^2 \big\| g_k \big\|_1^2 + 8\sigma\lambda^2\rho^{-2} \Big(T_1^2 \, \|\varphi\|_{C^3(\overline{Q})}^2 + \|g_1\|_{C^1(\overline{Q})}^2 \Big) \, \|f_k\|_{C^1(\overline{Q})}^2 + \\ & + 16\sigma c_1 \lambda^2 \ell^{-1} \rho^{-2} m \, \|f_k\|_{C^1(\overline{Q})}^2 \, \|\omega\|_{L_2[0,\ell]}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \big(1+\mu_n^2\big)^3 \big\| u_{n,\varepsilon}^{(\theta-1)} \big\|_2^2 + 18\sigma^{-1} \big\| u_{k,\varepsilon}^{(\theta)} \big\|_2^2. \end{aligned} \tag{6.23}$$

Здесь $T_1 = \max\Big\{ \|K(t)\|_{C^1(\overline{Q})},\; \|a(x,t)\|_{C^1(\overline{Q})},\; \|c(x,t)\|_{C^1(\overline{Q})} \Big\}$.

Объединяя оценки (6.22) и (6.23), получаем

$$\begin{aligned} & \varepsilon \left\| \frac{\partial}{\partial t} \Delta u_{k,\varepsilon}^{(\theta)} \right\|_0^2 + \big(\delta_0 - 15 e^{\lambda T} \sigma^{-1}\big) \big\| u_{k,\varepsilon}^{(\theta)} \big\|_2^2 \leq 10\sigma e^{\lambda T} \lambda^2 \big\| g_k \big\|_1^2 + \\ & + 8\sigma e^{\lambda T} \lambda^2 \rho^{-2} \Big(T_1^2 \, \|\varphi\|_{C^3(\overline{Q})}^2 + \|g_1\|_{C^1(\overline{Q})}^2 \Big) \, \|f_k\|_{C^1(\overline{Q})}^2 + \\ & + 16\sigma e^{\lambda T} c_1 \lambda^2 \ell^{-1} \rho^{-2} m \, \|f_k\|_{C^1(\overline{Q})}^2 \, \|\omega\|_{L_2[0,\ell]}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \big(1+\mu_n^2\big)^3 \big\| u_{n,\varepsilon}^{(\theta-1)} \big\|_2^2 + \\ & + 3\sigma\lambda^2 \, \|a\|_{C^1(\overline{Q})}^2 \, \|c\|_{C^1(\overline{Q})}^2 \, \big\| u_{k,\varepsilon}^{(\theta)} \big\|_1^2. \end{aligned} \tag{6.24}$$

Из теоремы вложения Соболева следует, что $\|f_k\|_{C^1(\overline{Q})}^2 \leq c_3 \, \|f_k\|_{W_2^3(Q)}^2$ [28, 29], поэтому из (6.24) получаем

$$\begin{aligned} & \varepsilon \left\| \frac{\partial}{\partial t} \Delta u_{k,\varepsilon}^{(\theta)} \right\|_0^2 + \big(\delta_0 - 15 e^{\lambda T} \sigma^{-1}\big) \big\| u_{k,\varepsilon}^{(\theta)} \big\|_2^2 \leq 10\sigma e^{\lambda T} \lambda^2 \big\| g_k \big\|_1^2 + \\ & + 8\sigma e^{\lambda T} c_3 \lambda^2 \rho^{-2} \Big(T_1^2 \, \|\varphi\|_{C^3(\overline{Q})}^2 + \|g_1\|_{C^1(\overline{Q})}^2 \Big) \, \|f_k\|_{W_2^3(Q)}^2 + \\ & + 16\sigma e^{\lambda T} c_1 c_3 \lambda^2 \ell^{-1} \rho^{-2} m \, \|f_k\|_{W_2^3(Q)}^2 \, \|\omega\|_{L_2[0,\ell]}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \big(1+\mu_n^2\big)^3 \big\| u_{n,\varepsilon}^{(\theta-1)} \big\|_2^2 + \\ & + 3\sigma\lambda^2 \, \|a\|_{C^1(\overline{Q})}^2 \, \|c\|_{C^1(\overline{Q})}^2 \, \big\| u_{k,\varepsilon}^{(\theta)} \big\|_1^2. \end{aligned} \tag{6.25}$$

Выбирая $\sigma = \dfrac{30 e^{\lambda T}}{\delta_0}$, получаем $\delta_0 - 15\sigma^{-1} e^{\lambda T} = \dfrac{\delta_0}{2} > 0$. Разделив (6.25) на $\dfrac{\delta_0}{2}$, умножив на $\big(1+\mu_k^2\big)^3$ и просуммировав по k от 1 до ∞, приходим ко второй рекуррентной формуле:

$$\frac{2\varepsilon}{\delta_0} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \Delta u_{k,\varepsilon}^{(\theta)} \right\rangle_0^2 + \big\langle u_{k,\varepsilon}^{(\theta)} \big\rangle_2^2 \leq A_2 + 480 \, e^{2\lambda T} \delta_0^{-2} c_1 c_3 \lambda^2 \ell^{-1} \rho^{-2} m \, \big\langle f_k \big\rangle_3^2 \, \|\omega\|_{L_2[0,\ell]}^2 \, \big\langle u_{k,\varepsilon}^{(\theta-1)} \big\rangle_2^2, \tag{6.26}$$

где

$$\begin{aligned} A_2 \equiv {} & 600 \, e^{2\lambda T} \delta_0^{-2} \lambda^2 \big\langle g_k \big\rangle_1^2 + 480 \, e^{2\lambda T} \delta_0^{-2} c_3 \lambda^2 \rho^{-2} \Big(T_1^2 \, \|\varphi\|_{C^3(\overline{Q})}^2 + \|g_1\|_{C^1(\overline{Q})}^2 \Big) \big\langle f_k \big\rangle_3^2 + \\ & + 360 \, e^{\lambda T} \delta_0^{-2} \lambda^2 \, \|a\|_{C^1(\overline{Q})}^2 \, \|c\|_{C^1(\overline{Q})}^2 \cdot 2A_1, \end{aligned}$$

причём последнее слагаемое оценено с помощью уже доказанной оценки (I).

Согласно условиям теоремы 5.1 справедливо неравенство

$$480\, e^{2\lambda T}\delta_0^{-2}c_1c_3\lambda^2\ell^{-1}\rho^{-2}m\,\|\omega\|^2_{L_2[0,\ell]}\left\langle f_k\right\rangle_3^2 < q = M\left\|\left|f\right|\right\|^2_{3,3} < 1,$$

и из рекуррентной формулы (6.26) вытекает справедливость оценки (II).

Действительно, взяв в качестве начального приближения $\{u^{(-1)}_{k,\varepsilon}\}\equiv\{0\}$, для нулевого приближения получаем

$$\frac{2\varepsilon}{\delta_0}\left\langle\frac{\partial}{\partial t}\Delta u^{(0)}_{k,\varepsilon}\right\rangle_0^2+\left\langle u^{(0)}_{k,\varepsilon}\right\rangle_2^2\le A_2.$$

Продолжая этот процесс, методом итераций получаем вторую априорную оценку для любого $\{u^{(\theta)}_{k,\varepsilon}\}$, $\theta\ge 1$:

$$\frac{2\varepsilon}{\delta_0}\left\langle\frac{\partial}{\partial t}\Delta u^{(\theta)}_{k,\varepsilon}\right\rangle_0^2+\left\langle u^{(\theta)}_{k,\varepsilon}\right\rangle_2^2\le A_2\sum_{\tau=0}^{\theta}q^{\tau}\le\frac{A_2}{1-q}\le 2A_2$$

при $q\le 1/2$.

Отсюда следует оценка (II). **Лемма 6.1 доказана.** □

Теперь для разности последовательных приближений введём функцию $\vartheta^{(\theta)}_{k,\varepsilon}=u^{(\theta)}_{k,\varepsilon}-u^{(\theta-1)}_{k,\varepsilon}$.

Лемма 6.2. *Пусть выполнены все условия теоремы 5.1. Тогда для функции $\{\vartheta^{(\theta)}_{k,\varepsilon}\}\in W(Q)$ справедливы следующие оценки*:

$$\frac{\varepsilon}{\delta_0}\left\langle\vartheta^{(\theta)}_{k,\varepsilon tt}\right\rangle_0^2+\left\langle\vartheta^{(\theta)}_{k,\varepsilon}\right\rangle_1^2\le A_1q^{\theta};\qquad (III)$$

$$\frac{\varepsilon}{\delta_0}\left\langle\frac{\partial\Delta\vartheta^{(\theta)}_{k,\varepsilon}}{\partial t}\right\rangle_0^2+\left\langle\vartheta^{(\theta)}_{k,\varepsilon}\right\rangle_2^2\le A_2q^{\theta}.\qquad (IV)$$

Доказательство леммы 6.2. Вычитая из уравнения (6.10), записанного для номера θ, то же уравнение для номера $\theta-1$, для функции $\vartheta^{(\theta)}_{k,\varepsilon}\in W(Q)$ получаем

$$\begin{aligned}\Im_\varepsilon\vartheta^{(\theta)}_{k,\varepsilon}&=-\varepsilon\frac{\partial\Delta\vartheta^{(\theta)}_{k,\varepsilon}}{\partial t}+\Im\vartheta^{(\theta)}_{k,\varepsilon}=\\&=\sqrt{\frac{2}{\ell}}\frac{f_k(x,t)}{f_1(x,t)}\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n^2\omega_n\vartheta^{(\theta-1)}_{n,\varepsilon}=F\big(\vartheta^{(\theta-1)}_{k,\varepsilon}\big)\end{aligned}\qquad (6.27)$$

со следующими полунелокальными краевыми условиями:

$$\gamma D_t^p\vartheta^{(\theta)}_{k,\varepsilon}\big|_{t=0}=D_t^p\vartheta^{(\theta)}_{k,\varepsilon}\big|_{t=T},\qquad p=0,1,2,\qquad (6.28)$$

$$\vartheta^{(\theta)}_{k,\varepsilon}\big|_{x=0}=\vartheta^{(\theta)}_{k,\varepsilon}\big|_{x=1}=0,\qquad (6.29)$$

где $\varepsilon>0$, $\theta=1,2,\ldots$, $\{u^{(-1)}_{k,\varepsilon}\}\equiv\{0\}$.

Далее, рассуждая так же, как при доказательстве леммы 6.1, для функции $\{\vartheta^{(\theta)}_{k,\varepsilon}\}=\{u^{(\theta)}_{k,\varepsilon}\}-\{u^{(\theta-1)}_{k,\varepsilon}\}\in W(Q)$ из тождества

$$-2\big(\Im_\varepsilon\vartheta^{(\theta)}_{k,\varepsilon},\,e^{-\lambda t}\vartheta^{(\theta)}_{k,\varepsilon t}\big)_0=-2\big(F(\vartheta^{(\theta-1)}_{k,\varepsilon}),\,e^{-\lambda t}\vartheta^{(\theta)}_{k,\varepsilon t}\big)_0\qquad (6.30)$$

получаем третью рекуррентную формулу:

$$\frac{\varepsilon}{\delta_0}\left\langle\vartheta^{(\theta)}_{k,\varepsilon tt}\right\rangle_0^2+\left\langle\vartheta^{(\theta)}_{k,\varepsilon}\right\rangle_1^2\le q\left\langle\vartheta^{(\theta-1)}_{k,\varepsilon}\right\rangle_1^2.\qquad (6.31)$$

Последовательно применяя (6.31) и учитывая, что $\left\langle\vartheta^{(0)}_{k,\varepsilon}\right\rangle_1^2=\left\langle u^{(0)}_{k,\varepsilon}\right\rangle_1^2\le A_1$, получаем априорную оценку (III).

Оценка (IV) доказывается аналогично, с использованием тождества

$$-2\big(\Im_\varepsilon\vartheta^{(\theta)}_{k,\varepsilon},\,e^{-\lambda t}P\vartheta^{(\theta)}_{k,\varepsilon}\big)_0=-2\big(F(\vartheta^{(\theta-1)}_{k,\varepsilon}),\,e^{-\lambda t}P\vartheta^{(\theta)}_{k,\varepsilon}\big)_0.$$

Лемма 6.2 доказана. □

6.4. Существование и единственность решения

Теорема 6.1. *Пусть выполнены все условия теоремы 5.1. Тогда задача (6.10)–(6.12) имеет единственное решение в пространстве $W(Q)$.*

Доказательство. Определим в пространстве $W(Q)$ отображение

$$u_{k,\varepsilon}^{(\theta)} = \Im_{\varepsilon}^{-1} F\big(u_{k,\varepsilon}^{(\theta-1)}\big) \equiv \mathcal{B} u_{k,\varepsilon}^{(\theta-1)}.$$

На основании леммы 6.1 оператор $\mathcal{B}$ отображает пространство $W(Q)$ в себя. Из рекуррентной формулы (6.31) и оценок (III), (IV) леммы 6.1 при условии $q < 1$ следует, что

$$\big\langle \mathcal{B}u - \mathcal{B}\vartheta \big\rangle_2^2 \le q \big\langle u - \vartheta \big\rangle_2^2, \qquad u, \vartheta \in W(Q),$$

то есть оператор $\mathcal{B}$ является сжимающим.

Согласно принципу сжимающих отображений (теореме Банаха) [32], задача (6.10)–(6.12) имеет единственное решение в пространстве $W(Q)$, причём последовательность приближений сходится к нему при $\theta \to \infty$:

$$u_{k,\varepsilon}^{(\theta)} \longrightarrow u_{k,\varepsilon} \quad \text{в } W(Q).$$

□

Теперь перейдём к решению исходной задачи (4.1)–(4.3). Согласно оценкам (I), (II) последовательность решений $\{u_{k,\varepsilon}\}$ задачи (6.4)–(6.6) ограничена в пространстве $W(Q)$ равномерно по ε. По теореме о слабой компактности [29, 32] из неё можно извлечь подпоследовательность $\{u_{k,\varepsilon_j}\}$, слабо сходящуюся в $W(Q)$ к некоторому элементу $\{u_k\}$.

Используя линейность дифференциального оператора и переходя к пределу при $\varepsilon_j \to 0$ в тождестве

$$\Im u_k - F(u_k) = \varepsilon_j \frac{\partial \Delta u_{k,\varepsilon_j}}{\partial t} + \Im\big(u_k - u_{k,\varepsilon_j}\big) - \big[F(u_k) - F(u_{k,\varepsilon_j})\big] \longrightarrow 0, \tag{6.32}$$

получаем, что равенство $\Im u_k = F(u_k)$ выполняется почти всюду в области Q. Это означает, что предельная функция $u_k(x,t)$ является единственным решением семейства нагруженных интегро-дифференциальных уравнений (4.1)–(4.3) в пространстве $W(Q)$.

Рассмотрим теперь переход к искомой трёхмерной функции $u(x,t,y)$ посредством найденных коэффициентов Фурье. Как известно, система собственных функций $\big\{Y_k(y)\big\}_{k=1}^{\infty} = \Big\{\sqrt{2/\ell}\,\sin(\mu_k y)\Big\}$ полна и ортонормирована в пространстве $L_2(0,\ell)$ [30]. Для функций $u_k(x,t)$ — решений задачи (4.1)–(4.3) — установлены априорные оценки (I)-(IV), а условие $q < 1$ теоремы 5.1 гарантирует равномерную ограниченность этих оценок.

Согласно равенству Парсеваля–Стеклова норма функции выражается через сумму норм её коэффициентов Фурье; для введённого пространства $W_2^{2,3}(G)$ это свойство принимает вид нормы (A) из раздела 3:

$$\|\!|u|\!\|_{W_2^{2,3}(G)}^2 \equiv \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sum_{k=1}^{\infty} \big(1+\mu_k^2\big)^3 \big\|u_k(x,t)\big\|_{W_2^2(Q)}^2.$$

Априорные оценки, полученные для задачи (6.10)–(6.12), обеспечивают сходимость этого ряда. Следовательно, ряд

$$u(x,t,y) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t)\, Y_k(y)$$

сходится в норме пространства $W_2^{2,3}(G)$, и его сумма $u(x,t,y)$ принадлежит этому пространству.

В силу полноты базиса собственных функций единственность всех коэффициентов Фурье влечёт единственность самой функции. Поэтому единственность каждого $u_k(x,t)$ в пространстве $W(Q)$ гарантирует

единственность функции $u(x,t,y)$ в пространстве $W_2^{2,3}(G)$. В свою очередь, после однозначного определения $u(x,t,y)$ неизвестная функция $h(x,t)$ однозначно находится в пространстве $W_2^2(Q)$ по приведённой выше явной формуле.

Тем самым доказаны существование и единственность решения $\{u(x,t,y),\ h(x,t)\}$ обратной задачи (2.1)–(2.5) в классе U. **Теорема** (5.1) **доказана.**

Благодарность

Авторы выражают искреннюю благодарность рецензентам за внимательное прочтение рукописи, а также за ценные замечания и рекомендации, способствовавшие улучшению статьи.

Финансирование

Эта работа поддерживается ...

Список литературы

[1] Bitsadze, A. V.: *On the theory of nonlocal boundary value problems*. Sov. Math. Dokl. **30**, 8-10 (1984).
[2] Lavrent'ev, M. M., Romanov, V. G., Vasil'ev, V. G.: Multidimensional Inverse Problems for Differential Equations. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 167, Springer, Berlin/Heidelberg (1970).
[3] Kabanikhin, S. I.: Inverse and Ill-Posed Problems: Theory and Applications. De Gruyter, Berlin (2011).
[4] Isakov, V.: Inverse Problems for Partial Differential Equations. 3rd ed., Applied Mathematical Sciences, Vol. 127, Springer, Cham (2017).
[5] Prilepko, A. I., Orlovsky, D. G., Vasin, I. A.: Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. Marcel Dekker, New York (2000).
[6] Megrabov, A. G.: Forward and Inverse Problems for Hyperbolic, Elliptic and Mixed Type Equations. VSP, Utrecht-Boston (2003).
[7] Sabitov, K. B., Martem'yanova, N. V.: *A nonlocal inverse problem for a mixed-type equation*. Russ. Math. (Iz. VUZ) **55**, 61-74 (2011). https://doi.org/10.3103/S1066369X11020083
[8] Sabitov, K. B., Safin, E. M.: *The inverse problem for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type*. Math. Notes **87**, 880-889 (2010).
[9] Sabitov, K. B., Sidorov, S. N.: *Inverse problem for degenerate parabolic-hyperbolic equation with nonlocal boundary condition*. Russ. Math. (Iz. VUZ) **59**, 39-50 (2015).
[10] Dzhamalov, S. Z.: Nonlocal Boundary Value and Inverse Problems for Equations of Mixed Type. Monograph, Tashkent (2021), 176 p. (In Russian)
[11] Dzhamalov, S. Z., Pyatkov, S. G.: *Some classes of inverse problems for second-order equations of mixed type*. Math. Notes NEFU **25** (4), 3-15 (2018).
[12] Dzhamalov, S. Z., Ashurov, R. R.: *On a linear inverse problem for a multidimensional mixed-type second-order equation of the second kind*. Differ. Equ. **55**, 34-45 (2019). https://doi.org/10.1134/S001226611901004X
[13] Dzhamalov, S. Z., Sipatdinova, B. K.: *The linear inverse problem with semi-nonlocal boundary condition for the three-dimensional mixed-type equation of the second kind, the second-order in an unbounded parallelepiped*. Chelyab. Phys. Math. J. **9**, 471-482 (2024).
[14] Dzhamalov, S. Z., Sipatdinova, B. K.: *On one linear inverse problem with nonlocal boundary conditions for the second kind, second order mixed type equation in an unbounded parallelepiped*. Uzbek Math. J. **68**, 24-36 (2024). https://doi.org/10.29229/uzmj.2024-3-4
[15] Dzhamalov, S. Z., Ashurov, R. R., Turakulov, Kh. Sh.: *The linear inverse problem for the three-dimensional Tricomi equation in a prismatic unbounded domain*. Lobachevskii J. Math. **42**, 3606-3615 (2021).
[16] Kozhanov, A. I., Ashurova, G. R.: *Third-order differential equations with multiple characteristics: degeneration and an unknown external action*. Chelyab. Phys. Math. J. **9**, 585-595 (2024).
[17] Kozhanov, A. I.: Composite Type Equations and Inverse Problems. Inverse and Ill-Posed Problems Series, VSP, Utrecht (1999).
[18] Kozhanov, A. I.: *Hyperbolic equations with unknown coefficients*. Symmetry **12** (9), 1539 (2020). https://doi.org/10.3390/sym12091539
[19] Kamynin, V. L.: *On the inverse problem of determining the right-hand side of a parabolic equation under an integral overdetermination condition*. Math. Notes **77**, 482-493 (2005). https://doi.org/10.1007/s11006-005-0047-6
[20] Ashurov, R. R., Mukhiddinova, O. T.: *Coefficient identification problem with integral overdetermination condition for diffusion equations*. J. Inverse Ill-Posed Probl. (2026), ahead of print. https://doi.org/10.1515/jiip-2025-0070
[21] Ashurov, R. R., Shakarova, M.: *Inverse problem for subdiffusion equation with the integral over-determination condition*. J. Math. Sci. (2024). https://doi.org/10.1007/s10958-024-07410-8
[22] Durdiev, D. K., Rahmonov, A. A.: *Global solvability of inverse coefficient problem for one fractional diffusion equation with initial non-local and integral overdetermination conditions*. Fract. Calc. Appl. Anal. **28**, 117-145 (2025). https://doi.org/10.1007/s13540-024-00367-0
[23] Durdiev, D. K.: *Coefficient inverse problem for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type with nonlocal conditions*. Russ. Math. (Iz. VUZ) **68** (10), 28-37 (2024).
[24] Nakhushev, A. M.: Loaded Equations and Their Applications. Nauka, Moscow (2012). (In Russian)
[25] Vragov, V. N.: Boundary Value Problems for Nonclassical Equations of Mathematical Physics. NSU, Novosibirsk (1983). (In Russian)
[26] Bitsadze, A. V.: Equations of the Mixed Type. Pergamon Press, Oxford (1964).

[27] Lions, J.-L., Magenes, E.: Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications, Vol. I. Springer, Berlin/Heidelberg (1972).
[28] Sobolev, S. L.: Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics. 3rd ed., Translations of Mathematical Monographs, Vol. 90, American Mathematical Society, Providence (1991).
[29] Ladyzhenskaya, O. A.: The Boundary Value Problems of Mathematical Physics. Applied Mathematical Sciences, Vol. 49, Springer, New York (1985).
[30] Berezanskii, Yu. M.: Expansions in Eigenfunctions of Selfadjoint Operators. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 17, American Mathematical Society, Providence (1968).
[31] Lattès, R., Lions, J.-L.: The Method of Quasi-Reversibility: Applications to Partial Differential Equations. American Elsevier, New York (1969).
[32] Trenogin, V. A.: Functional Analysis. 4th ed., Fizmatlit, Moscow (2007), 488 p. (In Russian)

On a Linear Inverse Problem for a Three-Dimensional Second-Order Mixed-Type Equation of the Second Kind with an Additional Integral Condition

S.Z.Dzhamalov, B.K.Sipatdinova

Abstract

Mixed-type equations and linear inverse problems play a crucial role in modeling various complex physical processes, making their rigorous mathematical analysis highly significant. In this paper, we consider the well-posedness of a linear inverse problem with a semi-nonlocal boundary condition for a three-dimensional second-order mixed-type equation of the second kind with an additional integral condition in a bounded parallelepiped. For this problem, using the methods of ε-regularization, a priori estimates, successive approximations, and contraction mappings together with the Fourier method, we prove the existence and uniqueness theorems for a generalized solution of the linear inverse problem in an anisotropic Sobolev space. The obtained results provide a strong theoretical foundation for the solvability of such complex multidimensional equations and can be further applied to the numerical analysis of related inverse problems.

Keywords

second-order mixed-type equation of the second kind; linear inverse problem with an additional integral condition; well-posedness of the problem; Fourier method; ε-regularization; a priori estimates; successive approximations; contraction mappings

Affiliations

Sirojiddin Dzhamalov Z
Address: V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;
e-mail: siroj63@mail.ru.
ORCID ID: https://orcid.org/0000-0002-3925-5129

Biybinaz Sipatdinova K
Address: Karakalpak State University named after Berdakh, Ch.Abdirov St. 1, Nukus, Uzbekistan.
e-mail: sbiybinaz@mail.ru
ORCID ID: https://orcid.org/0000-0002-7833-6992